Eine Bemerkung über das Maximum von Summen orthogonaler Funktionen

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

1. Für ein im Intervall (0, 1) orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ bilden wir die Lebesgueschen Funktionen

$$L_N(\{\varphi_n\}; x) = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \qquad (N=1, 2, \ldots).$$

Es sei $\{\lambda_n\}_1^\infty$ eine Folge von Zahlen $\lambda_n \geqq 1$ $(n=1, 2, \ldots)$. Für eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_1^\infty$ setzen wir

$$\|\{a_n\}_1^\infty; \{\lambda_n\}\| = \sup_{\{\varphi_n\}} \int_0^1 \big(\sup_{1 \leqq i \leqq j} |a_i\varphi_i(x) + \cdots + a_j\varphi_j(x)| \big)\, dx,$$

wobei $\sup\limits_{\{\varphi_n\}}$ bedeutet, daß das Supremum für jedes in (0, 1) orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ gebildet wird, für welches

$$\int_0^1 (\sup_N L_N(\{\varphi_n\}; x)/\lambda_N)\, dx \leqq 1 \tag{1}$$

besteht.

In einer vorigen Arbeit ([2], S. 138.) haben wir die untere Abschätzung

$$\|\{a_n\}_1^\infty; \{\lambda_n\}\| \geqq C_1 |a_i| \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

bewiesen. (Im folgenden bezeichnen $C_1, C_2, \ldots$ positive, absolute Konstanten.)

In dieser Note werden wir die folgende, stärkere untere Abschätzung zeigen.

Es gilt $\|\{a_n\}_1^\infty; \{\lambda_n\}\| \geqq C_2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right\}^{1/2}$ *für jede Folge* $\{a_n\}_1^\infty$.

2. Es sei

$$\|\{a_n\}_1^\infty\|^* = \sup_{\{\varphi_n\}} \int_0^1 \big(\sup_{1 \leqq i \leqq j} |a_i\varphi_i(x) + \cdots + a_j\varphi_j(x)| \big)\, dx,$$

wobei $\sup\limits_{\{\varphi_n\}}$ bedeutet, daß das Supremum für jedes in (0, 1) orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ gebildet ist, für welches

$$L_N(\{\varphi_n\}; x) \leqq 1 \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ N=1, 2, \ldots) \tag{2}$$

gilt. Da aus (2) die Ungleichung (1) für jede Folge $\{\lambda_n\}_1^\infty$ mit $\lambda_n \geqq 1$ $(n=1, 2, \ldots)$ folgt, gilt

$$\|\{a_n\}_1^\infty; \{\lambda_n\}\| \geqq \|\{a_n\}_1^\infty\|^*$$

für jede Zahlenfolge $\{a_n\}_1^\infty$. Unsere Behauptung folgt also aus dem folgenden Satz.

Satz. *Für jede Zahlenfolge $\{a_n\}_1^\infty$ besteht*

$$\|\{a_n\}_1^\infty\|^* \geqq C_3 \left(\sum_{n=1}^\infty a_n^2\right)^{1/2}.$$

3. Nach der Definition von $\|\{a_n\}_1^\infty\|^*$ ist es genügend, die Ungleichung

$$\|\{a_n\}_1^N\|^* \geqq C_3 \left(\sum_{n=1}^N a_n^2\right)^{1/2} \tag{3}$$

für jede natürliche Zahl N zu beweisen, wobei $\{a_n\}_1^N$ die Folge $\{a_1, \ldots, a_N, 0, \ldots\}$ bedeutet.

Mit $\chi_n^{(x)}$ $(n=1, 2, \ldots)$ bezeichnen wir die Haarschen Funktionen: es sei also

$$\chi_1(x) \equiv 1 \qquad (0<x<1),$$

$$\chi_k(x) = \chi_m^{(l)}(x) \qquad (k=2^m+l;\ m=0, 1, \ldots;\ 1 \leqq l \leqq 2^m),$$

wobei

$$\chi_m^{(l)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & (x \in ((2k-2)/2^{m+1}, (2k-1)/2^{m+1})), \\ -\sqrt{2^m} & (x \in ((2k-1)/2^{m+1}, 2k/2^{m+1})), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bekanntlich gilt

$$L_N(\{\chi_n\}; x) \leqq 1 \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ N=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

(Siehe z. B. [1], 46—50.)

Zum Beweis von (3) benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. *Ist $\{b_n\}_1^\infty$ eine monoton nichtwachsende Folge von nichtnegativen Zahlen, dann gilt*

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^N b_k \chi_k(x)\right| dx \geqq C_3 \left(\sum_{k=1}^N b_k^2\right)^{1/2} \qquad (N=1, 2, \ldots).$$

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe [3], Bemerkung an der Seite 935.)

