Ein Vollständigkeitskriterium bis auf eine gewise Äquivalenzrelation für eine verallgemeinerte Postsche Algebra

Von G. N. BLOCHINA (z. Zt. Rostock), W. B. KUDRJAVCEV (z. Zt. Rostock), G. BUROSCH (Rostock)

In der vorliegenden Arbeit werden die in den Arbeiten [1], [2] begonnen Untersuchungen verallgemeinerter POSTscher Algebren fortgesetzt. Im Unterschied zu den genannten Arbeiten wird hier eine Algebra $\mathfrak{P}_\Sigma$, $\Sigma=(\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\})$ betrachtet. Die Elemente dieser Algebra sind alle diejenigen Funktionen, die von drei Arten von Variablen aus den Mengen $X=\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $Y=\{y_1, y_2, \ldots\}$, $Z=\{z_1, z_2, \ldots\}$ abhängen, wobei die Variablen x_i, y_j bzw. z_k Werte aus $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$ bzw. $\{1, 2\}$ annehmen, jede Funktion ebenfalls Werte aus nur einer dieser Mengen annimmt und voneinander verschiedene Funktionen Werte in voneinander verschiedenen der drei Mengen annehmen können.

In der Menge aller Untermengen aus $\mathfrak{P}_\Sigma$ wird eine Äquivalenzrelation eingeführt, indem man Teilmengen äquivalent nennt, wenn sie bis auf Umnumerierung der Variablen ein und dieselben Funktionen von einer Veränderlichen enthalten. Ein System $\mathfrak{N}$ von abgeschlossenen Klassen aus $\mathfrak{P}_\Sigma$ stellt ein Vollständigkeitskriterium für eine vorgegebene Äquivalenzklasse $\mathfrak{A}$ dar, wenn eine beliebige Menge aus der Klasse $\mathfrak{A}$ dann und nur dann vollständig in $\mathfrak{P}_\Sigma$ ist, wenn sie in keiner Klasse des Systems $\mathfrak{N}$ als Teilmenge enthalten ist.

Das grundlegende Resultat dieser Arbeit besteht in folgendem: es wird eine Menge $\mathfrak{U}$ gebildet, die aus der Klasse L aller linearen Funktionen und allen denjenigen fastvollständigen Klassen aus $\mathfrak{P}_\Sigma$ besteht, die Invarianzklasse einer gewissen abgeschlossenen Menge von Funktionen einer Variablen sind, und das Problem gelöst, für welche Äquivalenzklassen $\mathfrak{A}$ die Menge U ein Vollständigkeitskriterium liefert.

Die betrachtete Aufgabenstellung verallgemeinert das bekannte Vorgehen von KOLMOGOROFF und SALOMAA, welche die Vollständigkeit von solchen Mengen der zwei-, bzw. k-wertigen Logik untersuchten, die sämtliche Konstanten bzw. die Permutationsgruppe der k Elemente enthalten ([3], [4]). Aus unserem Hauptresultat ergibt sich insbesondere als eine leichte Folgerung die Lösung der erwähnten Aufgabenstellungen von Kolmogoroff und Salomaa für die Algebra $\mathfrak{P}_\Sigma$. Es ist zu bemerken, daß die von uns betrachtete Aufgabe nicht äquivalent zur Bestimmung aller fastvollständigen Klassen aus $\mathfrak{P}_\Sigma$ ist, genauer daß in der Struktur $\mathfrak{P}_\Sigma$ im Unterschied zu der k-wertigen Logik und den Algebren $\mathfrak{P}$, $\overline{\mathfrak{P}}$ aus den Arbeiten [1], [2] fastvollständige, von L verschiedene Klassen existieren, die nicht Invarianzklasse einer abgeschlossenen Menge von Funktionen von einer Variablen sind. Das bedeutet einen wesentlichen Unterschied zwischen $\mathfrak{P}_\Sigma$ und den anderen angegebenen Algebren, da in letzteren die allgemeine Lösung der Vollständigkeitsaufgabe gleichwertig mit der Bestimmung der fastvollständigen Klassen vom Typ L und aller derjenigen fastvollständigen Klassen mit der genannten Invarianzeigenschaft ist. Unsere Überlegungen basieren auf den Arbeiten [1], [2], [5], [6]. Die im folgenden nicht definierten Begriffe werden sinngemäß dort erklärt.

§ 1. Grundbegriffe und Resultate

Seien mit A_1, A_2 bzw. A_3 die Mengen $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$ bzw. $\{1, 2\}$ bezeichnet und drei abzählbare Alphabete $X=\{x_1, x_2, \dots\}$, $Y=\{y_1, y_2, \dots\}$, $Z=\{z_1, z_2, \dots\}$ betrachtet, für die die Variablen x_i, y_j bzw. z_k Werte aus A_1, A_2 bzw. A_3 annehmen. Die Menge aller Funktionen $f(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_t, z_1, \dots, z_u)$, die Werte in genau einer der drei Mengen A_1, A_2 oder A_3 annehmen bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_\Sigma$, wobei $\Sigma=\{A_1, A_2, A_3\}$ gesetzt ist. Danach besteht also $\mathfrak{P}_\Sigma$ aus Funktionen, die Werte in A_1, A_2 oder A_3 annehmen. Alle hier im weiteren nicht definierten Begriffe werden in Analogie zu denen aus der Arbeit [1] eingeführt.

