Размерность равномерных пространств в теории непрерывных групп преобразований

С. БУЗАШИ—БОГДЮКЕВИЧ (Дебрецен)

Изучению метризуемых топологических пространств дали новое направление исследования Де-Грота и Нагаты. В их работах n-мерные пространства (при естественных условиях) характеризуются метризуемостью особыми метриками. При этом нульмерный случай описан с помощью неархимедовых метрик (см. например [6], [7], [10], [11], [12]).

Развивая это новое направление, Й. Эрдёш (ERDŐS JENŐ) поставил задачу описания n-мерных метризуемых топологических групп и вообще непрерывных групп преобразований с использованием *инвариантных* особых метрик. Как автор надеется, настоящая статья делает первые шаги к решению этой задачи, указывая (при рассмотрении нульмерного случая) между прочим и на определяющую роль размерности равномерностей групп (теоремы 7 и 10, предложения 3 и 5). Наши исследования связаны с проблемой инвариантной метризуемости факторпространств топологических групп (теорема 4). Рассматриваются аналогичные вопросы, полученные заменой инвариантных особых метрик инвариантными равномерностями (теоремы 2 и 5).

В статье через G обозначается хаусдорфовая топологическая группа, через H её замкнутая подгруппа. Под факторпространством G/H подразумевается множество правых смежных классов, наделённое фактортопологией, а под факторравномерностью G/H—то же множество, наделённое факторравномерностью правой равномерности группы G (случай левой равномерности подчёркивается отдельно). Заметим, что термин „равномерность" употребляется и в смысле равномерного пространства, и в смысле системы всех окружений равномерного пространства.

Приношу искреннюю благодарность Й. Эрдёш за постановку задачи и ценные советы при работе над этой темой.

§ 1. Инвариантные равномерности и метрики на факторпространствах топологических групп

Теорема 1.[1]) *Топология факторпространства G/H совпадает с равномерной топологией факторравномерности левой равномерности группы G относительно G/H.*

---

[1]) Теорема, по существу, известна (см. например [8] стр. 76.), для полноты изложения даём это простое доказательство.

Доказательство. Заметим сначала, что совокупность окружений $g(L_A)$ образует базу факторравномерности $\mathfrak{U}$ левой равномерности группы G относительно G/H (здесь A пробегает все окрестности единицы группы G, окружение L_A определяется формулой $L_A=\{(x, y)|x^{-1}y\in A;\ x, y\in G\}$, а g относит (x, y) к (Hx, Hy)). Действительно, если A произвольная окрестность единицы G, а B такая, что $B^2\subset A$, тогда, как нетрудно проверить, имеет место формула $g(L_B)\circ g(L_B)\subset g(L_A)$. Остальные свойства базы равномерности очевидно выполняются для совокупности всех $g(L_A)$.

Совпадение фактортопологии группы G относительно G/H с топологией, порождённой $\mathfrak{U}$, следует из легко проверяющегося соотношения[2]) $g(L_A)[Hc]=$ $=H(cA)/H$, которое выполняется для любой окрестности A единицы G и для всякого $c\in G$.

Предложение 1. Топология факторпространства G/H не всегда совпадает с равномерной топологией факторравномерности G/H.

Доказательство. Пусть G будет группой преобразований $f(x) = ax+b$ действительной прямой R, где $a, b\in R$; $a\neq 0$. Топологию в G определим с помощью фундаментальной системы окрестностей A_ε единицы G, где $A_\varepsilon =$ $= \{f|f(x) = ax+b;\ |a-1| < \varepsilon;\ |b|<\varepsilon;\ 0<\varepsilon\in R\}$. Если подгруппа H состоит из преобразований $f(x)=ax$ $(a\neq 0)$, то топология факторпространства $G|H$ не совпадает с равномерной топологией факторравномерности G/H, так как последняя является антидискретной, а первая отличается от таковой.

