Orthogonale Projektionen von Hyperkreisen und Hyperschraubenlinien I.

Von A. GYARMATHI (Debrecen)

Die Arbeit beschäftig sich mit der Darstellung von Raumkurven, die in solche euklidische Räume höherer Dimension eingebettet sind, deren sämtliche skalare Krümmungen konstant sind. Dieses Thema ist unter anderem auch deshalb interessant, weil diese Kurven keine triviale Verallgemeinerungen der Geraden, des Kreises und der Schraubenlinie sind. Nach den Untersuchungen von O. Boruvka [1] und M. Sypták [10] sind die erwähnten Raumkurven in den euklidischen Raumen gerader Dimension Hiperkreise (**hk**), in den Räumen ungerader Dimension sind sie aber Hyperschraubenlinien (**hs**).

Die Raumkurven konstanter Krümmung — kurz **ck**-s — spielen eine zentrale Rolle, sowohl im der Praxis als auch in der Differentialgeometrie. Ein sehr bedeutender Teil der darstellenden Geometrie beschäftigt sich mit der Darstellung der Schraubenlinien (Schraubenflächen) von drei Dimensionen. Gerade deshalb ist die Darstellung von **ck**-s auch in der darstellenden Geometrie höherer Dimension nicht zu vernachlässigen.

M. Harant erörterte die Differentialgeometrie dieser Kurven in seinen Arbeiten [3], [4], [5] und bearbeitete die axonometrische Darstellung des Hyperkreises von vier Dimensionen und der Schraubenlinie von fünf Dimensionen [6]. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der orthogonalen Projektion der **ck**-s. Die orthogonalen Projektionen spiegeln deren geometrische Eigenschaften wieder, so ist die Bearbeitung der Theorie der orthogonalen Projektion der Kurven ebenfalls nötig. In zwei orthogonalen Projektionssystemen nach Schoute (kurz Sch-Projektionssystem) [9] und auch im Projektionssystem von Klima-Maurin [7], [8] (kurz K-M-Projektionssystem), wird die Darstellung der **ck**-s behandelt. Nicht nur die Darstellung der Kurven wird vorgenommen, sondern in allen Fällen wird auch das begleitende **n**-bein der **ck**-s konstruiert. Die Arbeit wird in zwei Teilen erscheinen. Der vorliegende erste Teil behandelt die Erklärung der **ck**-s und die zur Darstellung der Kurven nötigen Kenntnisse.

Hier beschäftigen wir uns auch mit dem Sch-Projektionssystem der Kurven.

Im zweiten Teil werden wir uns mit dem K-M-Projektionssystem der **ck**-s beschäftigen und es wird auch auf die Zusammenhänge zwischen den Sch- un K-M-Projektionssystemen dieser Kurven hingewiesen.

I. Der Hyperkreis und die Hyperschraubenlinie

1. *Der Hyperkreis und einige Eigenschaften desselben*

1. 1. Definition. Eine Kurve wird Hyperkreis $hk(u)$ genannt falls sie in den Raum R_{2p} $(p\geqq 2)$ eingebettet ist und alle seine skalaren Krümmungen von Null verschiedene Konstanten sind.

Nach den Untersuchungen von M. SYPTÁK [10] ist die Parameterdarstellung der kanonischen Kurve $hk(u)$ bezüglich eines speziellen rechtwinkligen kartesieschen Koordinatensystems die folgende:

$$ {}^{2i-1}x = r_i \cos l_i u, \quad {}^{2i}x = r_i \sin l_i u \tag{1. 1}$$

wobei r_i, $l_i>0$ konstant sind, $l_i\neq l_j$ für $i\neq j$, und $u\in(-\infty, \infty)$ den Parameter bedeutet. Die Darstellung dieses Hyperkreises mit der Bogenlänge als Parameter ist daher

$$ {}^{2i-1}x = r_i \cos L_i s, \quad {}^{2i}x = r_i \sin L_i s \qquad (i=1, 2, \dots, p) \tag{1. 1*}$$

wo r_i,

$$L_i = \frac{l_i}{\sqrt{r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2 + \cdots + r_p^2 l_p^2}}$$

konstant sind und $s\in(-\infty, \infty)$ die als Parameter dienende Bogenlänge bedeutet.

Hier wird erwähnt, daß in unserer Arbeit die derivierten Vektoren $\bar{x}', \bar{x}'', \dots$ $\dots, \bar{x}^{(n-1)}$ der Kurve benötigt werden. Die Koordinaten derselben werden in Bogenlängendarstellung und in beliebiger Parameterdarstellung wie folgt gegeben

$$\begin{aligned}
{}^{2i-1}x^{\mathrm{I}} &= -r_i L_i \sin L_i s, & {}^{2i-1}\dot{x} &= -r_i l_i \sin l_i u \\
{}^{2i}x^{\mathrm{I}} &= r_i L_i \cos L_i s, & {}^{2i}\dot{x} &= r_i l_i \cos l_i u \\
{}^{2i-1}x^{\mathrm{II}} &= -r_i L_i^2 \cos L_i s, & {}^{2i-1}\ddot{x} &= -r_i l_i^2 \cos l_i u \\
{}^{2i}x^{\mathrm{II}} &= -r_i L_i^2 \sin L_i s, & {}^{2i}\ddot{x} &= -r_i l_i^2 \sin l_i u \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned} \tag{1. 2}$$

wo $(i=1, 2, 3, \dots, p)$

Außerdem spielen bei der Untersuchung dieser Kurve die Normalen der Kurve eine wichtige Rolle.