Für $M \subseteq \mathfrak{P}_\Sigma$ bezeichne $M^{(1)}$ die Teilmenge aller Funktionen aus M, die von höchstens einer Veränderlichen abhängen, und bedeute $[M^{(1)}]_{\text{Ä}}$ die Menge aller Funktionen, die aus Funktionen der Menge $M^{(1)}$ durch Umnumerierung der Veränderlichen hervorgehen. Wir sagen, daß die Mengen $M_1, M_2 \subseteq \mathfrak{P}_\Sigma$ äquivalent sind, wenn $[M_1^{(1)}]_{\text{Ä}}=[M_2^{(1)}]_{\text{Ä}}$ ist.

Wir werden mit $\mathfrak{A}(M)$ die Klasse aller zu $M \subseteq \mathfrak{P}_\Sigma$ äquivalenten Mengen aus $\mathfrak{P}_\Sigma$ bezeichnen.

Seien $N_1, N_2, \dots, N_v$ abgeschlossene echte Teilmengen von $\mathfrak{P}_\Sigma$. Wir sagen, das System $\mathfrak{N}$ dieser Teilmengen stellt ein Vollständigkeitskriterium für die Äquivalenzklasse $\mathfrak{A}$ dar, wenn ein beliebiges Element der Klasse $\mathfrak{A}$ genau dann vollständig ist, wenn es in keinem Element der Menge $\mathfrak{N}$ als Teilmenge enthalten ist. Die Menge aller Äquivalenzklassen, für die das System $\mathfrak{N}$ ein Vollständigkeitskriterium darstellt, nennen wir den Wirkungsbereich des Systems $\mathfrak{N}$.

Eine Menge $M \subseteq \mathfrak{P}_\Sigma^{(1)}$ von Funktionen ein und derselben Veränderlichen v nennen wir regulär, wenn $v \in M$, für jede Menge A_i, $i=1, 2, 3$ gilt $M^{A_i} \neq \emptyset$ wenn jede in $[M]$ enthaltene Funktion $f(v)$ auch in M liegt.

Tabelle 1

x	0	1	2	x	$\bar{x}$	e_1	e_2	e_3	e_4
0	0	1	2	0	1	0	2	1	2
1	0	1	2	1	0	2	0	2	1

y	y	$\bar{y}$	e_5	e_6	e_7	e_8
0	0	2	0	1	1	2
2	2	0	1	0	2	1

z	z	$\bar{z}$	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
1	1	2	0	1	0	2
2	2	1	1	0	2	0

Wir sagen, eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t, z_1, \ldots, z_u)$ **läßt die reguläre Menge** M **invariant**, wenn für beliebige zulässige Funktionen g_i, h_j, k_l, $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, t\}; l \in \{1, \ldots, u\}$ aus M auch $f(g_1, \ldots, g_s, h_1, \ldots, h_t, k_1, \ldots, k_u)$ in M liegt.

Die Klasse aller Funktionen, die die reguläre Menge M invariant lassen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}(M)$. Man sieht unschwer, daß $[\mathfrak{U}(M)] = \mathfrak{U}(M)$ ist und, falls M von der Menge aller Funktionen die von v abhängen, verschieden ist, gilt $\mathfrak{U}(M) \neq \neq \mathfrak{P}_\Sigma$. Wir definieren mit Hilfe der folgenden Tabelle die Funktionen einer Veränderlichen in $\mathfrak{P}_\Sigma$.

Wir zählen einige Familien von abgeschlossenen Klassen auf. Dabei nehmen wir stets an, daß die entsprechende Menge $\mathfrak{U}(M)$ definiert, d.h. M ein reguläres System ist.

Die Familie S_1 besteht aus den Klassen

$$U_1 = U(\{0, 1, x, \bar{x}\}),\ U_2 = U(\{0, 2, y, \bar{y}\}),\ U_3 = U(\{1, 2, z, \bar{z}\}).$$

Die Familie S_2 besteht aus den Klassen

$$U_4 = U(\{x, e_1, e_3\}),\ U_5 = U(\{x, e_1, e_4\}),\ U_6 = U(\{x, e_2, e_3\}),$$
$$U_7 = U(\{x, e_2, e_4\}).$$

Die Familie S_3 besteht aus den Klassen

$$U_8 = U(\{y, e_5, e_6, e_8\}),\ U_9 = U(\{x, e_1, e_2, e_3\}),\ U_{10} = U(\{x, e_2, e_3, e_4\}).$$

Die Familie S_4 besteht aus

$$U_{11} = U(\{x, e_1, e_2, e_3, e_4\}),\ U_{12} = U(\{y, e_5, e_6, e_7, e_8\}),$$
$$U_{13} = U(\{z, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}).$$