Теорема 2. *Топология факторпространства G/H тогда и только тогда является равномерной топологией некоторой определённой на множестве G/H правоинвариантной*[3]) *равномерности, вес которой не превосходит $\mathfrak{m}$, если H имеет в факторпространстве G/H фундаментальную систему окрестностей симметрического происхождения*[4]), *мощность которой не превосходит $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Если система $G_\alpha=HG_\alpha$ $(\alpha\in\Gamma$, мощность Γ не превосходит $\mathfrak{w})$ симметрических окрестностей единицы G такая, что G_α/H $(\alpha\in\Gamma)$ является фундаментальной системой окрестностей H в факторпространстве G/H, то правоинвариантные окружения $g(R_{G_\alpha})$ образуют базу факторравномерности правой равномерности $\mathfrak{U}$ группы G относительно G/H (здесь α пробегает Γ, $R_{G_\alpha}=\{(x, y)|xy^{-1}\in G_\alpha;\ x, y\in G\}$, а g относит к (x, y) пару (Hx, Hy)). Действительно, для произвольного G_α найдётся такая окрестность W единицы G и такой индекс $\beta\in\Gamma$, для которых выполняются $W^2\subset G_\alpha$ и $G_\beta\subset HW$, и поэтому $G_\beta^2\subset G_\beta(HW)=(G_\beta^{-1}H)W=(HG_\beta)^{-1}W= G_\beta W\subset(HW)W=HW^2\subset HG_\alpha=G_\alpha$. Значит $g(R_{G_\beta})\circ g(R_{G_\beta}) \subset g(R_{G_\alpha})$, так как для произвольных $x, y, z\in G$ в слу-

---

[2]) В случае точки x и окружения U равномерного пространства X множество $U[x]$ определяется формулой $U[x]=\{y|(x, y)\in U;\ y\in X\}$.

[3]) Определённая на множестве G/H равномерность называется правоинвариантной, если она имеет базу, состоящую из таких окружений U, что из $(Hx, Hy)\in U$ следует $(Hxa, Hya)\in U$ для всех $a, x, y\in G$ (такие окружения назовём правоинвариантными).

[4]) Подмножество A множества G/H называем множеством симметрического происхождения, если прообраз A при проэктировании G на G/H является симметрическим множеством в G.

чае $(Hx, Hy)\in g(R_{G_\beta})$, $(Hy, Hz)\in g(R_{G_\beta})$ выполняется $xy^{-1}\in HG_\beta H = G_\beta$ и $yz^{-1}\in G_\beta$, отсюда $xz^{-1}\in G_\alpha$, откуда следует $(Hx, Hz)\in g(R_{G_\alpha})$. Остальные свойства базы равномерности очевидно выполняются для системы $g(R_{G_\alpha})$ $(\alpha\in\Gamma)$, которая таким образом определяет на множестве G/H правоинвариантную равномерность $\mathfrak{U}$, вес которой не превосходит мощности Γ.

Покажем, что топология факторпространства G/H является равномерной топологией равномерности $\mathfrak{U}$. Если A произвольная симметрическая окрестность единицы G, то $g(R_A)[H]=HAH/H$, что не трудно проверить. Значит, для каждого G_α $(\alpha\in\Gamma)$ выполняется формула $g(R_{G_\alpha})[H]=G_\alpha/H$, что и доказывает совпадение рассматриваемых топологий.

Пусть наоборот, топология факторпространства G/H является равномерной топологией некоторой определённой на множестве G/H правоинвариантной равномерности $\mathfrak{U}$, вес которой не превосходит $\mathfrak{m}$. Обозначим через U_α $(\alpha\in\Gamma$, мощность Γ не превышает $\mathfrak{m})$ базу равномерности $\mathfrak{U}$, состоящую из симметрических правоинвариантных окружений. Ясно, что множества $U_\alpha[H]$ $(\alpha\in\Gamma)$ образуют фундаментальную систему окрестностей H в факторпространстве G/H. Покажем, что для всякого $\alpha\in\Gamma$ множество $G_\alpha=\bigcup\{Hx|Hx\in U_\alpha[H]\}$ является симметрическим подмножеством G, т. е. окрестности $U_\alpha[H]$ имеют симметрическое происхождение. Действительно, в случае $y\in G_\alpha$ выполняется $(H, Hy)\in U_\alpha$ и поэтому $(Hy^{-1}, H)\in U_\alpha$, откуда следует $(H, Hy^{-1})\in U_\alpha$, т. е. $y^{-1}\in G_\alpha$.

Теорема 3. *Если топология факторпространства G/H является равномерной топологией некоторой определённой на множестве G/H правоинвариантной равномерности, то последняя совпадает с факторравномерностью G/H.*

Доказательство. Пусть топология факторпространства G/H совпадает с равномерной топологией определённой на G/H правоинвариантной равномерности $\mathfrak{V}$. Тогда H имеет в факторпространстве G/H фундаментальную систему окрестностей симметрического происхождения (по теореме 2). Отсюда следует (принимая во внимание первую часть доказательства теоремы 2), что факторравномерность $\mathfrak{U}$ правой равномерности G относительно G/H также правоинвариатна и порождает топологию факторпространства G/H. Поэтому для произвольного правоинвариантного окружения $U\in\mathfrak{U}$ найдётся такое правоинвариантное $V\in\mathfrak{V}$, что $V[H]\subset U[H]$; в этом случае выполняется и $V\subset U$, в чём легко убедиться. Следовательно, $\mathfrak{V}<\mathfrak{U}$. Подобным образом доказывается выполнение $\mathfrak{V}>\mathfrak{U}$, и поэтому $\mathfrak{V}=\mathfrak{U}$.

