Zur translativen Zerlegungsgleichheit n-dimensionaler Polyeder

Von EIKE HERTEL (Jena)

Die Menge der n-dimensionalen (also eigentlichen) nicht notwendig konvexen Polyeder des n-dimensionalen euklidischen Raumes R_n sei $\mathfrak{P}_n$. Unter der (elementargeometrischen) Summe $C = A+B$ zweier Polyeder A und B aus $\mathfrak{P}_n$ werde das Polyeder C aus $\mathfrak{P}_n$ verstanden, das sich aus A und B durch Vereinigung $C = A \cup B$ ergibt, wenn der Durchschnitt $A \cap B$ ganz in einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene E_{n-1} des R_n liegt, also eventuell auch $A \cap B = \emptyset$ gilt. Zwei Polyeder A und B heißen *translativ zerlegungsgleich* ($A \sim B$), wenn sich A und B als endliche Summe paarweise translationsgleicher Teilpolyeder darstellen lassen:

$$A \sim B \overset{\text{def}}{=} \quad A = \sum_1^k A_i \ \&\ B = \sum_1^k B_i \ \&$$

es gibt Translationen t_i aus der Gruppe der

Translationen des R_n mit $t_i(A_i) = B_i$ für $i = 1, 2, \ldots, k$.

Die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die translative Zerlegungsgleichheit wird für $n=2$ in [1] und für $n=3$ in [2] vollständig gelöst. In der vorliegenden Aarbeit soll ein erster Ansatz zur Lösung des allgemeinen Problems (beliebiges n) gewonnen werden. Es werden notwendige Bedingungen für die translative Zerlegungsgleichheit im R_n angegeben, die sich im Fall $n \leqq 3$ als hinreichend und damit als gleichwertig mit den Bedingungen in [1] und [2] erweisen.

1. Grundbegriffe

Der Nachweis der Notwendigkeit von Zerlegungsbedingungen ist besonders einfach, wenn diese Bedingungen die Form von Abbildungen haben, wie sie erklärt werden in der folgenden

Definition 1. Φ heißt translationsinvariante und einfach additive Polyederabbildung in $(G, +)$, wenn gilt:

1. $(G, +)$ ist eine beliebige (additive) abelsche Gruppe.
2. Φ ist eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{P}_n$ in G.
3. $\Phi(A) = \Phi(B)$, wenn A durch eine Translation in B überführt werden kann (Translationsinvarianz).
4. $\Phi(A+B) = \Phi(A) + \Phi(B)$ (einfache Additivität).

Dann gilt nämlich das

Lemma 1. *Wenn zwei Polyeder A und B translativ zerlegungsgleich sind, so muß für jede translationsinvariante und einfach additive Polyederabbildung Φ gelten $\Phi(A) = \Phi(B)$.*

BEWEIS. Sei $A \sim B$, d.h. $A = \sum_1^k A_i$ und $B = \sum_1^k B_i$ mit $t_i(A_i) = B_i$ (t_i Translationen) für $i = 1, 2, \ldots, k$. Daraus folgt für beliebige Gruppe $(G, +)$ und sich darauf beziehende Abbildung Φ nach Forderung 3. in Definition 1.:

$$\Phi(A_i) = \Phi(B_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Durch Summation (in der Gruppe) ergibt sich zunächst

$$\Phi(A_1) + \cdots + \Phi(A_k) = \Phi(B_1) + \cdots + \Phi(B_k).$$

Mit der Forderung 4. aus Definition 1. folgt daraus (im Sinne einer Induktion über k):

$$\Phi(A_1 + \cdots + A_k) = \Phi(B_1 + \cdots + B_k), \quad \text{d.h.} \quad \Phi(A) = \Phi(B), \quad \text{w.z.b.w.}$$

Für das Folgende ist es nützlich, die wichtigsten Eigenschaften der translativen Zerlegungsgleichheit zusammenzustellen, die etwa in [3] hergeleitet werden. Das geschieht mit dem

Lemma 2. *Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. es gilt:*
(1) *Für alle A aus $\mathfrak{P}_n$ folgt $A \sim A$,*
(2) *aus $A \sim B$ folgt $B \sim A$ und*
(3) *aus $A \sim B$ und $B \sim C$ folgt $A \sim C$.*
Ferner gilt der folgende Additionssatz:
(4) *Aus $A_1 \sim B_1$ und $A_2 \sim B_2$ folgt $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$.*
Und es gilt der Subtraktionssatz:
(5) *Aus $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$ und $A_2 \sim B_2$ folgt $A_1 \sim B_1$.*

Für die Gültigkeit des Additionssatzes (4) müßte genauer noch gefordert werden, daß die rechts stehenden Additionen auch ausführbar sind. Im folgenden sollen jedoch alle auftretenden Additionen von Polyedern stets als ausführbar angesehen werden, was immer erreichbar ist durch eine eventuelle Verschiebung (Translation) der beteiligten Polyeder.