Die Familie S_5 besteht aus

$$U_{14} = U(\{x, \bar{x}, e_1, e_2, e_3, e_4\}).$$

Die Familie S_6 besteht aus

$$U_{15} = U(\{0, 1, 2, x, \bar{x}\}),\ U_{16} = U(\{0, 1, 2, y, \bar{y}\}),\ U_{17} = U(\{0, 1, 2, z, \bar{z}\}).$$

Die Familie S_7 besteht aus

$$U_{18} = U(\{0, 1, 2, x, e_1, e_3\}),\ U_{19} = U(\{0, 1, 2, x, e_1, e_4\}),$$
$$U_{20} = U(\{0, 1, 2, x, e_2, e_3\}),\ U_{21} = U(\{0, 1, 2, x, e_2, e_4\}).$$

Die Familie S_8 besteht aus

$$U_{22} = U(\{0, 1, 2, x, \bar{x}, e_1, e_2\}),\ U_{23} = U(\{0, 1, 2, x, \bar{x}, e_3, e_4\}),$$
$$U_{24} = U(\{0, 1, 2, y, \bar{y}, e_7, e_8\}).$$

Die Familie S_9 besteht aus

$$U_{25} = U(\{0, z\}),\ U_{26} = U(\{1, y\}),\ U_{27} = U(\{2, x\}).$$

Die Familie S_{10} besteht aus

$$U_{28}=U(\{0, z, e_9\}),\ U_{29}=U(\{0, z, e_{12}\}),\ U_{30}=U(\{1, y, e_6\}),$$
$$U_{31}=U(\{1, y, e_8\}),\ U_{32}=U(\{2, x, e_2\}),\ U_{33}=U(\{2, x, e_3\}).$$

Die Familie S_{11} besteht aus

$$U_{34}=U(\{0, z, \bar{z}\}),\ U_{35}=U(\{1, y, \bar{y}\}),\ U_{36}=U(\{2, x, \bar{x}\}).$$

Die Familie S_{12} besteht aus

$$U_{37}=U(\{0, z, e_9, e_{11}\}),\ U_{38}=U(\{0, z, e_9, e_{12}\}),\ U_{39}=U(\{0, z, e_{10}, e_{12}\}),$$
$$U_{40}=U(\{1, y, e_5, e_8\}),\ U_{41}=U(\{1, y, e_6, e_7\}),\ U_{42}=U(\{1, y, e_6, e_8\}),$$
$$U_{43}=U(\{2, x, e_1, e_3\}),\ U_{44}=U(\{2, x, e_2, e_3\}),\ U_{45}=U(\{2, x, e_2, e_4\}).$$

Die Familie S_{13} besteht aus

$$U_{46}=U(\{0, z, \bar{z}, e_9, e_{10}\}),\ U_{47}=U(\{0, z, \bar{z}, e_{11}, e_{12}\}),\ U_{48}=U(\{1, y, \bar{y}, e_5, e_6\}),$$
$$U_{49}=U(\{1, y, \bar{y}, e_7, e_8\}),\ U_{50}=U(\{2, x, \bar{x}, e_1, e_2\}),\ U_{51}=U(\{2, x, \bar{x}, e_3, e_4\}).$$

Die Familie S_{14} besteht aus

$$U_{52}=U(\{0, z, e_9, e_{11}, e_{12}\}),\ U_{53}=U(\{0, z, e_9, e_{10}, e_{12}\}),$$
$$U_{54}=U(\{1, y, e_6, e_7, e_8\}),\ U_{55}=U(\{1, y, e_5, e_6, e_8\}),$$
$$U_{56}=U(\{2, x, e_2, e_3, e_4\}),\ U_{57}=U(\{2, x, e_1, e_2, e_3\}).$$

Die Familie S_{15} besteht aus

$$U_{58}=U(\{0, z, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}),\ U_{59}=U(\{1, y, e_5, e_6, e_7, e_8\}),$$
$$U_{60}=U(\{2, x, e_1, e_2, e_3, e_4\}).$$

Die Definition von linearen Funktionen wird analog wie in der Arbeit [1] vorgenommen.

Die Familie S_{16} besteht aus der Menge L aller linearen Funktionen.

Möge $\mathfrak{U}$ die Menge $U_1, \ldots, U_{61}$ bedeuten.