Предложение 2. Топология факторпространства G/H не всегда является равномерной топологией некоторой определённой на G/H правоинвариантной равномерности.

Доказательство. Непосредственное следствие предложения 1 и теоремы 3.

Теорема 4.[5]) *Факторпространство G/H тогда и только тогда метризуемо правоинвариантной метрикой, если H имеет в G/H счётную фундаментальную систему окрестностей симметрического происхождения.*

---

[5]) Этот вопрос был затронут, но в общем случае оставлен открытым в [8] (см. там отдел 8.14).

Доказательство. Согласно теореме 2 и метризационной теореме равномерных пространств, топология факторпространства G/H тогда и только тогда является равномерной топологией некоторой метризуемой правоинвариантной равномерности $\mathfrak{U}$, если H имеет в G/H счётную фундаментальную систему окрестностей симметрического происхождения. Применив для состоящей из счётного числа симметрических правоинвариантных окружений базы равномерности $\mathfrak{U}$ метод метризационной леммы (см. [2] стр. 247) можно заключить, что наличие $\mathfrak{U}$ равносильно метризуемости факторпространства G/H правоинвариантной метрикой.

§ 2. Инвариантные нульмерные равномерности и неархимедовые метрики на факторпространствах топологических групп

Теорема 5.[6]) *Топология факторпространства G/H тогда и только тогда является равномерной топологией некоторой определённой на множестве G/H правоинвариантной нульмерной*[7]) *равномерности, вес которой не превосходит $\mathfrak{m}$, если в G имеется такая система содержащих H открытых подгрупп G_α ($\alpha\in\Gamma$, мощность Γ не превосходит $\mathfrak{m}$), что $G_\alpha/H(\alpha\in\Gamma)$ образует фундаментальную систему окрестностей H в факторпространстве G/H.*

Доказательство. Если в G имеется удовлетворяющая условиям теоремы система $G_\alpha(\alpha\in\Gamma)$, то правоинвариантные окружения $U_\alpha=\{(Hg, Hs)|gs^{-1}\in G_\alpha;\ g, s\in G\}$ являются отношениями эквивалентности. Для произвольных $\alpha, \beta\in\Gamma$ найдётся такой индекс $\gamma\in\Gamma$, что $G_\gamma/H\subset(G_\alpha/H)\cap(G_\beta/H)$, поэтому выполняется $G_\gamma\subset G_\alpha\cap G_\beta$, откуда следует $U_\gamma\subset U_\alpha\cap U_\beta$. Этим доказано, что система $U_\alpha\,(\alpha\in\Gamma)$ служит базой для некоторой правоинвариатной равномерности $\mathfrak{U}$, причём, как нетрудно доказывается, $\mathfrak{U}$ является нульмерной, потому что все U_α являются отношениями эквивалентности. Топология факторпространства G/H совпадает с равномерной топологией равномерности $\mathfrak{U}$, т. к. $U_\alpha[H]=G_\alpha/H$ для всех $\alpha\in\Gamma$.

Пусть наоборот, топология факторпространства G/H совпадает с определённой на G/H равномерной топологией правоинвариантной нульмерной равномерности, вес которой не превосходит $\mathfrak{m}$. Тогда не трудно показать, что эта равномерность имеет базу U_α ($\alpha\in\Gamma$, мощность Γ не превышает $\mathfrak{m}$), состоящую из отношений эквивалентности, и базу $V_\alpha\,(\alpha\in\Gamma)$, состоящую из симметрических правоинвариантных окружений. Эти базы можно выбрать так, чтобы для любого $\alpha\in\Gamma$ имело место $V_\alpha\subset U_\alpha$. Теперь докажем, что для всякого $U_\alpha[H]$ найдётся такая содержащая H открытая подгруппа G_α группы G, для которой $G_\alpha/H\subset U_\alpha[H]$. Обозначим через M и соответственно через N прообраз $V_\alpha[H]$ и соответственно $U_\alpha[H]$ при проэктировании G на G/H. Тогда M и N являются окрестностями H в G и выполняется $M\subset N$, покажем, что имеем место даже $MN\subset N$. Действительно, если $a\in M$, $b\in N$, т. е. $Ha\in V_\alpha[H]$, $Hb\in U_\alpha[H]$, то

---

[6]) Утверждение теоремы для случая $H=1$ вытекает из [13] на основании [4].

