Über den Einfluß der Lebesgueschen Funktionen auf die Konvergenz der Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

1. Es sei $\{\lambda_n\}_1^\infty$ eine monoton nichtabnehmende Folge mit $\lambda_1 \geqq 1$. Für ein im Intervall (0, 1) orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ bilden wir die Lebesgueschen Funktionen

$$L_m(\{\varphi_n\}; x) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m \varphi_k(x)\varphi_k(t) \right| dt \qquad (m=1, 2, \ldots).$$

Wir betrachten diejenigen orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}$, für die

$$\sup \int_0^1 \frac{L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x)}{\lambda_{\nu(x)}} dx \leqq 1 \tag{1}$$

besteht, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit nätürlichen Werten gebildet ist.

Weiterhin bezeichnet $M(\lambda)$ die Klasse derjenigen reellen Zahlenfolgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Orthogonalreihe

$$\sum a_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

bei jedem orthonormierten System $\{\varphi_n(x)\}$ mit der Eigenschaft (1) in (0, 1) fast überall konvergiert. (Die Menge der Divergenzpunkte von (2) hängt von dem System $\{\varphi_n(x)\}$ ab.)

Es sei $\{a_n\}_1^\infty$ eine Zahlenfolge, und m, M $(m \leqq M)$ natürliche Zahlen, dann bezeichnet $\{a_n\}_m^M$ die Folge $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-1}, a_m, \ldots, a_M, 0, \ldots)$. Wir setzen

$$I(\{a_n\}; \lambda) = \sup \int_0^1 \left(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |a_i\varphi_i(x) + \cdots + a_j\varphi_j(x)| \right) dx,$$

wobei das Supremum für alle orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}$ mit der Eigenschaft (1) gebildet wird. Weiterhin sei

$$\|\{a_n\}; \lambda\| = \lim_{N\to\infty} I(\{a_n\}_1^N; \lambda).$$

(Der Limes auf der rechten Seite existiert, und ist endlich, oder unendlich, weil

$$I(\{a_n\}_1^N;\lambda) \leqq I(\{a_n\}_1^{N+1};\lambda) \qquad (N=1,2,\ldots)$$

offensichtlich besteht.)

In der Arbeit [2] haben wir die folgende Behauptung erwähnt (Hilfssatz XII).

A. Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$ $(n\to\infty)$. $\{a_n\}\in M(\lambda)$ *gilt dann und nur dann, wenn*

$$\lim_{m\to\infty}\big(\lim_{M\to\infty} I(\{a_n\}_m^M;\lambda)\big)=0. \tag{3}$$

Weiterhin ist in der Note [3] der folgende Satz ausgesprochen.

B. Es sei $\lambda_n \nearrow \infty$ $(n\to\infty)$, $\{a_n\}\in M(\lambda)$ *gilt dann und nur dann, wenn*

$$\|\{a_n\};\lambda\|<\infty. \tag{4}$$

Der Beweis der Hinlänglichkeit von (3) ist leicht. Ist nämlich (3) erfüllt, dann können wir eine Indexfolge $(0=)n_0<\cdots<n_k<\cdots$ derart angeben, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} I(\{a_n\}_{n_k+1}^{n_{k+1}};\lambda)<\infty. \tag{5}$$

Es sei nun $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges orthonormiertes System mit (1). Aus (5), auf Grund der Definition von I folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \big(\max_{n_k<i\leqq j\leqq n_{k+1}} |a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x)|\big)\,dx<\infty, \tag{6}$$

und so ist

$$\delta_k(x)=\max_{n_k<i\leqq j\leqq n_{k+1}} |a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x)|\to 0 \qquad (k\to\infty) \tag{7}$$

fast überall in (0, 1). Aus (6) ergibt sich weiterhin

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 |s_{n_{k+1}}(x)-s_{n_k}(x)|\,dx<\infty, \tag{8}$$

wobei $s_m(x)$ die m-te Partialsumme der Reihe (2) bezeichnet. Aus (8) erhalten wir, daß

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k}(x)$$

fast überall existiert. Es sei nun $n_k<m<n_{k+1}$. Dann ist nach (7)

$$|s_m(x)-s_{n_k}(x)|\leqq \delta_k(x)\to 0 \qquad (m\to\infty)$$

fast überall in (0, 1), womit nach obigen $\{a_n\}\in M(\lambda)$ bewiesen ist.