(1. 2) Definition. Die normalen der Kurve werden auf Grund der Formeln von Frenet folgenderweise erklärt ([4] S. 22)

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \bar{n}_0 \\
\bar{n}_0^{\mathrm{I}} &= k_1 \bar{n}_1 \\
\bar{n}_1^{\mathrm{I}} &= -k_1 \bar{n}_0 + k_2 \bar{n}_2 \\
&\vdots \\
\bar{n}_{n-2}^{\mathrm{I}} &= -k_{n-2} \bar{n}_{n-3} + k_{n-1} \bar{n}_{n-1} \\
\bar{n}_{n-1}^{\mathrm{I}} &= -k_{n-1} \bar{n}_n
\end{aligned}$$

wo $\bar{n}_i\,(i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1))$ die Normalen der Kurve und $k_i\,(i = 1, 2, 3, \ldots, (n-1))$ die skalaren Krümmungen der Kurve sind. Im folgenden wird kurz zusammengefasst wasfür Kenntnisse bei der Darstellung des Hyperkreises benötigt werden. Es ergibt sich aus den Frenet-Formeln, daß die Normalen von geraden Index der Raumkurve $\bar{n}_0, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_{2i}$ als lineare Kombinationen der ungeraden Derivierten $\bar{x}^{I}, \bar{x}^{III}, \bar{x}^{V}, \ldots$ $\ldots, \bar{x}^{(2i-1)}$, die Normalen $\bar{n}_1, \bar{n}_3, \bar{n}_5, \ldots, \bar{n}_{2i-1}$ von ungeraden Index aber als lineare Kombinationen der geraden.

Derivierten $\bar{x}^{II}, \bar{x}^{IV}, \ldots, \bar{x}^{(2i)}$ dargestellt werden können (für $i=1, 2, 3, \ldots, p$), und zwar folgenderweise:.

$\bar{n}_0$ ist der Vektor $\bar{x}^{I}$,
$\bar{n}_1$ ist dem Vektor $\bar{x}^{II}$ parallel,
$\bar{n}_2$ liegt in einer von den Vektoren $\bar{n}_0$

und $\bar{n}_1'$ bestimmten Ebene, also in der Ebene der Vektoren $\bar{x}^{I}$ und $\bar{x}^{III}$. Der Vektor $\bar{n}_3$ liegt in der Ebene, der Vektoren $\bar{x}^{II}$ und $\bar{x}^{IV}$, der $\bar{n}_4$ in dem von den Vektoren $\bar{x}^{I}, \bar{x}^{III}, \bar{x}^{V}$ bestimmten Raum, der $\bar{n}_5$ wieder in dem von den Vektoren $\bar{x}^{II}, \bar{x}^{IV}, \bar{x}^{VI}$ bestimmten Raum u.s.w.*)

(1. 3) Definition. Unter dem zu einem Punkt des Hyperkreises gehörenden Normalraum beziehungsweise Tangentenraum versteht man den Raum, der von den zum Punkt gehörenden Normalen von ungeraden Index, beziehungsweise von der Tangente und von den Normalen mit geradem Index bestimmt wird.

*Alle Punkte des Hyperkreises sind von einem Punkt, von dem Mittelpunkt des Hyperkreises in gleicher Entfernung.***) *Im Raum R_{2p} gibt es mit dem Zentrum des Hyperkreises inzidierende Ebenen, auf welche die senkrechte Projektion****) *des Hyperkreises je ein Kreis ist. Irgend zwei beliebige solche Ebenen sind aufeinander senkrecht.*

Die orthogonale Projektion des zum Punkt P des Hyperkreises gehörenden Tangentenraumes bzw. Normalraumes fällt in der Achsenebene $O({}^{2i-1}x, {}^{2i}x)$ in diejenige Tangente bzw. in diejenige Normale, die zum Punkt 'P der Kreisprojektion des Hyperkreises gehört, wo 'P die Projektion von P ist.

Der Normalraum des Hyperkreises schneidet die Achsenebenen in je einer Geraden.

*) Zum Beispiel

$$\bar{n}_2 = \frac{k_2}{k_1}\,\bar{x}^{III} + \frac{k_1}{k_2}\,\bar{x}^{I}, \quad \bar{n}_3 = \frac{\dfrac{k_2}{k_1}\,\bar{x}^{IV} + \left(\dfrac{k_1}{k_2} + \dfrac{k_2}{k_1}\right)\bar{x}^{II}}{k_3}$$

Im Raum R_4

$$k_1 = \sqrt{r_1^2 L_1^4 + r_2^2 L_2^4}\,, \quad k_2 = \frac{1}{k_1}\sqrt{r_1^2 L_1^4(L_1^2 - k_1^2) - r_2^2 L_2^4(L_2^2 - k_1^2)}$$

und

$$k_3 = \frac{1}{k_1 k_2}\sqrt{r_1^2 L_1^4(L_1^2 - k_1^2 - k_2^2) + r_2^2 L_2^4(L_2^2 - k_1^2 - k_2^2)}\,,$$

wo

$$L_1 = \frac{l_1}{\sqrt{r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2}}\,, \quad L_2 = \frac{l_2}{\sqrt{r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2}} \text{ sind.}$$

**) Nach M. Sypták werden diese Feststellung und einige weitere Behauptungen im [10] ohne Beweis mitgeteilt, aber diese sind mit Hilfe der Formeln (1.1) (1.1*) (1.2) einfach zu beweisen.

***) Die Erklärung der senkrechten Projektion siehe [9] S. 84.

2. Die Hyperschraubenlinie und einige Eigenschaften derselben

(2. 1) Definition. Als Hyperschraubenlinie **hs** wird eine solche Hyperkurve bezeichnet, die in den Raum R_{2p+1} $(p\geqq 2)$ eingebettet ist und alle ihre skalaren Krümmungen nichtverschwindende Konstanten sind. Nach M. Sypták [10] ist die Parameterdarstellung der Hyperschraublinie $\mathbf{hs}(u)$ bezüglich eines geeigneten kartesischen Koordinatensystems

$$(2.1)\quad {}^{2i-1}x = r_i \cos l_i u, \quad {}^{2i}x = \sin l_i u, \quad {}^{2p+1}x = cu \qquad (i=1, 2, 3, \dots, p),$$

$r_i, l_i, c>0$ sind konstant $l_i \neq l_j$ wenn $i\neq j$ ist, und u $(-\infty<u<+\infty)$ ist der Parameter.