[7]) Размерность непустого равномерного пространства равна или меньше числа $n\geqq 0$, если каждое его равномерное покрытие имеет равномерное измельчение, кратность которого не превышает $n+1$ (см. [5], [9]).

$(H, Ha)\in V_\alpha$, $(H, Hb)\in U_\alpha$, поэтому $(Hb, Hab)\in V_\alpha$, значит $(H, Hab)\in V_\alpha\circ U_\alpha\subset \subset U_\alpha\circ U_\alpha = U_\alpha$, откуда вытекает $ab\in N$. Из формулы $MN\subset N$ следует справедливость $M^iN\subset N$, а значит $M^i\subset N$ для всякого натурального числа i. Если примем во внимание и выполнение $M^{-1}=M$, то получим, что в топологической группе G для порождённой множеством M открытой подгруппы G_α имеет место $H\subset G_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} M^i\subset N$, значит $G_\alpha/N\subset U_\alpha[H]$ выполняется в G/H.

Теорема 6. *Факторпространство G/H тогда и только тогда метризуемо правоинвариантной неархимедовой*[8]*) метрикой, если в G имеется такая счётная система содержащих H открытых подгрупп G_n ($n=1, 2, \ldots$), что G_n/H ($n=1,2,\ldots$) образуют фундаментальную систему окрестностей H в факторпространстве G/H.*

Доказательство. Если факторпространство G/H метризуемо правоинвариантной неархимедовой метрикой, то определённая этой метрикой равномерность, как не трудно показать, является нульмерной, и поэтому удовлетворяет условиям теоремы 5. Следовательно, существует такая счётная система открытых подгрупп G_n ($n=1, 2, \ldots$), $H\subset G_n\subset G$, что G_n/H ($n=1, 2, \ldots$) образуют фундаментальную систему окрестностей H в факторпространстве G/H.

Пусть наоборот, система окрытых в G подгрупп G_n ($n=1, 2, \ldots$) удовлетворяет условиям теоремы. Можно предположить, что $G_1=G$, $G_n\neq G_m$ при $n\neq m$, $G_{n+1}\subset G_n$ ($n=1, 2, \ldots$). Определим правоинвариантную метрику ϱ в пространстве G/H формулой $\varrho(Hx, Hy)=\dfrac{1}{n}$, если $xy^{-1}\in G_n\setminus G_{n+1}$ и $\varrho(Hx, Hy)=0$, если $Hx=Hy$. Не трудно проверить, что ϱ неархимедовая метрика. Действительно, если $\varrho(Hx, Hy)=\dfrac{1}{n}\leqq\varrho(Hy, Hz)=\dfrac{1}{m}$, то $xz^{-1} = (xy^{-1})\ (yz^{-1})\in G_m^2$, т. е. $\varrho(Hx, Hz)\leqq\dfrac{1}{m}$ (такое неравенство очевидно выполняется и в том случае, когда $\varrho(Hx, Hy)$ или $\varrho(Hy, Hz)$ равны нулю). Топология, порождённая метрикой ϱ, совпадает с топологией факторпространства G/H, т. к. шар вокруг H радиуса $\dfrac{1}{n}$ даёт в точности G_{n+1}/H ($n=1, 2, \ldots$).

Теорема 7. *Факторпрострасво G/H тогда и только тогда метризуемо правоинвариантной неархимедовой метрикой, если оно метризуемо правоинвариантной метрикой и факторравномерность G/H нульмерна.*

Докзательство. Согласно теоремам 5 и 6 топология факторпространства G/H, если оно метризуемо правоинвариантной неархимедовой метрикой, является равномерной топологией некоторой определённой на G/H нульмерной правоинвариантной равномерности, а по теореме 3 эта равномерность совпадает с факторравномерностью G/H.

---

[8]) Метрика ϱ называется неархимедовой, если для любых точек x, y, z пространства выполняется $\varrho(x, z)\leqq\max(\varrho(x, y), \varrho(y, z))$.

Наоборот, предположим, что факторравномерность G/H нульмерна и факторпространство G/H метризуемо правоинвариантной метрикой ϱ. Согласно теореме 3, определённая ϱ равномерность совпадает с факторравномерностью G/H. Таким образом, топология факторпространства G/H является равномерной топологией метризуемой правоинвариантной нульмерной равномерности G/H. Как видим, теоремы 5 и 6 здесь опять применимы, следовательно, факторпространство G/H метризуемо правоинвариантной неархимедовой метрикой.