Die Notwendigkeit von (3) ergibt sich leicht durch Anwendung der folgenden Behauptung ([2], Hilfssatz XI).

C. Es sei $\lambda_n\nearrow\infty$ $(n\to\infty)$. *Ist für die Indexfolge* $(0=)n_0<\cdots<n_k<\cdots$ $I(\{a_n\}_{n_k+1}^{n_{k+1}};\lambda)\geqq \varrho>0$ $(k=0,1,\ldots)$, *dann gibt es ein in* (0, 1) *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ *mit* (1) *derart, daß die Reihe* (2) *in* (0, 1) *fast überall divergiert.*

Ist (3) nicht erfüllt, dann gibt es auf Grund der Definition von I eine positive Zahl ϱ, für die

$$\lim_{M\to\infty} I(\{a_n\}_m^M; \lambda) > \varrho \qquad (m=1, 2, \ldots)$$

besteht. In diesem Falle kann man aber eine Indexfolge $(0=)n_0<\cdots<n_k<\cdots$ mit $I(\{a_n\}_{n_k+1}^{n_{k+1}}; \lambda)>\varrho$ $(k=0, 1, \ldots)$ angeben. Durch Anwendung der Behauptung C folgt $\{a_n\}\notin M(\lambda)$.

Man kann einsehen, daß die Behauptungen A und B gleichwertig sind. Aus (3) folgt nämlich (4) offensichtlich. Es ist nur die Implikation (4)$\Rightarrow$(3) zu beweisen. Diese folgt aber aus der folgenden Behauptung ([3], Hilfssatz III).

D. Es sei $\lambda_n\nearrow\infty$ $(n\to\infty)$. *Ist für eine Indexfolge* $(0=)n_0<\cdots<n_k<\cdots$ $I(\{a_n\}_{n_k+1}^{n_{k+1}}; \lambda)\geqq\varrho>0$ $(k=0, 1, \ldots)$, *dann gibt es ein in* (0, 1) *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ *mit* (1) *derart, daß*

$$\overline{\lim_{i,j\to\infty}} \left|\sum_{n=i}^{j} a_n\varphi_n(x)\right| = \infty \tag{9}$$

fast überall in (0, 1) *besteht.*

Ist also (3) nicht erfüllt, erhalten wir auf Grund der Behauptung D ein in (0, 1) orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ mit (1) derart, daß (9) fast überall in (0, 1) besteht, woraus $\|\{a_n\}; \lambda\|=\infty$ folgt. Damit haben wir (4)$\Rightarrow$(3) gezeigt.

Die ursprünglichen Beweise der Behauptungen C und D sind falsch. In dieser Note möchten wir für diese Behauptungen richtige Beweise angeben. Wir werden eine in [4] oder [5] angewandte Methode brauchen. Da offensichtlich aus der Behauptung D die Behauptung C folgt, ist nur D zu zeigen.

2. Zum Beweis der Behauptung D soll ein bekannter Hilfssatz vorausgeschickt werden.

Hilfssatz ([2], Hilfssatz X.). *Es sei* $I(\{a_n\}_1^N; \lambda)\geqq 16\sqrt{2}$. *Dann gibt es ein in* (0, 1) *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\psi_n(x)$ $(n=1, \ldots, N)$ *derart, daß*

$$\sup \int_0^1 \frac{2}{\lambda_{\nu(x)}} L_{\nu(x)}(\{\psi_n\}; x)\,dx \leqq 1$$

gilt, wobei das Supremum für alle messbaren Funktionen $\nu(x)$ *mit ganzzahligen Werten zwischen* 1 *und* N *gebildet ist, und*

$$\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N} |a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\psi_j(x)| \geqq 1$$

in einer einfachen Menge $E(\subseteqq(0, 1))$ *mit* $m(E)\geqq 1/4$ *besteht.*

(Eine Menge nennen wir *einfach*, wenn sie als die Vereinigung endlichvieler Intervalle entsteht.)

3. Beweis der Behauptung *D*. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

(10) $$I(\{a_n\}_{n_k+1}^{n_{k+1}};\lambda) \geqq 16\sqrt{2} \qquad (k=0, 1, \ldots)$$

annehmen.