Die Darstellung dieser Hyperschraubenlinie mit der Bogenlänge als Parameter lautet

$$(2.1^*)\quad {}^{2i-1}x = r_i \cos L_i s, \quad {}^{2i}x = r_i \sin L_i s, \quad {}^{2p+1}x = Cs, \qquad (i=1, 2, \dots, p)$$

wo

$$L_i = \frac{l_i}{\sqrt{r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2 + \cdots + r_p^2 l_p^2 + c^2}},$$

$$C = \frac{c}{\sqrt{r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2 + \cdots + r_p^2 l_p^2 + c^2}};$$

hierbei ist $s\in(-\infty, \infty)$ die Bogenlänge als Parameter. Die Ableitungen von **hs** mit der Bogenlänge als Parameter sind

$$(2.2)\quad \begin{aligned}
{}^{2i-1}x^{\mathrm{I}} &= -r_i L_i \sin L_i s,\\
{}^{2i}x^{\mathrm{I}} &= r_i L_i \cos L_i s,\\
{}^{2p+1}x^{\mathrm{I}} &= C;\\
{}^{2i-1}x^{\mathrm{II}} &= -r_i L_i^2 \cos L_i s,\\
{}^{2i}x^{\mathrm{II}} &= -r_i L_i^2 \sin L_i s,\\
{}^{2p+1}x^{\mathrm{II}} &= 0;\\
{}^{2i-1}x^{\mathrm{III}} &= r_i L_i^3 \sin L_i s,\\
{}^{2i}x^{\mathrm{III}} &= -r_i L_i^3 \cos L_i s,\\
{}^{2p+1}x^{\mathrm{III}} &= 0.
\end{aligned}$$

Bei der Untersuchung der Hyperschraubenlinie spielen auch die Normalen der Kurven eine wichtige Rolle, die in der Definition (1. 2) bereits erklärt wurden.

Im weiteren wird der Tangenten bzw. Normalraum der Hyperschraubenlinie eingeführt, der ähnlicherweise wie (1. 3) erklärt werden kann.

Weiterhin werden wir die folgenden geometrischen Eigenschaften beider Darstellung der Hyperschraubenlinie verwenden:

Alle Punkte der Hyperschraubenlinie **hs** *sind von einer Geraden — von der Achse der Hyperschraubenlinie — in gleicher Entfermung.*

Der Hyperkreis **hk** *ist diejenige orthogonale Projektion auf die Hyperebene, die auf die Achse der Hyperschraubenlinie* **hs** *senkrecht ist. Die zum Punkt P der Hyper-*

*schraubenlinie gehörige Projektion des Tangentenraumes bzw. des Normalraumes, auf die letzt erwähnte Hyperebene ist die zum Punkt 'P des Kreises '***hk** *gehörende Tangentenraum bzw. Normalraum, wo 'P die Projektion des Hyperschraubenliniepunktes P auf die Hyperebene bedeutet.*

Dieser Hyperkreis **hk** *wird, der Hyperkreis der Hyperschraubenlinie genannt.*

Der Normalraum zu irgenwelchen Punkt der Hyperschraubenlinie **hs** schneidet die Achse der Hyperschraubenlinie senkrecht. Das skalare des Einheitsvektors, der in die Achse der Hyperschraubenlinie **hs** fällt und eines beliebigen den zum Punkt gehörenden Normalraum nach der Definition (2. 1) bestimmenden Vektors ist gleich Null.

Wenn ein beliebiger Punkt P der Hyperschraubenlinie und der Schnittpunkt mit der Achse des zum Punkt gehörenden Normalraumes mit einer Geraden m verbunden wird, dann ist diese Gerade m mit dem Raum des Hyperkreises der Hyperschraubenlinie parallel ([4]) S. 28).

Die Projektion der Hyperschraubenlinie **hs** *die Achsenebene Nummer* $k>1$ *vom Hyperkreis* **hk** *und auf den durch die Achse* **hs** *bestimmten Unterraum ist eine Hyperschraubenlinie von der Dimension* $2k+1$.

Nämlich die Darstellung der Projektion auf den Unterraum von der Dimension $2k+1$ der Hyperschraubenlinie wird erhalten, wenn wir aus (2. 1) diejenigen Gleichungen weglassen die sich auf die Achsen beziehen, welche von der Ausgewälten Achsenebene verschiedene Achsenebenen bestimmen. Die zurückgebliebenen Parameterdarstellungen ergeben die Darstellung der Hyperkurvenlinie, die als eine Projektion gilt, die eine Hyperschraubenlinie der Dimension $2k+1$ ist.

Es ergibt sich einfach, daß die Projektion einer Hyperschraubenlinie auf den durch eine Achsenebene des Hyperkreises und durch die Achse der Hyperschraubenlinie bestimmten Raum eine gewöhnliche Schraubenlinie ist. Die senkrechte Projektion auf je Achsenebene des Hyperkreises bzw. der Hyperschraubenlinie der Ableitung des Vektors $\bar{x}^i$ $(i=\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \ldots, (n-1))$ *vom Hyperkreis und von der Hyperschraubenlinie ist von einer ständigen Länge.*

Z. B. das Quadrat (2. 2) der auf die ${}^1x^2x$ Ebene projektierten senkrechten Projektion der Ableitung des Vektors $\bar{x}^i$ ist

$$ {}^1x^{(i)2} + {}^2x^{(i)2} = r_1^2 L_1^2 \qquad [i=\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \ldots, (n-1)] $$

Dies ist vom Parameter unabhängig, was den Beweis der vorigen Behauptung bedeutet.