§ 3. Инвариантная неархимедовая метризация топологических групп

Направленную[9]) систему элементов g_α $(\alpha \in \Gamma)$ (аддитивной, но не обязательно коммутативной) топологической группы назовём *нулевой системой*, если для всякой окрестности U нулевого элемента группы найдётся такой индекс $\alpha_0 \in \Gamma$, что при всяком $\alpha_0 \leqq \alpha$ $(\alpha \in \Gamma)$ выполняется $g_\alpha \in U$.

Мы будем говорить, что направленная система элементов g_α $(\alpha \in \Gamma)$ топологической группы *образует ряд Коши*[10]), если для всякой окрестности U нулевого элемента группы найдётся такой индекс $\alpha_0 \in \Gamma$, что при различных $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Gamma$, $\alpha_0 \leqq \alpha_k$ $(j=1, \dots, k)$ всегда выполняется $g_{\alpha_1} + \dots + g_{\alpha_k} \in U$.

Теорема 8. *Правая равномерность топологической группы G тогда и только тогда нульмерна, если всякая нулевая система элементов в G образует ряд Коши.*

Доказательство. Воспользуемся утверждением теоремы 5 для случая подгруппы H, содержащей лишь нулевой элемент группы G, согласно которому правая равномерность G тогда и только тогда нульмерна, если нулевой элемент G имеет фундаментальную систему окрестностей, состоящую из открытых подгрупп G. Отсюда, во-первых, очевидно, что всякая нулевая система элементов в G образует ряд Коши, если правая равномерность G нульмерна.

Пусть наоборот, правая равномерность топологической группы G не является нульмерной, т. е. нулевой элемент G имеет такую окрестность V, которая не содержит ни одной открытой подгруппы. Если U_α $(\alpha \in \Gamma)$ некоторая фундаментальная система окрестностей нулевого элемента, то, согласно выбору окрестности V, для всякого $\alpha \in \Gamma$ найдутся $g_{(\alpha,1)}, \dots, g_{(\alpha,n_\alpha)} \in U_\alpha$, для которых $g_{(\alpha,1)} + \dots + g_{(\alpha,n_\alpha)} \notin V$. Определим во множестве пар (α, i) отношение направленности так, чтобы $(\alpha, i) \leqq (\beta, j)$ выполнялось при $U_\beta \subset U_\alpha$ для всех $1 \leqq i \leqq n_\alpha$, $1 \leqq j \leqq n_\beta$. Полученная таким образом нулевая система элементов $g_{(\alpha,i)}$ $(\alpha \in \Gamma,\ i=1, 2, \dots, n_\alpha)$ не образует ряда Коши. Действительно, для любой фиксированной пары (α, i) выполняется $(\alpha, i) \leqq (\alpha, j)$ при $j=1, 2, \dots, n_\alpha$, но $g_{(\alpha,1)} + \dots + g_{(\alpha,n_\alpha)} \notin V$.

---

[9]) Система элементов $g_\alpha (\alpha \in \Gamma)$ является направленной, если Γ направленное множество, т. е. в Γ определено такое рефлексивное и транзитивное отношение „$\leqq$", что для любых $\alpha, \beta \in \Gamma$ найдётся $\gamma \in \Gamma$, для которого $\alpha \leqq \gamma$, $\beta \leqq \gamma$.

[10]) Не трудно показать, что числовой ряд тогда и только тогда абсолютно сходящийся, если его члены образуют ряд Коши. Подобное замечание, вообще говоря, не справедливо для метрических групп.

Теорема 9. *Полная справа*[11]) *топологическая группа тогда и только тогда метризуема правоинвариантной неархимедовой метрикой, если она метризуема и члены каждой её нулевой последовательности образуют сходящийся ряд.*

Доказательство. Если полная справа топологическая группа G метризуема правоинвариантной неархимедовой метрикой, то, по теореме 7, правая равномерность G нульмерна. Применив теорему 8 для случая нулевой последовательности рассматриваемой группы G, получим, что члены такой последовательности образуют ряд Коши, следовательно сходящийся ряд.