Es seien I_i, J_i $(i=2, 3, \ldots)$ solche Intervalle, für die die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$\operatorname{mes}(I_i) = \frac{1}{2^s} \qquad (i = 2^s+\sigma;\ \sigma = 0, \ldots, 2^s-1;\ s = 1, 2, \ldots),$$

$$I_i \cap I_j = \varnothing \qquad (2^s \leqq i, j < 2^{s+1};\ i \neq j),$$

$$I_i \cap J_i = \varnothing, \quad \operatorname{mes}(J_i) = \frac{1}{2^{i+a}} \qquad (i=2, 3, \ldots);$$

$$J_i \cap J_j = \varnothing \qquad (i \neq j),$$

Weiterhin sei

$$\alpha_i = \sqrt{2s/12^3} \qquad (i = 2^s+\sigma;\ \sigma = 0, \ldots, 2^s-1;\ s=1, 2, \ldots).$$

wobei wir die Konstante $a(>0)$ später bestimmen werden.

Durch vollständiger Induktion definieren wir eine Indexfolge $(0=)k(1) < \cdots < k(i) < \cdots$, ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ und eine Folge von einfachen Mengen $F_i(\subseteqq I_i)$ $(i=2, 3, \ldots)$ mit folgenden Eigenschaften:

es gelten

(11) $$L_{n_{k(2)}}(\{\varphi_n\}; x) \leqq 1 \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

(12) $$\sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x)\, dx \leqq \frac{1}{4},$$

wobei das Supremum für alle messbaren Funktionen $\nu(x)$ mit ganzzahligen Werten zwischen 1 und $n_{k(2)}$ gebildet wird;

für $i=2, 3, \ldots$ sind

(13) $$\varphi_n(x) = 0 \qquad (x \notin I_i \cup J_i;\ n_{k(i)} < n \leqq n_{k(i)+1}),$$

(14) $$\varphi_n(x) = 0 \qquad (x \notin J_i;\ n_{k(i)+1} < n \leqq n_{k(i+1)}),$$

(15) $$\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)+1}+1}^{n_{k(i+1)}} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq 1 \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

(16) $$\lambda_{n_{k(i)+1}}^{-1} \left(1 + \sum_{j=2}^{i-1} (M(j)+1)\right) \leqq \frac{1}{4 \cdot 2^{2s}} \qquad (2^s \leqq i < 2^{s+1};\ s=1, 2, \ldots)$$

mit

$$M(j) = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 \left| \sum_{n_{k(j)}+1}^{n_{k(j)+1}}{}' \varphi_k(x)\varphi_k(t) \right| dt,$$

(17)
$$\sup \int_{I_i} \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \right) dx \leq$$

$$\leq \frac{s}{12^3 2^{2s}} + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2^{i+1+a}12^3}} \frac{1}{2^s} \qquad (i = 2^s+\sigma;\ \sigma = 0, \dots, 2^s-1),$$

(18)
$$\sup \int_{J_i} \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \right) dx \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2^{i+1+a}12^3 2^s}} + \frac{3}{2^{i+a}} \qquad (i = 2^s+\sigma;\ \sigma = 0, \dots, 2^s-1),$$

wobei das Supremum für alle messbaren Funktionen $\nu(x)$ mit ganzzahligen Werten zwischen $n_{k(i)}+1$ und $n_{k(i+1)}$, gebildet wird;
für jedes i ($i=2, 3, \dots$) gelten

(19)
$$\operatorname{mes}(F_i) \geq \frac{1}{4 \cdot 2^s} \qquad (i = 2^s+\sigma;\ \sigma = 0, \dots, 2^s-1),$$

(20)
$$\max_{n_{k(i)} < p \leq q \leq n_{k(i+1)}} |a_p\varphi_p(x) + \cdots + a_q\varphi_q(x)| \geq \alpha_i \quad (x \in F_i;\ i=2^s+\sigma;\ \sigma=0, \dots, 2^s-1).$$

Weiterhin die Mengen

$$G_s = \bigcup_{i=2^s}^{2^{s+1}-1} F_i \qquad (s=1, 2, \dots)$$

sind stochastisch unabhängig.

Es sei $k(2)$ die kleinste positive ganze Zahl mit $\lambda_{n_{k(2)}+1}^{-1} \leq 1/4$. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2\chi_n(4x) & (0 \leq x \leq 1/4), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($n=1, \dots, n_{k(2)}$), wobei $\chi_n(x)$ die n-te Haarsche Funktion bezeichnet. Es ist bekannt (s. z. B. G. Alexits [1], S. 46—50), daß

(21)
$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} \chi_n(x)\chi_n(t) \right| dt \leq 1 \qquad (N=1, 2, \dots)$$

gilt. Daraus, durch einfache Rechnung erhalten wir (11) und (12).