II. Die Darstellung des Hyperkreises und der Hyperschraubenlinie in der Abbildung von Schoute.

3. Die Darstellung des Hyperkreises in der Projektion von Schoute im Raum R_n

Wir betrachten den Hyperkreis **hk** in einer gegebenen Parameterdarstellung

$$ (3.\,1) \qquad \begin{aligned} {}^1x &= r_1 \cos l_1 u, \quad {}^2x = r_1 \sin l_1 u, \\ {}^3x &= r_2 \cos l_2 u, \quad {}^4x = r_2 \sin l_2 u. \end{aligned} $$

Man hat jetzt

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad l_1 = 1 \quad \text{und} \quad l_2 = \frac{1}{2} \tag{3.2}$$

Die zwei unabhängigen Bilder*) vom **hk** sind nach dem zweiten Punkt die kreise ${}_{12}hk$ und ${}_{34}hk$ mit den Gleichungen

$$ {}^1x^2 + {}^2x^2 = r_1^2 \quad \text{und} \quad {}^3x^2 + {}^4x^2 = r_2^2. $$

Die Koordinaten des Anfangspunktes A_0 sind $(r_1, 0, r_2, 0)$. Der Punkt A soll zu $u = \frac{\pi}{3}$ gehören. Die zwei unabhängigen Bilder des zum Punkt A gehörenden Tangentenraumes fallen in die zum Punkt ${}_{34}A$ gehörende Tangente des Kreises ${}_{12}hk$, ${}_{12}A$ bzw. des Kreises ${}_{34}hk$. Die zwei unabhängigen Bilder des zum Punkt A gehörenden Normalraumes fallen aber auf die zum Punkt ${}_{12}A$ gehörende Normale des Kreises ${}_{12}hk$, ${}_{34}A$ bzw. des Kreises ${}_{34}hk$. Das begleitende Vierbein wird erst dann im Raum bestimmt, wenn an beiden Beinen außer dem Punkt A die unabhängigen Bilder je eines Punktes bekannt werden. Dies wird dadurch erreicht, daß auf jedes Bein des Vierbeins von A eine Strecke gemessen wird. (Abb. 1)

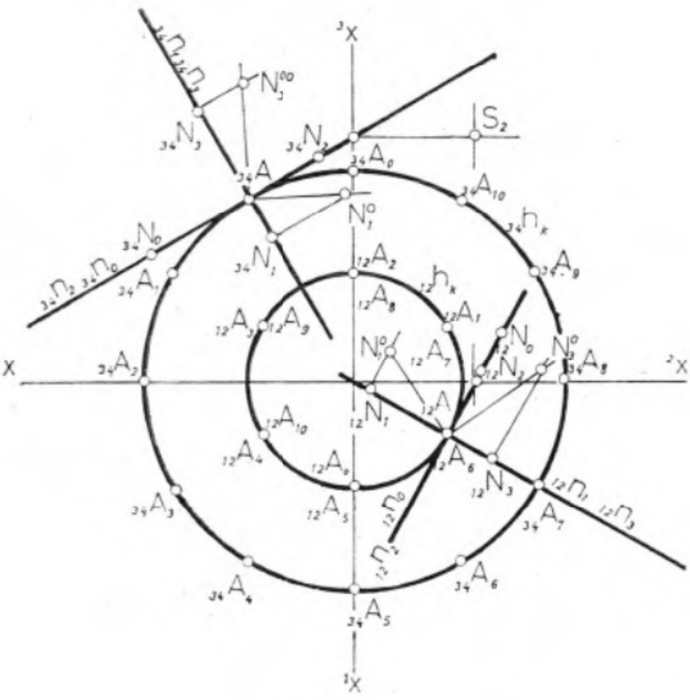

Abb. 1

*) Die Erklärung der unabhängigen Bilder in [9] S. 87.

Die Darstellung der Tangente $\mathbf{n}_0$.

Zuerst wird der Quotient der zwei unabhängigen Bilder einer beliebig von A auf $\bar{n}_0$ gemessenen Strecke unter Anwendug von (1.2) bestimmt.

Wir nehmen das Quadrat der Projektion auf die Ebene ${}^1x^2x$ bzw. ${}^3x^4x$ des tangenten Einheitvektors $\bar{n}_0 = \bar{x}^{\mathrm{I}}$:

$$({}_{12}\bar{x}^{\mathrm{I}})^2 = r_1^2 L_1^2 = \frac{r_1^2 l_1^2}{r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2} \quad \text{bzw.}$$

$$({}_{34}\bar{x}^{\mathrm{I}})^2 = r_2^2 L_2^2 = \frac{r_2^2 l_2^2}{r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2}$$

Nach (3. 2) erhält man

$$({}_{12}\bar{x}^{\mathrm{I}})^2 = ({}_{34}\bar{x}^{\mathrm{I}})^2 \quad \text{und daraus} \quad \overline{{}_{12}A_{12}N_0} = \overline{{}_{34}A_{34}N_0}.$$

Demnoch ergeben sich ${}_{12}N_0$ bzw. ${}_{34}N_0$, wenn auf die entsprechenden Bilder der Tangente aus den Punkten ${}_{12}A$ bzw. ${}_{34}A$ beliebige gleiche Strecken gemessen werden.