Пусть наоборот, полную справа метризуемую топологическую группу G нельзя метризовать неархимедовой метрикой. Тогда, опять-таки по теореме 7, правая равномерность G не является нульмерной, следовательно, нулевой элемент G имеет не содержащую никакой открытой подгруппы окрестность V. Если $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ состоящая из симметрических множеств фундаментальная система окрестностей нулевого элемента G, то для всякого U_k $(k=1, 2, \ldots)$ найдутся элементы $g_{(k,1)}, \ldots, g_{(k,n_k)} \in U_k$, для которых $g_{(k,1)}+\cdots+g_{(k,n_k)} \notin V$. Не трудно проверить, что последовательность $g_{(1,1)}, \ldots, g_{(1,n_1)}, g_{(2,1)}, \ldots, g_{(2,n_2)}, \ldots$ является нулевой последовательностью, но бесконечный ряд $g_{(1,1)}+\cdots+$ $+g_{(1,n_1)}+g_{(2,1)}+\cdots+g_{(2,n_2)}+\cdots$ не сходится.

Предложение 3. Для метризуемости полной справа[12]) метрической группы G правоинвариантной неархимедовой метрикой выполнение[13]) $\dim G=0$, вообще говоря, не является достаточным условием (даже в коммутативном сепарабельном случае).

Доказательство. Дадим пример коммутативной сепарабельной полной метрической группы G, для которой выполняется $\dim G=0$, однако которую нельзя метризовать правоинвариантной неархимедовой метрикой.

Пусть G состоит из последовательностей $(a_1, a_2, \ldots)$, где a_k рациональные целые числа и $\frac{|a_k|}{k}$ $(k=1, 2, \ldots)$ нулевая последовательность. Очевидно, что G является топологической группой относительно операции обычного сложения последовательностей и топологии, порождённой метрикой ϱ, которую мы зададим формулой $\varrho(g, h) = \max\limits_k \frac{|a_k-b_k|}{k}$ $(k=1, 2, \ldots)$ для элементов $g=$ $=(a_1, a_2, \ldots)$ и $h=(b_1, b_2, \ldots)$ группы G.

Докажем, что G является полной группой. Если $g_1, \ldots, g_s, \ldots$ последовательность Коши в G, где $g_s=(a_{1s}, a_{2s}, \ldots)$ и $g_{n_1}, g_{n_2}, \ldots$ такая её подпоследовательность, что при $n_k \leqq s$ выполняется $\varrho(g_{n_k}, g_s)<\frac{1}{k}$ $(k=1, 2, \ldots)$, то группа G содержит элемент $g=(a_{1n_1}, a_{2n_2}, \ldots)$, так как $\frac{|a_{sn_s}|}{s}$ $(s=1, 2, \ldots)$ является нулевой

---

[11]) Топологическую группу называем полной справа, если пространство её правой равномерности полно.

[12]) Важность утверждения обеспечивается требованием полноты.

[13]) $\dim G$ и $\operatorname{ind} G$ обозначает соотвественную размерность топологического пространства группы G.

последовательностью. Действительно, если для натурального k индекс r такой, что $\frac{|a_{sn_k}|}{s}<\frac{1}{k}$ выполняется при $r\leqq s$, то для удовлетворяющих условию $\max(n_k, r)<s$ индексов s спаведливо $\frac{|a_{sn_s}|}{s}=\frac{|a_{sn_s}-a_{sn_k}+a_{sn_k}|}{s}\leqq\frac{|a_{sn_s}-a_{sn_k}|}{s}+$ $+\frac{|a_{sn_k}|}{s}<\varrho(g_{n_s}, g_{n_k})+\frac{1}{k}<\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{2}{k}$ (здесь мы приняли во внимание и выполнение $s\leqq n_s$, т. е. $n_k\leqq n_s$). Покажем теперь, что элемент g является пределом последовательности $g_1, \dots, g_s, \dots$. Сначала заметим, что для всякого натурального k выполняется $\varrho(g, g_{n_k})<\frac{1}{k}$. Действительно, если $1\leqq s\leqq k$, то $n_s\leqq n_k$ и поэтому $\varrho(g_{n_s}, g_{n_k})<\frac{1}{s}$, значит $\frac{|a_{sn_s}-a_{sn_k}|}{s}<\frac{1}{s}$, откуда следует $a_{sn_s}=a_{sn_k}$. Если же $k<s$, то $\varrho(g_{n_k}, g_{n_s})<\frac{1}{k}$, значит $\frac{|a_{sn_s}-a_{sn_k}|}{s}<\frac{1}{k}$. Как видим, $\frac{|a_{sn_s}-a_{sn_k}|}{s}<$ $<\frac{1}{k}$ выполняется для всякого натуралного s, откуда и следует $\varrho(g, g_{n_k})<\frac{1}{k}$. После этого очевидно, что g является пределом последовательности $g_1, \dots, g_s, \dots$, т. к. для любого натурального k и $n_k\leqq s$ выполняется $\varrho(g, g_s)\leqq\varrho(g, g_{n_k})+$ $+\varrho(g_{n_k}, g_s)<\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{2}{k}$.