Es sei $i_0 (\geq 1)$ eine ganze Zahl. Wir nehmen an, daß die Indizes $k(i)$ ($i = 2, \dots, i_0+1$), die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n=1, \dots, n_{k(i_0+1)}$) und die einfachen Mengen F_i ($i=2, \dots, i_0$) schon definiert sind derart, daß diese Funktionen ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System bilden, weiterhin (16) für $i = 2, \dots, i_0+1$, (13), (14), (15), (17), (18), (19) und (20) für $i=2, \dots, i_0$ bestehen.

Da diese Funktionen Treppenfunktionen und diese Mengen einfach sind, können wir das Intervall I_{i_0+1}, bzw. das Intervall J_{i_0+1} in paarweise disjunkte Intervalle $\bar{I}_r$ $(r=1, \ldots, \varrho)$, bzw. $\bar{J}_s$ $(s=1, \ldots, \sigma)$ derart zerlegen, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ $(n=1, \ldots, n_{k(i_0+1)})$ in jeden Intervalle $\bar{I}_r$, $\bar{J}_s$ $(r=1, \ldots, \varrho;\ s=1, \ldots, \sigma)$ konstant ist, und jede Menge $F_i \cap I_{i_0+1}$ $(i=2, \ldots, i_0)$ mit $F_i \cap I_{i_0+1} \neq \emptyset$ die Vereinigung gewisser $\bar{I}_r$ ist. Die zwei Hälfte von $\bar{I}_r$, bzw. von $\bar{J}_s$ bezeichnen wir mit $\bar{I}_r'$, $\bar{I}_r''$, bzw. mit $\bar{J}_s'$, $\bar{J}_s''$.

Ist $f(x)$ eine in $(0, 1)$ definierte Funktion, H eine Menge und $I=(a, b)$ ein endliches Intervall, dann sei

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) & (a<x<b), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $H(I)$ bezeichne die Menge die aus H mit der Transformation $y=(b-a)x+a$ entsteht.

Wir wenden den Hilfssatz für die Folge $\{a_n\}_{n_{k(i_0+1)}+1}^{n_{k(i_0+1)+1}}$ an. (Wegen (10) können wir den Hilfssatz benützen.) Die entsprechenden Funktionen, bzw. die entsprechende Menge bezeichnen wir mit $\psi_n(x)$ $(n=n_{k(i_0+1)}+1, \ldots, n_{k(i_0+1)+1})$, bzw. mit E. Es sei $i_0+1=2^s+\sigma$ $(1 \leqq \sigma < 2^s)$. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2s}{12^3}} \left(\sum_{r=1}^{\varrho} \psi_n(\bar{I}_r'; x) - \sum_{r=1}^{\varrho} \psi_n(\bar{I}_r''; x) \right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{1-\dfrac{2s}{12^3}\operatorname{mes}(I_{i_0+1})}{\operatorname{mes}(J_{i_0+1})}} \left(\sum_{s=1}^{\sigma} \psi_n(\bar{J}_s'; x) - \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_n(\bar{J}_s''; x) \right)$$

$$(n = n_{k(i_0+1)}+1, \ldots, n_{k(i_0+1)+1}),$$

und

$$F_{i_0+1} = \left(\bigcup_{r=1}^{\varrho} E(\bar{I}_r') \right) \cup \left(\bigcup_{r=1}^{\varrho} E(\bar{I}_r'') \right).$$

Diese Funktionen sind Treppenfunktionen, und F_{i_0+1} ist einfach. Durch einfache Rechnung erhalten wir, daß die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1, \ldots, n_{k(i_0+1)+1})$ ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System bilden.