Die Darstellung der Normalen $\mathbf{n}_1$

Dem vorigen ähnlich wird der Punkt N_1 auf n_1 dargestellt.

$$({}_{12}\bar{x}^{\mathrm{II}})^2 = ({}^1\bar{x}^{\mathrm{II}})^2 + ({}^2\bar{x}^{\mathrm{II}})^2 = r_1^2 L_1^4 = \frac{r_1^2 l_1^4}{(r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2)^2}$$

$$({}_{34}\bar{x}^{\mathrm{II}})^2 = ({}^3\bar{x}^{\mathrm{II}})^2 + ({}^4\bar{x}^{\mathrm{II}})^2 = r_2^2 L_2^4 = \frac{r_2^2 l_2^4}{(r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2)^2}$$

und daraus ergibt sich nach (3. 2), daß

$$\overline{{}_{12}A_{12}N_1} = 2\, \overline{{}_{34}A_{34}N_1}$$

Konstruktion der Normale $\mathbf{n}_3$

Die Ebene der Normalen $\mathbf{n}_1$ und $\mathbf{n}_2$ schneidet die ${}^1x^2x$ bzw. ${}^3x^4x$ Zeichenebene in einer Geraden, deshalb kann die Normale n_1 um die Schnittgerade in die Ebene ${}^1x^2x$ bzw. ${}^3x^4x$ eingedreht werden. Der Erfolgt unserer Konstruktion änderit sich nicht, wenn die erwähnten Koordinatenebenen in den Punkt A parallel verschoben und in diese Ebenen eingedreht werden. Der Punkt A wird beim Drehen in diesem Fall unbeweglich bleiben. Die Gedrehten N_1^0 bzw. N_1^{00} des Punktes N_1 werden, so erhalten, daß im Punkt ${}_{12}N_1$ bzw. ${}_{34}N_1$ zum Bild der Normalen ${}_{12}n_1$ bzw. ${}_{34}n_1$ eine Senkrechte gefällt und darauf die Entfernung von der entsprechenden Drehebene N_1 gemessen wird, und diese ist nach der Anwendung der Bemerkung*)

*) Das Quadrat des Abstandes von den Punkten $P_1({}^1x_1, {}^2x_1, \dots, {}^4x_1)$ und $P_2({}^1x_2, {}^2x_2, \dots, \dots, {}^4x_2)$. Der Abstand von zwei Punkten ist noch den obigen Formeln in der Kenntnis der Bilder durch die Serie der senkrechten Dreiecke einfach zu konstruieren. Die Entfernung von zwei Punkten ist sehr einfach in R_4 zu konstruieren wenn die zwei Punkte durch die Bilder von Schoute gegeben sind, da

$$\overline{{}_{12}P_1\,{}_{12}P_2}^2 = ({}^1x_1 - {}^1x_2)^2 + ({}^2x_1 - {}^2x_2)^2$$

$$\overline{{}_{34}P_1\,{}_{34}P_2}^2 = ({}^3x_1 - {}^3x_2)^2 + ({}^4x_1 - {}^4x_2)^2 \quad \text{gilt.}$$

$\overline{{}_{12}N_1N^0} = \overline{{}_{34}A_{34}N_1}$ bzw. $\overline{{}_{34}N_1N_1^{00}} = \overline{{}_{12}A_{12}N_1}$. Die Abgedrehten von N_3, die Punkte N_3^0 bzw. N_3^{00} sind aber ganz einfach so zu erhalten, daß vom Punkt ${}_{12}A$ bzw. ${}_{34}A$ beliebig zum Beispiel durch $\overline{{}_{12}AN_1^0} = \overline{{}_{34}AN_1^{00}}$ auf den ${}_{12}n_1^0$ bzw. ${}_{34}n_1^0$, in den Punkten ${}_{12}N_3$ bzw. ${}_{34}N_3$ gestellte senkrechte Geraden geschnitten werden, siehe wieder die

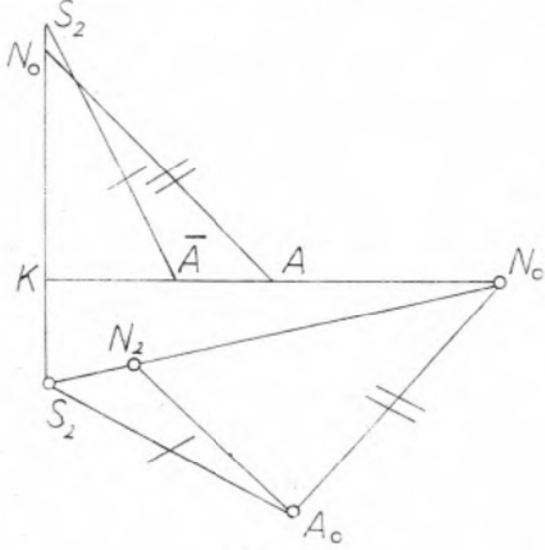

Abb. 1a

Bemerkung*. Wenn die Punkte N_3^0 bzw. N_3^{00} auf ${}_{12}n_3$ bzw. ${}_{34}n_3$ zurückprojiziert werden, dann erhält man auch die gesuchten Bilder ${}_{12}N_3$ bzw. ${}_{34}N_3$ (in der guten Richtung der Strecken wird die Messung gesiehert, wenn die Gültigkeit des Teilverhältnises $({}_{12}N_1\,{}_{12}A_{12}N_3) = ({}_{34}N_1\,{}_{34}A_{34}N_3)$ in Betracht genommen wird).