2. Die Gruppe $(G_n, +)$

Als Bildbereich einer geeigneten speziellen Polyederabbildung wird nun eine geometrisch interpretierbare Gruppe konstruiert. Dazu wird die Menge $G_n = \mathfrak{P}_n \times \mathfrak{P}_n$ betrachtet mit folgender Schreibweise:

$$x \in G_n \overset{\text{def}}{=} x = (P, Q) \;\&\; P, Q \in \mathfrak{P}_n.$$

Für die Elemente von G_n (geordnete Paare von Polyedern) wird ein Gleichheitsbegriff eingeführt durch die

Definition 2. $x = y \overset{\text{def}}{=} x = (P_x, Q_x) \;\&\; y = (P_y, Q_y) \;\&\; P_x + Q_y \sim P_y + Q_x$.

Ferner wird in G_n eine Addition $+$ erklärt, die wegen der besonderen Bezeichnungsweise der Elemente von G_n nicht mit der elementargeometrischen Addition von Polyedern verwechselt werden kann, durch die

Definition 3.

$$z = x+y \overset{\text{def}}{=} x = (P_x, Q_x) \quad \& \quad y=(P_y, Q_y) \quad \& \quad z = (P_x+P_y, Q_x+Q_y).$$

Dann gilt das folgende

Lemma 3. *Die Gleichheit $=$ ist eine Kongruenzrelation über G_n, d.h. es gilt*

(R) $$x = x,$$

(S) $$x = y \;\rightarrow\; y = x,$$

(T) $$x = y \,\&\, y = z \;\rightarrow\; x = z$$

und

(Ad) $$x = y \,\&\, u = v \;\rightarrow\; x+u = y+v$$

für alle x, y, z, u, v aus G_n.

Beweis. Sei $x=(P_x, Q_x)$, dann folgt aus (1) zunächst $P_x \sim P_x$ und $Q_x \sim Q_x$ und daraus mit (4) $P_x+Q_x \sim P_x+Q_x$, also die Reflexivität (R). Ebenso einfach ist der Nachweis der Symmetrie (S) mittels (2). Zum Beweis der Transitivität (T) sei $x=(P_x, Q_x)$, $y=(P_y, Q_y)$ und $z=(P_z, Q_z)$ mit

$$P_x+Q_y \sim P_y+Q_x \quad \text{bzw.} \quad P_y+Q_z \sim P_z+Q_y.$$

Mit (4) folgt daraus

$$P_x+Q_y+P_y+Q_z \sim P_y+Q_x+P_z+Q_y$$

und schließlich mit (5) auch $P_x+Q_z \sim P_z+Q_x$, also $x=z$. Die Voraussetzungen des Additionssatzes (Ad) seien $x=y$ und $u=v$ mit $P_x+Q_y \sim P_y+Q_x$ bzw. $P_u+Q_v \sim$ $\sim P_v+Q_u$. Nach (4) folgt

$$P_x+P_u+Q_y+Q_v \sim P_y+P_v+Q_x+Q_u$$

und somit $(P_x+P_u, Q_x+Q_u) = (P_y+P_v, Q_y+Q_v)$ bzw. $x+u = y+v$, womit Lemma 3. bewiesen ist.

Das angestrebte Ziel kann nun formuliert werden in dem

Satz 1. *Die Menge G_n stellt bezüglich der mit Definition 3. eingeführten Operation $+$ eine abelsche Gruppe $(G_n, +)$ dar.*

Beweis. a) Daß die Operation $+$ in G_n stets ausführbar ist, ergibt sich aus der obigen Bemerkung über die Ausführbarkeit der elementargeometrischen Addition.

b) Assoziativität und Kommutativität ergeben sich ebenfalls sofort aus den entsprechenden Eigenschaften der Addition von Polyedern.