Es sei $k(i_0+2)$ die kleinste natürliche Zahl mit $k(i_0+2) \geqq k(i_0+1)+1$, für die (16) für $i=i_0+2$ besteht. Da die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1, \ldots, n_{k(i_0+1)+1})$ Treppenfunktionen sind, können wir das Intervall J_{i_0+1} auf paarweise disjunkte Intervalle $\tilde{J}_r$ $(r=1, \ldots, \tilde{\varrho})$ derart zerlegen, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ $(n=1, \ldots, n_{k(i_0+1)+1})$ in jedem Intervall $\tilde{J}_r$ $(r=1, \ldots, \tilde{\varrho})$ konstant ist; die zwei Hälfte von $\tilde{J}_r$ bezeichnen wir mit $\tilde{J}_r'$ bzw. $\tilde{J}_r''$ $(r=1, \ldots, \tilde{\varrho})$. Es sei dann

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{mes}(J_{i_0+1})}} \left(\sum_{r=1}^{\tilde{\varrho}} \chi_n(\tilde{J}_r'; x) - \sum_{r=1}^{\tilde{\varrho}} \chi_n(\tilde{J}_r''; x) \right)$$

$$(n = n_{k(i_0+1)+1}+1, \ldots, n_{k(i_0+2)}).$$

Diese sind auch Treppenfunktionen, und durch einfache Rechnung ergibt sich, daß die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1, \dots, n_{k(i_0+2)})$ in $(0, 1)$ ein orthonormiertes System bilden.

Aus der Definition der Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n = n_{k(i_0+1)}+1, \dots, n_{k(i_0+2)})$ folgt (13) und (14) für $i = i_0+1$. Aus (21) ergibt sich durch einfache Rechnung, daß (15) für $i = i_0+1$ gilt, und

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}+1}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq 1 \qquad (x \in J_{i_0+1}) \tag{22}$$

$$(n_{k(i_0+1)+1} < m \leqq n_{k(i_0+2)})$$

besteht. Weiterhin auf Grund des Hilfssatzes, aus der Definition von F_{i_0+1} und der Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n = n_{k(i_0)+1}+1, \dots, n_{k(i_0+1)+1})$ erhalten wir leicht, daß auch (19) und (20) für $i = i_0+1$ gelten.

Es sei $x \in I_{i_0+1}$ und $n_{k(i_0+1)} < m \leqq n_{k(i_0+1)+1}$. Dann ist $x \in \bar{I}'_r$, oder $x \in \bar{I}''_{\bar{r}}$ mit einem r order $\bar{r}$ $(1 \leqq r, \bar{r} \leqq \varrho)$; bezeichnen wir mit I dieses $\bar{I}'_r$, bzw. dieses $\bar{I}''_{\bar{r}}$. Dann erhalten wir

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt = \tag{23}$$

$$= \frac{2s}{12^3} \sum_{l=1}^{\varrho} \left(\int_{\bar{I}'_l} \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \psi_n(I; x)\psi_n(\bar{I}'_l; t) \right| dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\bar{I}''_l} \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \psi_n(I; x)\psi_n(\bar{I}''_l; t) \right| dt \right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1 - \frac{2s}{12^3}\,\mathrm{mes}\,(I_{i_0+1})}{\mathrm{mes}\,(J_{i_0+1})}} \sum_{l=1}^{\sigma} \left(\int_{\bar{J}'_l} \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \psi_n(I; x)\psi_n(\bar{J}'_l; t) \right| dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\bar{J}''_l} \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \psi_n(I; x)\psi_n(J''_l; t) \right| dt \right) =$$

$$= \frac{2s}{12^3} \sum_{l=1}^{\varrho} (\mathrm{mes}\,(\bar{I}'_l) + \mathrm{mes}\,(\bar{I}''_l)) \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \psi_n(I; x)\psi_n(t) \right| dt +$$

$$+ \sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1 - \frac{2s}{12^3}\,\mathrm{mes}\,(I_{i_0+1})}{\mathrm{mes}\,(J_{i_0+1})}} \sum_{l=1}^{\sigma} (\mathrm{mes}\,(\bar{J}'_l) + \mathrm{mes}(\bar{J}''_l)) \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \psi_n(I; x)\psi_n(t) \right| dt =$$

$$= \left(\frac{2s}{12^3}\,\mathrm{mes}\,(I_{i_0+1}) + \sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1 - \frac{2s}{12^3}\,\mathrm{mes}\,(I_{i_0+1})}{\mathrm{mes}\,(J_{i_0+1})}}\,\mathrm{mes}\,(J_{i_0+1}) \right) \times$$

$$\times \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \psi_n(I; x)\psi_n(t) \right| dt.$$

Ist aber $x \in I_{i_0+1}$ und $n_{k(i_0+1)+1} < m \leqq n_{k(i_0+2)}$, dann bekommen wir nach (14)