Die Konstruktion der Normalen $\mathbf{n}_2$

Ein Punkt N_2 auf $\mathbf{n}_2$ ist durch die folgende Überlegung zu bestimmen. Zuerst werden die Tangentenebenen $\bar{n}_0\bar{n}_2$ dargestellt. Diese ist — in Hinblick darauf das die senkrechte Projektion der Ebene $\bar{n}_0\bar{n}_2$, ${}_{12}n_0$ bzw. ${}_{34}n_0$ ist — nichts anderes als eine auf die Zeichenebene ${}^1x\,{}^2x$ senkrechte Hyperebene die auf ${}_{12}n_0$ liegt und die gemeinsame Ebene der auf ${}_{34}n_0$ liegenden und der auf die Ebene ${}^3x\,{}^4x$ senkrecht liegenden Hyperebene darstellt. Den Spurpunkt S_2 dieser Ebene auf der Ebene ${}^2x\,{}^3x$ wird durch die im Punkt ${}_{12}n_0 \cap {}^2x$ mit der ${}^3x$ parallelen Geraden und durch die im Punkt ${}_{34}n_0 \cap {}^3x$ mit der ${}^2x$ parallelen Geraden ausgeschnitten. Der Spurpunkt der Tangentenebene S_3 auf der Ebene ${}^3x\,{}^4x$ wird ähnlich erhalten, die Achsen ${}^3x\,{}^4x$ werden auf dem Bild „34" vertauscht. Die Punkte AS_2N_0 sind Eckpunkte des Dreiecks der Tangentenebene. Die echte Größe des Dreiecks $AS_0^2N_0$, d.h. des Dreieck $A^0S_2^0N_0^0$ wurde nach der Bestimmung der echten Länge der Seiten (nach der Bemerkung) auf der Abbildung 1. a. dargestellt. Zum Beispiel die Länge der Seite N_0A ergibt sich aus KAN_{0A}, wo $\overline{KN_0} = {}_{34}A_{34}N_0$ und $\overline{KA} = \overline{{}_{12}A_{12}N_0}$ ist. Ähnlich kann $\overline{\bar{A}S_2}$ bzw. $\overline{S_2N_0}$ erhälten werden. Im Dreieck $S_2A^0N_0$ wird auf die Gerade n_0 im Punkt A eine Senkrechte gestellt und diese schneidet die Seite N_2S_2 im Punkt N_2.

Die Position von ${}_{12}N_2$ bzw. von ${}_{34}N_2$ kann auf den Geraden ${}_{12}n_0$ bzw. ${}_{34}n_0$ auf Grund der Invarianz des Teilverhältnisses unter Anwendung der Zusammenhänge

$$(N_0 S_2 N_2) = ({}_{12}N_0\, {}_{12}S_2\, {}_{12}N_2) = ({}_{34}N_0\, {}_{34}S_2\, {}_{34}N_2)$$

festgestellt werden. Damit ist die Konstruktion des begleitenden Vierbeines $A(N_0, N_1, N_2, N_3)$ fertig, jedes Bein wurde durch die Bilder von je zwei Punkten bestimmt.

Bemerkung: In den anderen Punkten von **hk** werden die begleitenden Vierbeine ähnlich konstruiert. Wenn aber die obigen in Betracht kommen, kann fest gestellt werden, daß eine neure Konstruktion nicht mehr nötig ist, nähmlich ist die Länge der Projektionen einer auf dem Vierbein liegenden Strecke auf die zwei Zeichenebenen von n unabhängig.

4. Die Darstellung der Hyperschraubenlinie in der Projektion von Schoute im Raum R_5

Die Projektion der Hyperschraubenlinie nach der Formel (2. 1) auf der Koordinatenebene ${}^1x\,{}^2x$ bzw. ${}^3x\,{}^4x$ ist je ein Kreis. Die Projektion auf der Koordinatenebene ${}^4x\,{}^5x$ ist eine Sinuslinie ${}_{45}hs$ deres Gleichung nach der Formel (2. 1)

(4. 1) $${}^4x = r_2 \sin l_2 u, \quad {}^5x = cu \text{ ist.}$$

Die Angaben auf der zweiten Abbildung sind die folgenden

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad l_1 = 1, \quad l_2 = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{3}$$

Die Bilder der einzelnen Punkte auf der ${}_{45}hs$ wurden als Werte von $u = \frac{\pi}{3}$ dargestellt. Im Punkt $P\left(u = \frac{2\pi}{3}\right)$ wurden die begleitenden Fünfbeine der Hyperschraubenlinie konstruiert.

Die Konstruktion der Tangenten $\mathbf{n}_0$

Aus den Gleichungen (4. 1) und aus unseren Kenntnissen die sich auf die Hyperschraubenlinie beziehen folgt, daß das Bild der Tangenten ${}_{45}n_0$ der Hyperschraubenlinie ähnlich konstruiert werden kann, wie im Falle der Schraubenlinie von drei Dimensionen. Die Achse des Richtungskegels ist ${}^5x$. Falls der ${}_{34}hk$ als Grundkreis gewählt wird, ist Höhe $p = 2c = \frac{2}{3}$. Nach der Durchführung der bekanten Konstruktion, wurde das Bild der im Punkt ${}_{34}P$ liegenden Tangenten ${}_{45}n_0$ der Hyperschraubenlinie bestimmt. Die ${}_{12}n_0$ bzw. ${}_{34}n_0$ sind auf Grund der obigen Tangenten des entsprechenden Punktes der ${}_{12}hk$ bzw. ${}_{34}hk$. Auf diesen Tangenten wurden die Bilder der Punkte N_0, ${}_{12}N_0$ bzw. ${}_{34}N_0$ im vorigen Kapitel durch das bekannte Verfahren bestimmt $\left(\overline{{}_{12}P_{12}N_0} = \overline{{}_{34}P_{34}N_0}\right)$. Aus dem Bild ${}_{34}N_0$ wird durch eine Hinprojektion auf des Bild ${}_{45}n_0$ der ${}_{45}N_0$ erhälten. Durch die Punkte P und N_0 wird die Tangente $\mathbf{n}_0$ eindeutig bestimmt. (Abb. 2)

Die Darstellung der Normalen $\mathbf{n}_1$ *und* $\mathbf{n}_3$ *der Hyperschraubenlinie*

Nach unserem Kenntnissen ist die orthogonale Projektion des zum Punkt P von **hs** gehörenden Normalraumes auf den senkrechten Hyperraum ihrer Achse nichts anderes, als der zum entsprechenden (z. B. in P, ${}_{12}P$ ${}_{34}P$) Punkt des Hyperkreises **hk** von **hs** gehörende Normalraum, undzwar so, daß auf der Hyperebene **hk** der zur **hs** gehörenden $\mathbf{n}_1$ bzw. $\mathbf{n}_3$ die Projektion die erste bzw. die dritte Normale von **hk** ist. Deshalb geschieht die Konstruktion des Normalraumes „12" bzw. des Bildes „34" ebenso wie im Fall des Hyperkreises. 1. Abbildung.