Wir betrachten folgende Mengen, die aus gewissen Funktionen von x, y beziehungsweise z bestehen.

$$F_1=\{e_1, e_2, e_5, e_6, \bar{x}, \bar{y}, x, y, z\},$$
$$F_2=\{e_7, e_8, e_{11}, e_{12}, \bar{y}, \bar{z}, x, y, z\},$$
$$F_3=\{e_9, e_{10}, e_3, e_4, \bar{x}, \bar{z}, x, y, z\},$$
$$F_4=\{e_1, e_2, e_{11}, e_{12}, \bar{x}, \bar{z}, x, y, z\},$$
$$F_5=\{e_1, e_2, e_{11}, e_{12}, \bar{y}, \bar{z}, x, y, z\},$$
$$F_6=\{e_3, e_4, e_7, e_8, \bar{x}, \bar{z}, x, y, z\},$$
$$F_7=\{e_3, e_4, e_7, e_8, \bar{y}, \bar{z}, x, y, z\},$$
$$F_8=\{e_5, e_6, e_9, e_{10}, \bar{x}, \bar{z}, x, y, z\},$$
$$F_9=\{e_5, e_6, e_9, e_{10}, \bar{y}, \bar{z}, x, y, z\},$$
$$F_{10}=\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, x, y, z\}.$$

Satz 1. *Das System* $\mathfrak{U}$ *stellt genau dann ein Vollständigkeitskriterium für die Äquivalenzklasse* $\mathfrak{A}$ *dar, wenn für keine der Mengen* $F_1, F_2, \ldots, F_{10}$ *eine Teilmenge von* F_i *Element von* $\mathfrak{A}$ *ist.*

Satz 2. *Wenn der Wirkungsbereich des Mengensystems* $\mathfrak{N}$ *den Wirkungsbereich des Mengensystems* $\mathfrak{U}$ *enthält, gilt* $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{U}$.

§ 2. Einige Hilfsaussagen und der Beweis von Satz 1

Lemma 1. *Sei*

$$M = \mathfrak{P}_{\Sigma,V}^{A_l} \cup \{e_m^{A_i}(u), e_n^{A_j}(v), e_p^{A_k}(w)\}$$

und

$$l \in \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, \{u, v, w\} = \{x, y, z\}, \quad V \in \{X, Y, Z\}.$$

Damit gilt $[M] = \mathfrak{P}_\Sigma$.

Beweis. Offenbar gibt es für jedes Paar von Mengen A_q, $A_{q'}$ eine Funktion von einer Veränderlichen, die Superposition von e_m, e_n und e_p ist und A_q auf $A_{q'}$ abbildet. Daher darf man annehmen, daß $[M]$ die Menge $\mathfrak{P}_{\Sigma,W}^{A_q}$ für beliebige $q \in \{1,2,3\}$ und $W \in \{X, Y, Z\}$ enthält und damit insbesondere die Funktionen $e_1, \ldots, e_{12}$ umfaßt.

Für eine beliebige Funktion $f(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t, z_1, \ldots, z_r) \in \mathfrak{P}_\Sigma$ betrachten wir die Funktion

$$g(x_1, \ldots, x_{s+r+t}) = f(x_1, \ldots, x_s, e_1(x_{s+1}), \ldots, e_1(x_{s+t}), e_3(x_{s+t+1}), \ldots, e_3(x_{s+t+r})),$$

die nach den obigen Bemerkungen in $[M]$ liegt. Man erkennt leicht, daß

$$g(x_1, \ldots, x_s, e_5(y_1), \ldots, e_5(y_t), e_9(z_1), \ldots, e_9(z_r)) = f(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t, z_1, \ldots, z_r)$$

ist. Folglich gilt $f \in [M]$.

Zur Abkürzung verwenden wir den folgenden Hilfsbegriff. Eine Menge M mit $M \subsetneqq U_i$ für alle $U_i \in U$ heißt *U-frei.*

Lemma 2. *Enthält eine U-freie Menge zwei Konstanten* c_1, c_2 *mit* $c_1 \neq c_2$, *so ist sie vollständig.*

Beweis. Unter Verwendung geeigneter Funktionen f_1, f_2, f_3 aus M, für die $f_1 \notin U_1$, $f_2 \notin U_2$, $f_3 \notin U_3$ ist und der Konstanten c_1 und c_2 erhält man leicht die dritte Konstante. Daher kann man o. B. d. A. voraussetzen, daß M alle drei Konstanten enthält. Wir bemerken, daß unter der Voraussetzung $f \notin U_{15}$ die Funktion f Werte in A_2 oder A_3 annimmt und von einer gewissen Veränderlichen aus X wesentlich abhängt. Daher kann man wegen $M \subsetneqq U_{15}$ und $\{0, 1, 2\} \subseteq M$ annehmen, daß $[M]$ eine Funktion $h_1 \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ enthält. Analog erhält man unter Verwendung des Faktes $M \subsetneqq U_{16}, U_{17}$, daß $[M]$ Funktionen h_2 und h_3 enthält, für die $h_2 \in \{e_5, e_6, e_7, e_8\}$ und $h_3 \in \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$ gilt. Es sind folgende Fälle möglich.

1. $h_1 \in \mathfrak{P}_\Sigma^{A_2}$. Da $M \subsetneqq U_{22}$ ist, existiert in M eine Funktion g_1 mit Werten in A_3, die wesentlich von gewissen Veränderlichen aus $X \cup Y$ abhängt. Mit Hilfe der

Konstanten und der Funktion h_1 kann man aus g_1 eine gewisse Funktion $e_i^{A_3}(x)$ erhalten.