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt = \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{n_{k(i_0+1)+1}} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt = \tag{24}$$

$$= \left(\frac{2s}{12^3} \operatorname{mes}(I_{i_0+1}) + \sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1-\frac{2s}{12^3}\operatorname{mes}(I_{i_0+1})}{\operatorname{mes}(J_{i_0+1})} \operatorname{mes}(J_{i_0+1})} \right) \times$$

$$\times \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{n_{k(i_0+1)+1}} \psi_n(I; x)\psi_n(t) \right| dt,$$

wobei I mit einem $\bar{I}'_r$ $(1 \leqq r \leqq \varrho)$, bzw. mit einem $\bar{I}''_{\bar{r}}$ $(1 \leqq \bar{r} \leqq \varrho)$ gleich ist. Aus (23), (24) und aus dem Hilfssatz, auf Grund der Definition von I_{i_0+1} und J_{i_0+1} erhalten wir (17) im Falle $i = i_0+1$.

Es sei nun $x \in J_{i_0+1}$ und $n_{k(i_0+1)} < m \leqq n_{k(i_0+1)+1}$. Dann ist $x \in \bar{J}'_s$ mit einem $1 \leqq s \leqq \sigma$, oder $x \in \bar{J}''_{\bar{s}}$ mit einem $1 \leqq \bar{s} \leqq \sigma$; bezeichnen wir mit J dieses $\bar{J}'_s$, bzw. dieses $\bar{J}''_{\bar{s}}$, Dann erhalten wir nach obiger Methode

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| = \sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1-\frac{2s}{12^3}\operatorname{mes}(I_{i_0+1})}{\operatorname{mes}(J_{i_0+1})}} \operatorname{mes}(I_{i_0+1}) + \tag{25}$$

$$+ \left(1 - \frac{2s}{12^3}\operatorname{mes}(I_{i_0+1})\right) \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \psi_n(J; x)\psi_n(t) \right| dt.$$

Ist aber $x \in J_{i_0+1}$ und $n_{k(i_0+1)+1} < m \leqq n_{k(i_0+2)}$, dann ergibt sich nach (22) und (25)

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq \tag{26}$$

$$\leqq \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{n_{k(i_0+1)+1}} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt + \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)+1}+1}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq$$

$$\leqq \left(\sqrt{\frac{2s}{12^3} \cdot \frac{1-\frac{2s}{12^3}\operatorname{mes}(I_{i_0+1})}{\operatorname{mes}(J_{i_0+1})}} \operatorname{mes}(I_{i_0+1}) + \left(1 - \frac{2s}{12^3}\operatorname{mes}(I_{i_0+1})\right) \right) \times$$

$$\times \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{n_{k(i_0+1)+1}} \psi_n(J; x)\psi_n(t) \right| dt + 1,$$

wobei J mit einem $\bar{J}'_s$ $(1 \leqq s \leqq \sigma)$, bzw. mit einem $\bar{J}''_{\bar{s}}$ $(1 \leqq \bar{s} \leqq \sigma)$ gleich ist. Aus (25),

(26) und aus dem Hilfssatz, auf Grund der Definition von I_{i_0+1} und J_{i_0+1} erhalten wir (18) im Falle $i = i_0+1$. Weiterhin aus (13) ergibt sich

$$\int_1^1 \left| \sum_{n=n_{k(i_0+1)}+1}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt = 0 \tag{27}$$

$$(x \notin I_{i_0+1} \cup J_{i_0+1};\; m = n_{k(i_0+1)}+1, \ldots, n_{k(i)_0+2}).$$

Wir haben also die Indizes $(0=)k(1) < \cdots < k(i_0+1)$, das in (0, 1) orthonormierte System von Treppenfunktionen $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, \ldots, n_{k(i_0+2)})$ und die einfachen Mengen F_i $(i = 2, \ldots, i_0+1)$ derart bestimmt, daß (16) für $i = 2, \ldots, i_0+2$, weiterhin (13), (14), (15), (17), (18), (19) und (20) für $i = 1, \ldots, i_0+1$ gelten. Die Indexfolge $\{k(i)\}$, das System $\{\varphi_n(x)\}$ und die Mengenfolge $\{F_i\}$ mit den erwähnten Eigenschaften bekommen wir dann durch Induktion.