Durch ein solches Verfahren wurden auf der Normalen $\mathbf{n}_1$ $N_1(\overline{2_{12}P_{12}N_1} = \overline{{}_{34}P_{34}N_1})$ bzw. auf der Normalen $\mathbf{n}_3$ N_3 Punkte $({}_{12}N_1, {}_{34}N_1)$ bzw. die Bilder $({}_{12}N_3, {}_{34}N_3)$ bestimmt. Mann soll betracht nehmen, daß $\mathbf{n}_1$ auf ${}^5x$ senkrecht ist.

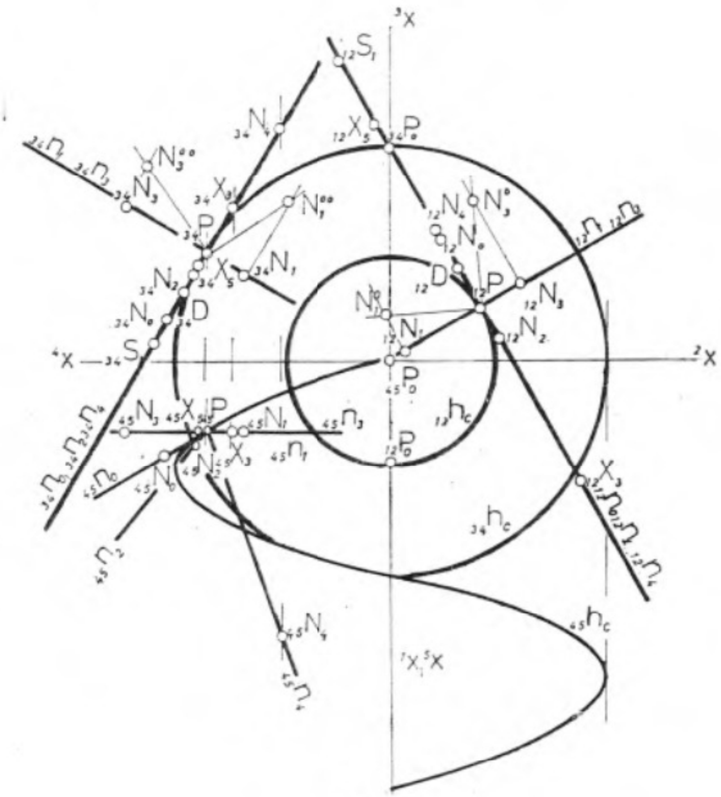

Abb. 2

Aus dem Vorigen ergibt sich, daß der Normalraum, der gegenwärtig eine Ebene ist, auf ${}^5x$ senkrecht ist. Daraus folgt, daß das Bild „45" des Normalraumes auf dem Bildpunkt ${}_{45}P$ liegt und mit der Achse ${}^4x$ parallel ist. Die Bildpunkte ${}_{45}N_1$ bzw. ${}_{45}N_3$, werden also so erhalten daß die Bilder ${}_{34}N_1$ bzw. ${}_{45}N_3$ auf entsprechende. Weise auf die mit der vorigen Achse ${}^4x$ parallelen Ebene projektiert werden.

Die Konstruktion je eines Punktes der Normale $\mathfrak{n}_2$ und $\mathfrak{n}_4$

Die bei der Darstellung des Normalraumes festgestellten Tatsachen sind auch für den Tangentenraum gültig. Deshalb fällt das Bild „12" bzw. „34" der Normalen $\mathfrak{n}_2$ und $\mathfrak{n}_4$ mit der entsprechenden Tangente von ${}_{12}hk$ bzw. ${}_{34}hk$ zusammen. Die Konstruktion des Punktes N_2 vollzog sich mit einem ähnlichen Verfahren, wie im Falle des Hyperkreises, der Unterschied ist nur, daß der dort eine Rolle spielende Punkt S_2 durch einen Punkt der in der Richtung $\bar{x}^{III}$ liegenden Geraden

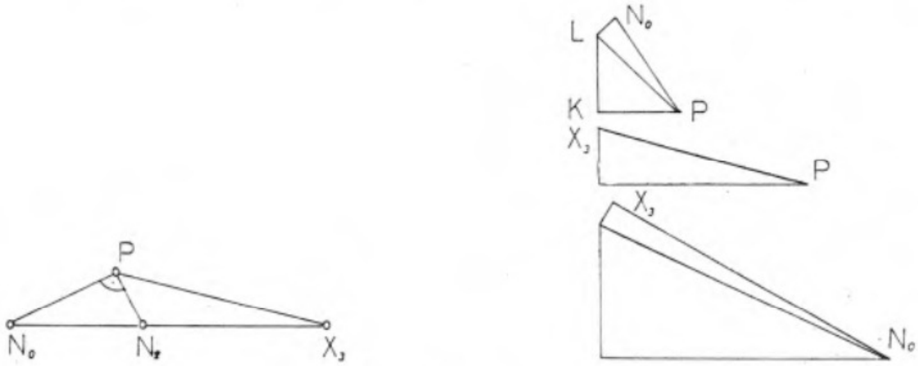

Abb. 2a

ersetzt wurde. Wir haben in Betracht genommen, daß die Normale $\mathfrak{n}_2$ in der durch die Vektoren $\bar{x}^{III}$ und $\bar{x}^{V}$ aufgespannten Ebene liegt.