Покажем теперь, что группа G сепарабельна. Пусть H содержит те элементы из G, у которых только конечное число членов последовательности отлично от нуля. Ясно, что H счётное множество. В то же время H всюду плотно в G. Действительно, если $g=(a_1, a_2, \dots)$ произвольный элемент группы G, то шар вокруг g радиусом ε содержит элемент $x=(a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots)\in H$, где индекс N определён так, чтобы $\frac{|a_n|}{n}<\varepsilon$ выполнялось при $N\leqq n$.

В дальнейшем займёмся вопросами размерностей топологического пространства и равномерности группы G. Докажем сначала, что[13]) ind $G=0$ (отсюда следует dim $G=0$). Для этого покажем, что дополнение $G\setminus V_\varepsilon$ к каждому шару V_ε вокруг нулевого элемента группы G радиуса $0<\varepsilon$ является открытым подмножеством в G. Если $g=(a_1, a_2, \dots)\in G\setminus V_\varepsilon$, то $G\setminus V_\varepsilon$ содержит шар вокруг g радиуса $\varrho(0, g)-\varepsilon$. Действительно, пусть $x=(b_1, b_2, \dots)$ будет произвольным злементом этого шара. Тогда для индекса l, где $\frac{|a_l|}{l}=\varrho(0, g)$, выполняется $\varrho(0, g)-\frac{|b_l|}{l}=\frac{|a_l|}{l}-\frac{|b_l|}{l}\leqq\frac{|a_l-b_l|}{l}\leqq\varrho(g, x)<\varrho(0, g)-\varepsilon$. Отсюда следует, что $\varepsilon<\varrho(0, x)$, то есть $x\in G\setminus V_\varepsilon$.

В заключение докажем, что G невозможно метризовать инвариантной неархимедовой метрикой. В смысле теоремы 7 для этого достаточно убедиться в том, что равномерность группы не является нульмерной, а согласно теореме 6 этот вопрос сводится к доказательству того, что нулевой элемент G не имеет состоящей из открытых подгрупп фундаментальной системы окрестностей. Покажем во-первых, что в случае подгруппы N, порождённой произвольным элементом $0 \neq g = (a_1, a_2, \ldots) \in G$, и произвольного действительного $0 < \varepsilon$ найдётся такой элемент $h \in N$, для которого выполняется $\varepsilon < \varrho(0, h)$. Искомый элемент h определяется например формулой $h = ng$, где для натурального n и некоторого отличного от нуля a_k справедливо неравенство $\varepsilon < n \cdot \frac{|a_k|}{k} \leqq \leqq \varrho(0, ng)$. Во-вторых, топология G не дискретна, так как для элемента $g \in G$, у которого $k+1$-вый член последовательности равен 1, а остальные члены 0, выполняется $\varrho(0, g) < \frac{1}{k}$.

Теорема 10. *Топологическая группа тогда и только тогда метризуема двухсторонне инвариантной неархимедовой метрикой, если она метризуема, правая и левая её равномерности совпадают и нульмерны.*

Доказательство. Если топологическая группа G метризуема двухсторонне инвариантной неархимедовой метрикой, то, как легко проверить, шар вокруг единицы G любого радиуса является открытым нормальным делителем группы G. Отсюда следует совпадение правой и левой равномерности в G, а по теореме 7 равномерность группы G является нульмерной.

Пусть наоборот, нульмерные правая и левая равномерности метризуемой топологической группы G совпадают. Не трудно показать, что каждая открытая подгруппа такой группы G содержит открытый нормальный делитель G, откуда с использованием теорем 6 и 7 следует, что единица G имеет состоящую из открытых нормальных делителей группы счётную фундаментальную систему окрестностей. С помощью этой системы определим метрику в G точно так же, как в теореме 6 (дла случая $\mathrm{H} = 1$) с помощью подгрупп. В этом случае получим двухсторонне инвариантную неархимедовую метрику, порождающую данную топологию группы G.

Предложение 4. Для метризуемости топологической группы двухсторонне инвариантной неархимедовой метрикой метризуемость односторонне инвариантной неархимедовой метрикой, вообще говоря, не является достаточным условием (даже в случае счётных групп).