2. $h_1 \in \mathfrak{P}_\Sigma^{A_3}$. Da $M \not\subseteq U_{23}$ ist, existiert in M eine Funktion g_2 mit Werten in A_2, die wesentlich von gewissen Veränderlichen aus $X \cup Z$ abhängt. Mit Hilfe der Konstanten und der Funktion h_1 kann man aus g_2 eine gewisse Funktion $e_j^{A_2}(x)$ erhalten. Daher erhält man in beiden Fällen ein Paar von Funktionen $e_i^{A_2}(x), e_j^{A_3}(x)$.

Analog schließt man unter Berücksichtigung von $M \not\subseteq U_{22}, U_{23}, U_{24}$ unter Verwendung der Funktionen h_2, h_3 auf die Existenz von gewissen Funktionspaaren $e_l^{A_1}(y)$, $e_k^{A_3}(y)$ und $e_m^{A_1}(z)$, $e_n^{A_2}(z)$ in $[M]$.

Ferner gilt $M \not\subseteq U_q$ für alle U_q aus S_7. Wir wählen in S_7 dasjenige U_q aus, in dem e_i und e_j enthalten sind und betrachten in M eine nicht in U_q enthaltene Funktion φ. Unter Verwendung der Konstanten, der Funktionen e_i, e_j und φ erhalten wir eine Funktion ψ_1 aus der Menge $\{\bar{x}, e_r, (x)\}$, wobei $r \neq i, j$ ist. Indem wir die Funktionen e_l und e_k bzw. e_m und e_n in e_i, e_j und ψ_1 einsetzen, erhalten wir eine Funktion ψ_2 aus $\{\bar{y}, e_s, (y)\}$ bzw. eine Funktion ψ_3 aus $\{\bar{z}, e_t, (z)\}$, wobei $s \neq l, k$ und $t \neq m, n$ gilt. Man erkennt unschwer, daß $[\{e_i, e_j, \psi_1, e_l, e_k, \psi_2, e_m, e_n, \psi_3\}] \supseteq \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ ist.

Nun beachten wir, daß M eine Funktion $f_4(x_1, \dots, x_{s'}, y_1, \dots, y_{t'}, z_1, \dots, z_{r'}) \notin L$ enthält. Wir betrachten die Funktion

$$f_5(x_1, \dots, x_{s'+t'+r'}) = \begin{cases} f_4' = f_4(x_1, \dots, x_{s'}, e_i(x_{s'+1}), \dots, \\ \qquad e_i(x_{s'+t'}), e_j(x_{s'+t'+1}), \dots, e_j(x_{s'+t'+r'})) \\ \text{falls } f_4 \in \mathfrak{P}_\Sigma^{A_1}; \\ \\ e_i(f_4'), \text{ falls } f_4 \in \mathfrak{P}_\Sigma^{A_2} \\ e_j(f_4'), \text{ falls } f_4 \in \mathfrak{P}_\Sigma^{A_3} \end{cases}$$

Man erkennt unschwer, daß f_5 nicht linear ist. In der Arbeit [5] wurde bewiesen, daß $[\{f_5, 0, 1, \bar{x}\}] = P_{\Sigma, X}^{A_1}$ ist. Damit gilt $[M] \supseteq \{e_i, e_k, e_m\} \cup P_{\Sigma, X}^{A_1}$ und nach Lemma 1 ist M vollständig. Das Lemma ist bewiesen.

Lemma 3. *Enthält eine $\mathfrak{U}$-freie Menge M eine Konstante c, so ist M vollständig.*

Beweis. Sei etwa $c = 0$. Wir betrachten in M eine Funktion $f \notin U_{25}$. Aus f erhält man mit Hilfe der Konstanten c eine Funktion $\varphi(z) \in \{1, 2, \bar{z}, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$. Die Fälle $\varphi(z) \in \{1, 2\}$ sind in Lemma 2 behandelt. Wir diskutieren die übrigen Möglichkeiten.

1. $\varphi(z) = \bar{z}$. Bedeute g eine in M, aber nicht in U_{34} enthaltene Funktion, so erkennt man unschwer, daß $[\{g, 0, \bar{z}\}]$ die Mengen $\{e_9, e_{10}\}$ oder $\{e_{11}, e_{12}\}$ enthält. Verwendet man diesen Fakt und Funktionen $\psi_1 \notin U_{46}$, $\psi_2 \notin U_{47}$, so erhält man $[\{g, 0, \bar{z}, \psi_1, \psi_2\}] \supseteq \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

Nun betrachten wir in M eine Funktion $\delta \notin U_{22}$. Sie muß Werte in A_3 annehmen und von gewissen Variablen aus $X \cup Y$ wesentlich abhängen. Daher gewinnt man aus ihr durch Einsetzen der Funktionen e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, z, $\bar{z}$, für die Veränderlichen eine Funktion σ für die σ oder $\bar{\sigma}$ in der Menge $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_8\}$ enthalten sind (vergl. Tabelle 2)
Für $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5, \sigma_6\}$ gilt $\sigma(0, z) \equiv 1$. Für $\sigma \in \{\sigma_3, \sigma_4\}$ oder $\sigma \in \{\sigma_7, \sigma_8\}$ betrachten wir $\sigma(e_{10}, z) \equiv 2$ oder $\sigma(e_{12}, z) \equiv 2$. Jedenfalls erhalten wir eine zweite Konstante und Lemma 2 ist anwendbar.