c) Das Nullelement Θ in G_n wird erklärt durch $\Theta \overset{\text{def}}{=} (P, P)$, wobei P ein beliebiges Polyeder aus $\mathfrak{P}_n$ ist. Es muß nun für jedes $x=(P_x, Q_x)$ aus G_n gezeigt werden, daß $x+\Theta = x$ gilt. Aus (1) folgt zunächst $(P_x+P)+Q_x \sim P_x+(Q_x+P)$, also

$$(P_x+P, Q_x+P) = (P_x, Q_x) \quad \text{bzw.} \quad x+\Theta = x.$$

d) Das zu $x=(P_x, Q_x)$ entgegengesetzte Element $-x$ wird definiert durch $-x \overset{\text{def}}{=} (Q_x, P_x)$, womit sofort folgt $x+(-x) = (P_x+Q_x, P_x+Q_x) = \Theta$ und Satz 1. bewiesen ist.

3. Die Polyederabbildung φ_u

Endlich kann die spezielle Polyederabbildung definiert werden. Dazu wird jetzt die Menge $\mathfrak{P}_{n+1}$ der (eigentlichen) Polyeder $A, B, \ldots$ des $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raumes R_{n+1} betrachtet. Unter $(A; u)$ soll das System aller n-dimensionalen Seitenflächen von A verstanden werden, die den ins „Äußere" von A weisenden Normalenvektor u haben. Dann läßt sich durch

$$\varphi_u(A) \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{(A; u)}, \overline{(A; -u)})$$

eine Abbildung von $\mathfrak{P}_{n+1}$ in G_n erklären, wobei $\overline{(A; u)}$ bzw. $\overline{(A; -u)}$ die orthogonalen Projektionen von $(A; u)$ bzw. $(A; -u)$ auf eine zur Richtung u senkrechte n-dimensionale Hyperebene E_u des R_{n+1} sind und sich bei dieser Projektion eventuell überlappende Teilseitenflächen des Systems $(A; u)$ und $(A; -u)$ in E_u „auseinandergeschoben" werden, so daß also $\overline{(A; u)} + \overline{(A; -u)}$ ein in E_u eigentliches n-dimensionales Polyeder ist, dessen Inhalt (n-dimensionales Volumen) gleich der Summe der Inhalte von $(A; u)$ und $(A; -u)$ ist. Ferner soll zu $\mathfrak{P}_n$ das „leere Polyeder" $\emptyset$ gehören, so daß z. B. für eine nicht vorhandene Seitenfläche von A mit der Normalen $-u$ die Abbildung $\varphi_u(A) = ((A; u), \emptyset)$ gesetzt werden kann. Schließlich sollen zur Vereinfachung im weiteren die Querstriche von $\overline{(A; u)}$, welche die Projektion andeuten, weggelassen werden, da Verwechslungen mit den Originalsystemen $(A; u)$ in den auftretenden Beziehungen nicht möglich sind. Die Eigenschaften der Abbildung φ_u lassen sich zusammenfassen in dem folgenden

Satz 2. *φ_u ist für alle Richtungen u des R_{n+1} eine Polyederabbildung von $\mathfrak{P}_{n+1}$ in $(G_n, +)$ im Sinne der Definition 1., d.h. φ_u ist insbesondere translationsinvariant und einfach additiv.*

Beweis. 1. $(G_n, +)$ ist nach Satz 1. eine abelsche Gruppe.

2. φ_u ist — unter Berücksichtigung des in G_n eingeführten Gleichheitsbegriffes — eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{P}_{n+1}$ in G_n.

3. Wenn es eine Translation t gibt mit $t(A) = B$, so gilt auch $t(A; u) = (B; u)$ und $t(A; -u) = (B; -u)$, woraus sich $(A; u) + (B; -u) \sim (B; u) + (A; -u)$ und somit $((A; u), (A; -u)) = ((B; u), (B; -u))$ bzw. $\varphi_u(A) = \varphi_u(B)$ ergibt.