4. Beweis des Satzes. Es sei $\{a_n\}_1^\infty$ eine Zahlenfolge und N eine natürliche Zahl. Die Indexfolge $\{1, \ldots, N\}$ zerlegen wir in Indexfolgen $I_1^{(1}, \ldots, I_r^{(1)}, I_1^{(2)}, \ldots$ $\ldots, I_\varrho^{(2)}$ folgenderweise: jede $I_p^{(1)}$ $(1 \leqq p \leqq r)$, bzw. jede $I_q^{(2)}$ $(1 \leqq q \leqq \varrho)$ ist eine im strengen Sinne monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen zwischen 1 und N, zwei verschiedene Indexfolgen haben kein gemeinsames Glied, jede natürliche Zahl zwischen 1 und N gehört zu einer von diesen Indexfolgen, weiterhin ist jede Folge $\{a_n\}_{n\in I_p^{(1)}}$ $(1\leqq p\leqq r)$ monoton nichtwachsend mit positiven Gliedern, bzw. jede Folge $\{a_n\}_{n\in I_q^{(2)}}$ $(1\leqq q\leqq \varrho)$ ist monoton nichtabnehmend mit nichtpositiven Gliedern.

Es seien

$$\lambda_p^2(1)=\sum_{n\in I_p^{(1)}} a_n^2/2\sum_{n\in \bigcup_{s=1}^{r} I_s^{(1)}} a_n^2 \qquad (p=1,\dots,r),$$

$$\lambda_q^2(2)=\sum_{n\in I_q^{(2)}} a_n^2/2\sum_{n\in \bigcup_{t=1}^{\varrho} I_t^{(2)}} a_n^2 \qquad (q=1,\dots,\varrho).$$

Wir setzen weiterhin

$$J_p(1)=\left(\lambda_1^2(1)+\dots+\lambda_{p-1}^2(1),\ \lambda_1^2(1)+\dots+\lambda_p^2(1)\right) \qquad (1\leqq p\leqq r),$$

$$J_q(2)=\left(\lambda_1^2(2)+\dots+\lambda_{q-1}^2(2),\ \lambda_1^2(2)+\dots+\lambda_q^2(2)\right) \qquad (1\leqq q\leqq \varrho).$$

Offensichtlich sind diese Intervalle paarweise disjunkt, und gilt

$$(0,1)=\left(\bigcup_{p-1}^{r} J_p(1)\right)\cup\left(\bigcup_{q=1}^{\varrho} J_q(2)\right).$$

Für eine in $(0, 1)$ definierte Funktion $f(x)$ und für ein Intervall $I=(a,b)\left(\subseteqq(0,1)\right)$ setzen wir

$$f(I;x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) & (a<x<b),\\ 0 & \text{sonst}.\end{cases}$$

Die Länge eines Intervalles I bezeichnen wir mit $|I|$.

Wir definieren ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ folgenderweise. Die Indexfolge $\{N+1, N+2, \dots\}$ zerlegen wir beliebigerweise in paarweise disjunkte Indexfolgen $J_1^{(1)},\dots,J_p^{(1)},J_1^{(2)},\dots,J_q^{(2)}$. Es sei $\varphi_n(x)$ für $n\in I_p^{(1)}\cup J_p^{(1)}$ der Reihe nach mit den Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{J_p(1)}}\chi_1(J_p(1);x),\ \frac{1}{\sqrt{J_p(1)}}\chi_2(J_p(1);x),\ \dots$$

gleich, und es sei $\varphi_n(x)$ für $n\in I_q^{(2)}\cup J_q^{(2)}$ der Reihe nach mit den Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{J_q(2)}}\chi_1(J_q(2);x),\ \frac{1}{\sqrt{J_q(2)}}\chi_2(J_q(2);x),\ \dots$$

gleich. Offensichtlich ist dieses Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ in $(0, 1)$ orthonormiert. Weiterhin, aus (4) ergibt sich durch einfacher Rechnung, daß (2) besteht.

Auf Grund der Definition von $\|\{a_n\}_1^N\|^x$ und des Hilfssatzes erhalten wir weiterhin

$$\|\{a_n\}_1^N\|^x \geqq \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) \right| dx =$$

$$= \sum_{p=1}^r \int_{J_p(1)} \left| \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) \right| dx + \sum_{q=1}^{\varrho} \int_{J_q(2)} \left| \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) \right| dx \geqq$$

$$\geqq C_3 \left\{ \sum_{p=1}^r \sqrt{J_p(1)} \Big(\sum_{n \in I_p^{(1)}} a_n^2 \Big)^{1/2} + \sum_{q=1}^{\varrho} \sqrt{J_q(2)} \Big(\sum_{n \in I_q^{(2)}} a_n^2 \Big)^{1/2} \right\} =$$

$$= C_3 \Big\{ \Big(\sum_{n \in \bigcup_{p=1}^r I_p^{(1)}} a_n^2 \Big)^{1/2} + \Big(\sum_{n \in \bigcup_{q=1}^{\varrho} I_q^{(2)}} a_n^2 \Big)^{1/2} \Big\} \geqq C_3 \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right)^{1/2}.$$

Damit haben wir (3) bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] Alexits, G., Convergence problems of orthogonal series (*Budapest*), 1961.

[2] Tandori, K., Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, III, *Publ. Math.* (*Debrecen*) **12** (1965), 127—157.

[3] *Ульянов, П. Л.*, О рядах по системе Хаара с мономонными коэффициентами, *Изв. Акад. Наук СССР*, **28** (1964), 925—950.

(Eingegangen am 14. Juli 1971.)