Доказательство. Дадим пример счётной топологической группы G, единица которой имеет состоящую из открытых подгрупп счётную фундаментальную систему окрестностей, но это же условие не выполняется для нормальных делителей, то есть правая и левая равномерности группы G не совпадают. Согласно теоремам 6 и 10 наличие такой группы доказывает наше предложение.

Пусть A будет бесконечным счётным множеством, а G группой тех подстановок A, которые переставляют только кочнечное число элементов. Обозначим через F_B подгруппу G, которая состоит из подстановок, оставляющих на месте все элементы множества B. Если B пробегает все конечные подмножества A, то система подгрупп F_B образует (счётную) фундаментальную систему открытых окрестностей единицы в некоторой топологии группы G. Определённая таким образом топологическая группа G очевидно не является дискретной.

Покажем, что F_B не содержит нетривиальных нормальных делителей G в случае произвольного непустого множества B. Пусть $\alpha \in F_B$ отличная от единицы подстановка, а $c \in A \setminus B$ такой элемент, что $c\alpha \neq c$. Тогда для подстановки $\pi \in G$, для которой $c\pi = b \in B$, выполняется $b(\pi^{-1}\alpha\pi) = (c\alpha)\pi \neq b$, то есть $\pi^{-1}\alpha\pi \notin F_B$.

Предложение 5. Класс топологических групп с нульмерной правой равномерностью невозможно охарактеризовать (в классе всех топологических групп) с помощью топологических свойств их топологических пространств (даже в счётном коммутативном случае).

Доказательство. Определим топологию в аддитивной группе G рациональных целых чисел с помощью фундаментальной системы окрестностей нуля, состоящей из подгрупп, имеющих конечный индекс в G. Топологическая группа G не дискретна, следовательно плотна в себе, и поэтому гомеоморфна топологическому пространству аддитивной группы R рациональных чисел, наделённой привычной топологией (см. [3] на стр 296). По теореме 5 равномерность группы G нульмерна, а равномерность группы R не является нульмерной, в то же время их топологические пространства гомеоморфны.

Группу с определённой на ней равномерностью назовём *равномерной группой*[14]), если групповая операция, как функция двух переменных, и операция образования обратного элемента являются равномерно непрерывными.

Теорема 11. *Равномерная группа тогда и только тогда метризуема*[15]) *двухсторонне инвариантной неархимедовой метрикой, если она метризуема и нульмерна*[16]).

Доказательство. Из известных свойств топологических групп (см. [1] на стр. 231) следует, что равномерная группа G является топологической группой относительно топологии, порождённой равномерностью G, а правая и левая равномерности этой топологической группы G совпадают с данной равномерностью равномерной группы G. По теореме 10 топологическое пространство группы G тогда и только тогда метризуемо двухсторонне инвариантной неархимедовой метрикой, если равномерность G нульмерна. Однако, как не трудно показать, топология топологической группы точно тогда порождается двухсторонне инвариантной метрикой, когда эта же метрика порождает равномерность группы.

Литература

[1] Н. Бурбаки, Общая топология *Москва*, 1958.
[2] Дж. Келли, Общая топология *Москва*, 1968.
[3] К. Куратовский, Топология 1 *Москва*, 1966.
[4] В. Поляков, *Реферативный Журнал* 1969, I, 3А 401.
[5] Ю. Смирнов, О размерности пространств близости, *Мат. Сб.* **38** (1956).

[14]) Введение этого термина даёт возможность проще и короче сформулировать некоторые утверждения (сравни теоремы 10 и 11).

[15]) Под метризацией равномерной группы понимаем метризацию её равномерности.

[16]) Под размерностью равномерной группы подразумеваем размерность её равномерности (см. [5] и [9]).

[6] J. DE GROOT, Non archimedean metrics in topology, *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956).
[7] J. DE GROOT, On a metric that characterizes dimension, *Can. J. Math.* **9** (1957).
[8] E. HEWITT—K. ROSS, Abstract harmonic analysis I Berlin, 1963.
[9] J. ISBELL, Zero-dimensional spaces, *Tohoku Math. J.* **7** (1955).
[10] J. NAGATA, Note on dimension theory for metric spaces, *Fund. Math.* **45** (1958).
[11] J. NAGATA, On a special metric and dimension, *Fund. Math.* **55** (1964).
[12] J. NAGATA, Modern dimension theory *Amsterdam*, 1965.
[13] J.-P OLIVIER, K-structures, *Bull. Sci. Math.* **91** (1967).

(Поступило 22. X. 1970.)