4. Sei $C = A + B$ mit $(A; u) \cap (B; -u) = D_+$ und $(A; -u) \cap (B; u) = D_-$, wobei D_+ bzw. D_- entweder eigentliche n-dimensionale Polyeder sein sollen oder (sonst) gleich $\emptyset$ gesetzt werden können. Der Teil des Seitenflächensystems $(A; u)$, der einen Beitrag zum System $(C; u)$ liefert, sei $(A; u)'$, so daß also

$$(A; u)' + D_+ = (A; u) \quad \text{und analog} \quad (A; -u)' + D_- = (A; -u),$$

$$(B; u)' + D_- = (B; u), \quad (B; -u)' + D_+ = (B; -u),$$

$$(C; u) = (A; u)' + (B; u)' \quad \text{bzw.} \quad (C; -u) = (A; -u)' + (B; -u)'$$

wird. Somit ist

$$\varphi_u(A) = ((A; u), (A; -u)) = ((A; u)' + D_+, (A; -u)' + D_-),$$

$$\varphi_u(B) = ((B; u), (B; -u)) = ((B; u)' + D_-, (B; -u)' + D_+)$$

und

$$\varphi_u(A)+\varphi_u(B) = ((A;u)'+(B;u)'+D_+ +D_-, (A;-u)'+(B;-u)'+D_+ +D_-) =$$
$$= ((A;u)'+(B;u)', (A;-u)'+(B;-u)')+\Theta = ((C;u),(C;-u)),$$

also $\varphi_u(A)+\varphi_u(B) = \varphi_u(A+B)$. φ_u erfüllt folglich alle Forderungen von Definition 1., und Satz 2. ist bewiesen. Unter Berücksichtigung vom Lemma 1. ergibt sich als Korollar zu Satz 2. unmittelbar der für $n=1, 2, \dots$ gültige

Satz 3. *Notwendig für die translative Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder des R_{n+1} ist die Gleichheit ihrer Bilder bezüglich der Abbildungen φ_u für alle Richtungen u:*

$$A, B \in \mathfrak{P}_{n+1} \ \& \ A \sim B \ \rightarrow \ \varphi_u(A) = \varphi_u(B) \quad \textit{für alle} \quad u.$$

4. Die Polyederabbildungen F_i

Nun soll aus der speziellen Abbildung φ_u ein System von Polyederabbildungen F_i konstruiert werden. Die F_i erweisen sich als translationsinvariante und einfach additive Abbildungen von $\mathfrak{P}_{n+1}$ in die additive Gruppe der reellen Zahlen — F_i sind über $\mathfrak{P}_{n+1}$ erklärte Polyederfunktionale. Dazu werden zwei Polyeder A und B betrachtet mit $\varphi_{u_1}(A)=\varphi_{u_1}(B)$, d.h.

$$(A;u_1)+(B;-u_1) \sim (B;u_1)+(A;-u_1). \tag{6}$$

Berücksichtigt man die Tatsache, daß aus der Zerlegungsgleichheit die Inhaltsgleichheit folgt, ergibt sich aus (6)

$$V_n((A;u_1)+(B;-u_1)) = V_n((B;u_1)+(A;-u_1)),$$

wo V_n dan n-dimensionale Volumen bedeutet. Da V_n natürlich selbst ein translationsinvariantes und insbesondere einfach additives Polyederfunktional ist, gilt also auch

$$V_n(A;u_1)+V_n(B;-u_1) = V_n(B;u_1)+V_n(A;-u_1) \quad \text{bzw.}$$

$$V_n(A;u_1)-V_n(A;-u_1) = V_n(B;u_1)-V_n(B;-u_1). \tag{7}$$

Wird $V_n(A;u_1)-V_n(A;-u_1) = F_n(A)$ gesetzt, so ist mit F_n ein erstes Polyederfunktional der gewünschten Art gefunden, und aus $\varphi_{u_1}(A)=\varphi_{u_1}(B)$ folgt mit (7) die Bedingung $F_n(A)=F_n(B)$. Daß F_n eine eindeutige und translationsinvariante Abbildung von $\mathfrak{P}_{n+1}$ in der reellen Zahlen darstellt, liegt auf der Hand. Zum Beweis der Additivität von F_n sei $C = A+B$, also $\varphi_{u_1}(C) = \varphi_{u_1}(A+B) = \varphi_{u_1}(A)+$ $+\varphi_{u_1}(B)$, d.h.