Wir zeigen erstens, daß das System $\{\varphi_n(x)\}$ die Eigenschaft (1) besitzt. Es sei $\nu(x)$ eine beliebige messbare Funktion mit positiven ganzzahligen Werten. Es sei E_1 $(\subseteqq (0, 1))$ die Menge der Punkte x, für die $\nu(x) \leqq n_{k(2)}$ gilt, weiterhin sei $E_i(\subseteqq (0, 1))$ die Menge der Punkte x, für die $n_{k(i)} < \nu(x) \leqq n_{k(i+1)}$ $(i=2, 3, \ldots)$ besteht. Diese Mengen sind paarweise disjunkt. Ist $x \in E_i$ $(2^s \leqq i < 2^{s+1};\ s=1, 2, \ldots)$, dann bekommen wir auf Grund von (11), (15) und (16)

$$\frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x) \leqq \frac{1}{\lambda_{n_{k(i)}+1}} \Bigg(L_{n_{k(i)}}(\{\varphi_n\}; x) + \tag{28}$$

$$+ \sum_{j=2}^{i-1} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j)}+1}^{n_{k(j)+1}} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt + \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j+1)}+1}^{n_{k(j)+1}} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \right) \Bigg) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\lambda_{n_{k(i)}+1}} \left(1 + \sum_{j=2}^{i-1} (M(j)+1) \right) + \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{4 \cdot 2^{2s}} + \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \int_0^1 \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \Bigg| dt.$$

Aus (12), (17), (18), (27) und (28) erhalten wir durch einfacher Rechnung

$$\int_0^1 \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x)\, dx =$$

$$= \int_{E_1} \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x)\, dx + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1} \int_{E_i} \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x)\, dx \right) \leqq$$

$$\leqq \int_{E_1} \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} L_{\nu(x)}(\{\varphi_n\}; x)\, dx +$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1}\int_{E_i}\left(\frac{1}{4\cdot 2^{2s}}+\frac{1}{\lambda_{\nu(x)}}\int_0^1\left|\sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)}\varphi_n(x)\varphi_n(t)\right|dt\right)dx\right)\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{4}+\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1}\frac{1}{4\cdot 2^{2s}}\int_{E_i}dx\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1}\int_{I_i}\left(\frac{1}{\lambda_{\nu(x)}}\int_0^1\sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)}\varphi_n(x)\varphi_n(t)\right|dt\right)dx\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1}\int_{J_i}\left(\frac{1}{\lambda_{\nu(x)}}\int_0^1\left|\sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)}\varphi_n(x)\varphi_n(t)\right|\right)dt\right)\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1}\left(\frac{s}{12^3 2^{2s}}+\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2^{i+a+1}12^3 2^s}}\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{i=2^s}^{2^{s+1}-1}\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2^{i+a+1}12^3 2^s}}+\frac{3}{2^{i+a}}\right)<1,$$

wenn a genügend groß ist. Also besitzt das System die Eigenschaft (1).

Auf Grund der Konstruktionsmethode der Mengen F_i können wir einsehen, daß die Mengen G_s ($s=1, 2, \dots$) stochastisch unabhängig sind. Weiterhin aus (19), $F_i\subseteqq I_i$ und $F_i\cap F_j=\emptyset$ ($i\neq j$, $2^s\leqq i, j<2^{s+1}$) folgt

$$\operatorname{mes}(G_s)\geqq\frac{1}{4}.$$

Nach dem zweiten Borel—Cantellischen Lemmas erhalten wir

$$\operatorname{mes}(\overline{\lim_{s\to\infty}}\, G_s)=1. \tag{29}$$

Ist $x\in\overline{\lim_{s\to\infty}}\, G_s$, dann folgt aus (20), daß (9) gilt. Nach (29) gilt aber (9) fast überall.

Damit haben wir die Behauptung D bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] G. Alexits, Convergence problems of orthogonal series *Budapest*, 1961.
[2] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen III, *Publicationes Math., Debrecen*, **12**, (1965), 127—157.
[3] K. Tandori, Beitrag zu der Arbeit „Über die Konvergenz der Orthogonalreihen III", *Publicationes Math., Debrecen*, **13**, (1966), 307—311.
[4] K. Tandori, Ergänzung zu einem Satz von S. Kaczmarz, *Acta Sci. Math.*, **28**, (1967), 147—153.
[5] F. Móricz—K. Tandori, On a problem of summability of orthogonal series, *Acta Sci. Math.*, **29**, (1968), 331—350.

(Eingegangen am 18. Oktober 1970.)