Tabelle 2

xz	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4		yz	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8
01	1	1	1	1		01	1	1	1	1
02	1	1	2	2		02	1	1	2	2
11	2	2	2	2		21	2	2	2	2
12	1	2	1	2		22	1	2	1	2

2. $\varphi(z)=e_9$. Bedeutet g eine in M aber nicht in U_{28} enthaltene Funktion, so erkennt man unschwer, daß $[\{g, 0, e_9\}]$ eine Funktion $\psi(z)\in\{e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$ enthält. Es sind folgende Teilfälle möglich.

a) $\psi(z)=e_{10}$. Bezeichnet h_1 eine nicht in U_1 gelegene Funktion aus M, so erkennt man leicht, daß $e_{12}\in[\{0, e_9, e_{10}, h\}]$ gilt und schließt weiter mit $h_2\in M$, $h_2\notin U_{53}$ auf $e_{11}\in[\{0, e_9, e_{10}, e_{12}, h_2\}]$. Verwendet man das Ergebnis $\{0, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}\subseteq\subseteq[M]$ und eine Funktion $h_3\in M$, $h_3\notin U_{58}$, so schließt man auf $\bar{z}\in[M]$ und hat den Fall 1.

b) $\psi(z)=e_{11}$. Wir führen diesen Fall auf den Fall a) zurück, indem wir für die Funktion $h_1\in M$, $h_1\notin U_{37}$ anmerken, daß $[\{0, e_9, e_{11}, h_1\}]$ die Funktion e_{10} oder e_{12} enthält und für den Fall des Auftretens von e_{12} eine Funktion $h_2\in M$, $h_2\notin U_{52}$ heranziehen, für die dann $e_{10}\in[\{0, e_9, e_{11}, e_{12}, h_2\}]$ gilt.

c) $\psi(z)=e_{12}$. Dieser Fall wir wiederum auf a) oder b) zurückgeführt, indem man für $h_1\in M$, $h_1\notin U_{38}$ berücksichtigt, daß $[\{0, e_9, e_{12}, h_1\}]$ die Funktion e_{10} oder e_{11} enthält.

3. $\varphi(z)=e_{10}$. Bedeutet g eine in M aber nicht in U enthaltene Funktion, so schließt man leicht auf $e_{12}\in[\{0, e_{10}, g\}]$. Mit $g_1\in M$, $g_1\notin U_{39}$ enthält $[\{0, e_{10}, e_{12}, g_2\}]$ die Funktion e_9 oder e_{11}. Wegen Fall 2 brauchen wir nur das Auftreten von e_{11} zu betrachten. Aber dann enthält mit $g_2\in M$, $g_2\notin U_2$ die Menge $[\{0, e_{10}, e_{11}, e_{12}, g_3\}]$ die Funktion e_9 und man hat den Fall 2.

4. $\varphi(z)=e_{11}$. Auch diese Möglichkeit führt man auf den zweiten Fall zurück, indem man für $g\in M$, $g\notin U_2$ die Beziehung $e_9\in[\{0, e_{11}, g\}]$ betrachtet.

5. $\varphi(z)=e_{12}$. Für $g\in M$, $g\notin U_{29}$ enthält $[\{0, e_{12}, g\}]$ die Funktion e_9, e_{10} oder e_{11} und man hat einen der schon betrachteten Fälle.

Für $c\in\{1, 2\}$ verläuft die Diskussion analog. Das Lemma ist bewiesen.

Lemma 4. *Falls eine $\mathfrak{U}$-freie M für gewisses $u\in\{x, y, z\}$ alle Funktionen $e_i(u)$, $e_{i+2}(u)$, $e_{i+3}(u)$ enthält, $i\in\{1, 5, 9\}$, so ist M vollständig.*

BEWEIS. Sei etwa $u=x$. Bezeichnet f eine nicht in U_{11} gelegene Funktion aus M, so erkennt man unschwer $\bar{x}\in[\{e_1, e_2, e_3, e_4, f\}]$. Für $g\in M$, $g\notin U_{14}$ enthält $[\{\bar{x}, e_1, e_2, e_3, e_4\}]$ eine Konstante und die Behauptung folgt aus Lemma 3. Die Fälle $u\in\{y, z\}$ betrachtet man analog, indem man beachtet, daß M in keiner der Mengen U_{12}, U_{13}, U_{14} enthalten ist.