$$((C;u_1),(C;-u_1)) = ((A;u_1)+(B;u_1), (A;-u_1)+(B;-u_1)) \quad \text{bzw.}$$

$$(C;u_1)+(A;-u_1)+(B;-u_1) \sim (A;u_1)+(B;u_1)+(C;-u_1).$$

Daraus folgt wieder die Volumengleichheit

$$V_n(C;u_1)+V_n(A;-u_1)+V_n(B;-u_1) = V_n(A;u_1)+V_n(B;u_1)+V_n(C;-u_1) \quad \text{bzw.}$$

$$V_n(C;u_1)-V_n(C;-u_1) = V_n(A;u_1)-V_n(A;-u_1)+V_n(B;u_1)-V_n(B;-u_1),$$

also auch

$$F_n(C) = F_n(A+B) = F_n(A)+F_n(B), \quad \text{w.z.b.w.}$$

Um ein weiteres Funktional dieser Art zu gewinnen, werde die aus $\varphi_{u_1}(A)= =\varphi_{u_1}(B)$ folgende Beziehung (6) benutzt. Für die in (6) eingehenden n-dimensionalen Polyeder des gemeinsamen Trägerraumes E_{u_1} wird nun Satz 3. sinngemäß angewandt, d.h. aus (6) folgt notwendig

$$\varphi_{u_2}\big((A;u_1)+(B;-u_1)\big) = \varphi_{u_2}\big((B;u_1)+(A;-u_1)\big) \quad \text{bzw.}$$

$$\varphi_{u_2}(A;u_1)+\varphi_{u_2}(B;-u_1) = \varphi_{u_2}(B;u_1)+\varphi_{u_2}(A;-u_1) \quad \text{bzw.}$$

$$(8) \qquad (A;u_1,u_2)+(A;-u_1,-u_2)+(B;-u_1,u_2)+(B;u_1,-u_2)\sim$$
$$\sim(B;u_1,u_2)+(B;-u_1,-u_2)+(A;-u_1,u_2)+(A;u_1,-u_2).$$

Dabei bedeutet φ_{u_2} die Polyederabbildung von $\mathfrak{P}_n$ in $(G_{n-1},+)$ und $(A;u_1,u_2)$ das System aller $(n-1)$-dimensionalen Seitenflächen des n-dimensionalen Polyeders $(A;u_1)$ mit dem ins „Äußere" von $(A;u_1)$ weisenden Normalenvektor u_2, bezogen auf den Trägerraum E_{u_1}, d.h. die Richtung u_2 ist orthogonal zu u_1. $(A;u_1,u_2)$ kann auch als das durch u_1 und u_2 bestimmte System $(n-1)$-dimensionaler Kanten von A aufgefaßt werden. Aus (8) folgt wieder die (jetzt $(n-1)$-dimensionale) Volumengleichheit der beteiligten Polyeder. Unter Beachtung der Additivität von V_{n-1} ergibt sich nach geeigneter Umstellung

$$(9) \quad V_{n-1}(A;u_1,u_2)-V_{n-1}(A;u_1,-u_2)+V_{n-1}(A;-u_1,-u_2)-V_{n-1}(A;-u_1,u_2)=$$
$$=V_{n-1}(B;u_1,u_2)-V_{n-1}(B;u_1,-u_2)+V_{n-1}(B;-u_1,-u_2)-V_{n-1}(B;-u_1,u_2).$$

Wird etwa die linke Seite der Gleichung (9) gleich $F_{n-1}(A)$ gesetzt, so ist durch diesen Ansatz ein neues Polyederfunktional gefunden, dessen Translationsinvarianz trivial ist und dessen Additivität sich in gleicher Weise zeigen läßt wie die Additivität von F_n. Aus $\varphi_{u_1}(A)=\varphi_{u_1}(B)$ folgt nach (9) also letztlich auch $F_{n-1}(A)= =F_{n-1}(B)$.

In der angegebenen Art fortschreitend sei schließlich aus einer (6) bzw. (8) entsprechenden Relation

$$(10) \qquad \sum(A;\varepsilon_1'u_1,\ldots,\varepsilon_{k+1}'u_{k+1})+\sum(B;\varepsilon_1''u_1,\ldots,\varepsilon_{k+1}''u_{k+1})\sim$$
$$\sim\sum(B;\varepsilon_1'u_1,\ldots,\varepsilon_{k+1}''u_{k+1})+\sum(A;\varepsilon_1''u_1,\ldots,\varepsilon_{k+1}''u_{k+1})$$

die der Gleichung (7) bzw. (9) entsprechende Beziehung

$$(11) \qquad \sum\varepsilon_1\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{k+1}\,V_{n-k}(A;\varepsilon_1u_1,\ldots,\varepsilon_{k+1}u_{k+1})=$$
$$=\sum\varepsilon_1\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{k+1}\,V_{n-k}(B;\varepsilon_1u_1,\ldots,\varepsilon_{k+1}u_{k+1})$$