Ein Punkt X_3 der Geraden des Vektors $\bar{x}^{III}$ wurde dargestellt, unter Rücksichtnahme darauf, daß auf Grund der **hs** bestimmenden Angaben

$$\overline{{}_{12}P_{12}X_3} = 4\,\overline{{}_{34}P_{34}X_3} \quad {}^{*)} \text{ ist.}$$

${}_{45}X_3$ liegt aber auf ${}_{45}P$ und ist auf der mit der Achse parallelen Geraden, da der Vektor $\bar{x}_3$ nach der Formel (2. 2) auf die Achse ${}^5x$ senkrecht ist.

Bei der Bestimmung der echten Länge der Strecke soll in Betracht genommen werden, daß die Punkte in P_5 zu finden sind (Abb. 2a)

$$\overline{KP} = \overline{{}_{12}P_{12}N_0}, \quad \overline{KL} = \overline{{}_{34}P_{34}N_0}, \quad \overline{LN_0} = {}^5X_{N_0} - {}^5X_P$$

Die Normale $\mathfrak{n}_4$ ist eine solche Gerade des von den Punkten P_1, N_0, N_2, x_5**) auf gespannten Unterraumes, welche auf P liegt und

$$\mathfrak{n}_4 \perp PN_0, \text{ sowie } \mathfrak{n}_4 \perp PN_2 \text{ erfült.}$$

*) Anstatt X_3 könnte mit Rechnung und Messung direckt auch dargestellt werden, aber die Rechnungen sind sehr weitläufig, wenn die Bestimmung der Normalen von immer höherem Index verkommt.

**) X_5 sei ein Punkt von $\mathbf{x}^{V}$. Die Bilder ${}_{12}X$, ${}_{34}X$ und ${}_{45}X$ von X_5 werden ähnlich wie die entsprechenden Bilder von X_3 konstruiert. (2. b. Abbildung)

Der beliebige Punkt N_4 vom $\mathbf{n}_4$ wurde mit Hilfe des Trieders $P(N_0, N_2, X_5)$ (P ist der Gipfelpunkt des Trieders, N_0, N_2 X_5 sind aber Punkte von je einem Bein) auf der Abbildung 2. c bestimmt. Das Trieder wurde in der Mongeprojektion dargestellt $({}_1X_2 = n_0)$ und die echte Länge der Beine wurde aus den Angaben der 2. Abbildung bestimmt. Es sei auf n_4 der Punkt N_4 beliebig aufgenommen und es sei $S_1 = N_4 X_5 \cap \bar{n}_0$.

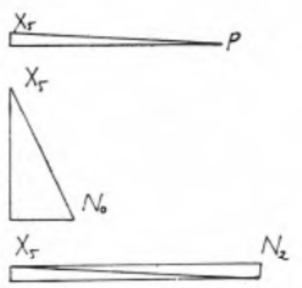

Abb. 2b

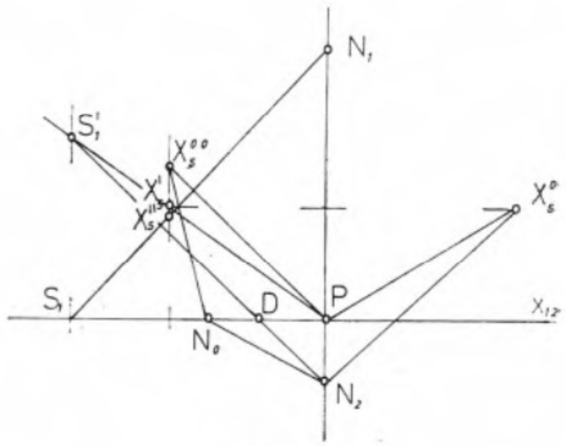

Abb. 2c

Die Bilder des Punktes $D = n_0 \cap \overline{N_2 S_1}$ werden durch $(PN_0 D) = ({}_{12}P\, {}_{12}N_0\, {}_{12}D) = ({}_{34}P\, {}_{34}N_0\, {}_{34}D)$ die Bilder des Punktes S_1 durch $(N_2 D S_1) = ({}_{12}N_2\, {}_{12}D\, {}_{12}S_1) = ({}_{34}N_2\, {}_{34}D\, {}_{34}S_1)$, die Bilder des Punktes N_4 aber durch $(S_1 X_5 N_4) = ({}_{12}S_1\, {}_{12}X_5\, {}_{12}N_4) = ({}_{34}S_1\, {}_{34}X_5\, {}_{34}N_4)$ bestimmt.

Literatur

[1] O. Boruvka, Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien á quatre dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **193**, (1931), 633—634. Paris.

[2] Gyarmathi L., A vetítő térelemek alkalmazása a négydimenziós lineáris tér Maurin-féle leképezésében. *Mat. Lapok* (1954), 253—259.

[3] M. Harant, K teórii hyperplanärnych evolvent krivky v E_p. *Acta Fac. Rerorum Mat. Univ. Comenianae Math.* **2**, (1957).

[4] M. Harant, K neiktorym vztahom medzi krivostami krivky v E_n. *Acta Fac. Rerum Mat.* **1**, (1956), 21—28.

[5] M. Harant, Klinogonálna zobrazovácia metóda v E_4. *Acta Fac. Rerum Mat.* **2**, (1957), 193—217.

[6] M. Harant, O zobrazéni nadkruznie a nadzávitnie v E_4. a v E_5. *Sbornik vysokej skoly dopravnej v Ziline.* (1965).

[7] J. Klima, Deskriptivni geometrie ctyrrozmernéko prostorn. *Sbornik VVT, Brno spis.* **44**, (1938).

[8] Maurin, Lecons de la position pour une projection ortogonal dans E_4; *C. R. Acad. Sci. Paris,* (1947).

[9] P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, I. Teil, *Leipzig,* 1902.

[10] M. Syptak, Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens a p-dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris* **195**, (1932), 298—299.

(Eingegangen Am. 31. December 1970.)