Lemma 5. *Falls die $\mathfrak{U}$-freie Menge M für gewisse u, v, k, l, i, j Funktionen $e_k^{A_i}(u)$ und $e_l^{A_j}(v)$ mit einer der beiden Eigenschaften*

1) *für $u=v$ gilt $i\neq j$,* 2) *für $u\neq v$ ist $e_l^{A_j}(e_k^{A_i}(u))$ definiert und von u und $\bar{u}$ verschieden, enthält,*

so ist M vollständig.

Beweis 1) Wir zeigen zunächst, daß sich aus der Voraussetzung 1. die Vollständigkeit von M ergibt. Sei dazu etwa $u=x$. Es sind folgende Fälle möglich.

1. 1) $(k, l)=(1, 3)$. Für $f\in M$, $f\notin U_4$ enthält $[\{e_1, e_3, f\}]$ eine Funktion $g(x)\in \in\{\bar{x}, e_2, e_4\}$. Unter der Annahme $g=\bar{x}$ haben wir sofort $[\{e_1, e_3, f\}]\supseteq\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ und können Lemma 4 anwenden. Ist g gleich e_2 oder e_4, so wählen wir in M Funktionen h_1, h_2 mit der Eigenschaft $h_1\notin U_9, h_2\notin U_3$ und können wegen $e_4\in[\{e_1, e_2, e_3, h_1\}]$ und $e_2\in[\{e_1, e_3, e_4, h_2\}]$ wiederum Lemma 4 anwenden.

1. 2) $(k, l)=(1, 4)$. Für $f\in M$, $f\notin U_5$ enthält $[\{e_1, e_4, f\}]$ eine Funktion $g(x)\in \in\{\bar{x}, e_2, e_3\}$. Im Hinblick auf Lemma 4 und den Fall 1. 1 kann man o. B. d. A. $g(x)=e_2$ annehmen. Für $h\in M$, $h\notin U_2$ enthält $[\{e_1, e_2, e_4, h\}]$ die Funktion e_3 und es liegt der Fall 1. 1 vor.

1. 3) $(k, l)=(2, 3)$. Für $f\in M$, $f\notin U_6$ enthält $[\{e_2, e_3, f\}]$ eine der Funktionen $\bar{x}$, e_1, e_4. O. B. d. A. können wir die Anwesenheit von e_4 voraussetzen und haben mit $g\in M$, $g\notin U_{10}$ und $e_1\in[\{e_2, e_3, e_4, g\}]$ die Betrachtung auf den Fall 1. 1 zurückgeführt.

1. 4) $(k, l)=(2, 4)$. Für $f\in M$, $f\notin U_7$ enthält $[\{e_2, e_4, f\}]$ eine der Funktionen $\bar{x}$, e_1, e_3. Alle diese Fälle kann man auf Lemma 4 oder einen der obenbetrachteten Teilfälle 1. 1)—1. 3) zurückführen.

Die Möglichkeiten $u\in\{y, z\}$ diskutiert man analog.

2) Um aus der Voraussetzung 2) die Vollständigkeit von M herzuleiten, hat man nur zu beachten, daß $\{e_k^{A_i}(u), e_l^{A_j}(e_k^{A_i}(u))\}=\{e_k^{A_i}(u), e_r^{A_j}(u)\}$ für gewisses r und $A_i\neq A_j$ ist und daher der schon betrachtete Fall 1 vorliegt. Das Lemma ist bewiesen.

Lemma 6. *Falls die $\mathfrak{U}$-freie Menge M die Menge $\{e_i^{A_k}(u), e_j^{A_k}(u), \bar{u}, \bar{v}\}$ umfaßt, wobei $i\neq j$ ist und u und v Werte in untereinander und von A_k verschiedenen Mengen annehmen, so ist M vollständig.*

Beweis. Wir betrachten etwa die Menge $F=\{e_3, (x), e_4(x), \bar{x}, \bar{y}\}$ und zeigen, daß $M\supseteq F$ vollständig ist. Bezeichne dazu T die Menge der in $[M]$ enthaltenen Funktionen von x und y. O. B. d. A. kann man annehmen, daß T nicht den Voraussetzungen der Lemma 2—5 genügt.

Wenn $T\setminus(F\cup\{x, y\})\neq\emptyset$ und $\varphi(x, y)\in(T\setminus(F\cup\{x, y\}))$, so sind in der Tabelle 3 die möglichen Fälle für $\varphi(x, y)\in\mathfrak{P}_2^{A_1}\cup\mathfrak{P}_2^{A_2}$ angeführt.