gewonnen. Dabei soll in (10) über alle Vorzeichenkombinationen $\varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_{k+1}'$ summiert werden mit $\varepsilon_1'\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{k+1}'=1$ bzw. über $\varepsilon_1'',\ldots,\varepsilon_{k+1}''$ mit $\varepsilon_1''\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{h+1}''=-1$, in (11(

wird jeweils über sämtliche 2^{k+1} Vorzeichenkombinationen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}$ summiert ($\varepsilon_i', \varepsilon_j'', \varepsilon_l = \pm 1$). Mit

$$F_{n-k}(A) = \sum \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_{k+1} V_{n-k}(A; \varepsilon_1 u_1, \dots, \varepsilon_{k+1} u_{k+1})$$

liege also wieder ein translationsinvariantes und einfach additives Polyederfunktional F_{n-k} vor, so daß aus $\varphi_{u_1}(A) = \varphi_{u_1}(B)$ die Beziehung $F_{n-k}(A) = F_{n-k}(B)$ folgt. Die in F_{n-k} auftretenden Richtungen $u_1, \dots, u_{k+1}$ sind paarweise orthogonal, d.h. $(A; \varepsilon_1 u_1, \dots, \varepsilon_{k+1} u_{k+1})$ ist das System aller $(n-k)$-dimensionalen Seitenflächen des $(n-k+1)$-dimensionalen Polyeders $(A; \varepsilon_1 u_1, \dots, \varepsilon_k u_k)$ mit dem ins Äußere von $(A; \varepsilon_1 u_1, \dots, \varepsilon_k u_k)$ weisenden Normalenvektor $\varepsilon_{k+1} u_{k+1}$. Ist keine solche Seitenfläche vorhanden, so soll natürlich $V_{n-k}(A; \varepsilon_1 u_1, \dots, \varepsilon_{k+1} u_{k+1}) = 0$ sein.

Ganz analog der Definition von F_{n-1} läßt sich (Induktionsschluß) aus (10) durch Anwendung der Polyederabbildung $\varphi_{u_{k+2}}$ (von $\mathfrak{P}_{n-k}$ in G_{n-k-1}) das Funktional F_{n-k-1} gewinnen, so daß sich schließlich als letztes ein auf die eindimensionalen Kanten bezogenes Funktional F_1 ergibt mit

$$F_1(A) = \sum \varepsilon \cdot \dots \cdot \varepsilon_n V_1(A; \varepsilon_1 u_1, \dots, \varepsilon_n u_n).$$

Das damit gewonnene Ergebnis soll nun formuliert werden in dem folgenden

Satz 4. *Für zwei Polyeder A und B aus $\mathfrak{P}_{n+1}$ gilt: Aus $\varphi_u(A) = \varphi_u(B)$ für alle Richtungen u folgt $F_{n-k}(A) = F_{n-k}(B)$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ bezüglich aller Systeme paarweise orthogonaler Richtungen $u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$.*

Für Polygone und für Polyeder des gewöhnlichen Raumes ist die Umkehrung von Satz 4. leicht nachweisbar, d.h. für A, B aus $\mathfrak{P}_3$ gilt etwa:

$$\varphi_u(A) = \varphi_u(B) \text{ für alle } u \quad \leftrightarrow \quad F_2(A) = F_2(B) \;\&\; F_1(A) = F_1(B)$$

(bzgl. aller orthogonalen Richtungen u_1, u_2).

Somit kann nach dem Ergebnis in [2] die Frage nach Bedingungen für die translative Zerlegungsgleichheit von Polyedern im gewöhnlichen Raum auch beantwortet werden in Form von

Satz 5. *Zwei Polyeder A und B des 3-dimensionalen Raumes sind genau dann translativ zerlegungsgleich, wenn gilt $V_3(A) = V_3(B)$ und $\varphi_u(A) = \varphi_u(B)$ für alle Richtungen u.*

Literatur

[1] H. Hadwiger—P. Glur, Zerlegungsgleichheit ebener Polygone, *Elemente Math.* **6** (1951), 97—106.

[2] H. Hadwiger, Translative Zerlegunsgleichheit der Polyeder der gewöhnlichen Raumes, *J. Reine Angew. Math.* **233** (1968), 200—212.

[3] H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, *Berlin—Göttingen—Heidelberg* 1957.

(Eingegangen am 28 Mai 1971.)