Tabelle 3

xy	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8	ε_9	ε_{10}	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}
00	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	2	0	2	2	2	2	0
02	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	2	0	2	0	2	2	0	2
10	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	2	0	0	2	0	2	0	2	2
12	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	2	0	0	0	0	2	0	2	2	2

Wegen $\varepsilon_1(\bar{\varepsilon}_1(x, y), \bar{y})=e_6(y)$, $\varepsilon_2(x, \bar{y})=\varepsilon_1(x, y)$, $\varepsilon_3(\bar{x}, y)=\varepsilon_1(x, y)$, $\varepsilon_4(\bar{x}, \bar{y})= =\varepsilon_1(x, y)$ und $\varepsilon_i=\varepsilon_{i+6}$ für $1\leqq i\leqq 4$ kann T keine der Funktionen ε_j, $1\leqq j\leqq 10$ und $j\neq 5, 6$ enthalten. Wegen der aus Tabelle 3 ersichtlichen Symmetrie kann T auch keine Funktion δ_j für die angeführten j enthalten. Wir bemerken noch

$$[F]\supseteq\{x, y\},\quad [F\cup\{\varepsilon_5\}]\ni\varepsilon_6,\quad [F\cup\{\varepsilon_6\}]\ni\varepsilon_5,\quad [F\cup\{\delta_5\}]\ni\delta_6,\quad [F\cup\{\delta_6\}]\ni\delta_5,$$

$$\varepsilon_5(\varepsilon_5(x, y), \delta_5(x, y))\equiv 0.$$

Daher ist $T^{A_1} \cup T^{A_2}$ gleich einer der folgenden Mengen: $\{x, y, \bar{x}, \bar{y}\}$, $\{x, y, \bar{x}, \bar{y}, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}$ oder $\{x, y, \bar{x}, \bar{y}, \delta_5, \delta_6\}$. Diese Fälle betrachten wir,

1. $T^{A_1} \cup T^{A_2} = \{x, y, \bar{x}, \bar{y}\}$. Wir zeigen, daß $M \subseteqq U_{17}$ oder $\subseteqq U_{14}$ gilt. Unter der Voraussetzung $M \subseteqq\!\!\!\!/\; U_{17}$ enthält M eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t, z_1, \ldots, z_r)$ aus $\mathfrak{P}_2^{A_1} \cup \mathfrak{P}_2^{A_2}$, die wesentlich von einer gewissen Veränderlichen z_i abhängt. Seien

$$(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t, c_1, \ldots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \ldots, c_r)$$

und

$$(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t, c_1, \ldots, c_{i-1}, 2, c_{i+1}, \ldots, c_r)$$

gewisse Tupel, auf denen f zwei verschiedene Werte annimmt. Wir setzen in f für jede Variable x_j in Abhängigkeit davon, ob a_j gleich 0 oder 1 ist die Funktion x bzw. $\bar{x}$ ein; für jede Variable y_k in Abhängigkeit davon, ob b_k gleich 0 oder 2 ist, die Funktionen y bzw. $\bar{y}$ ein; analog wird für jede Variable z_l die Funktion e_3 bzw. e_4 eingesetzt, wenn c_l gleich 1 bzw. 2 und $k \neq i$ ist. Für z_i setzen wir z ein und erhalten aus f eine Funktion $\varphi(x, y, z)$ mit der Eigenschaft $\varphi(0, 0, 1) \neq \varphi(0, 0, 2)$. Man prüft leicht, daß die Funktionen $\varphi(x, y, e_3(x))$ und $\varphi(x, y, e_4(x))$ mit x und $\bar{x}$ bzw. mit y und $\bar{y}$ zusammenfallen. Daher ist $\varphi(x, y, z) \in \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$. Sei ferner $M \subseteqq\!\!\!\!/\; U_{14}$ vorausgesetzt. Dann enthält M eine Funktion

$$g(x_1, \ldots, x_{s'}, y_1, \ldots, y_{t'}, z_1, \ldots, z_{r'})$$

für die mit einem geeigneten Tupel $(a_1, \ldots, a_{s'}, b_1, \ldots, b_{t'}, c_1, \ldots, c_{r'})$ die Beziehung $g(a_1, \ldots, a_{s'}, b_1, \ldots, b_{t'}, c_1, \ldots, c_{r'}) = g(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{s'}, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{t'}, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{r'})$ gilt. Indem wir in g in geeigneter Weise $x, \bar{x}, y, \bar{y}, e_3(x), e_4(x)$ einsetzen, erhalten wir eine Funktion $\psi(x, y)$ mit der Eigenschaft $\psi(0, 1) = \psi(1, 2) = c$. Für $\psi \in \mathfrak{P}_2^{A_1} \cup \mathfrak{P}_2^{A_2}$ gilt $\psi \notin T$. Für $\psi \in \mathfrak{P}_2^{A_2}$ ist keine der Funktionen $e_i(\psi(x, y))$, $i \in \{9, 10, 11, 12\}$, in T enthalten. Daher gelangen wir in beiden Fällen zu einem Widerspruch.

2. $T^{A_1} \cup T^{A_2} = \{x, y, \bar{x}, \bar{y}, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}$. Wir beweisen $M \subseteqq U_{23}$. Angenommen, es ist $M \subseteqq\!\!\!\!/\; U_{23}$. Dann enthält M eine Funktion $f \in \mathfrak{P}_2^{A_2}$, die von gewissen Variablen aus $X \cup Z$ wesentlich anhängt. Da $e_3(x) \in T$ ist, können wir o. B. d. A. annehmen, daß f wesentlich von einer gewissen Variablen x_i abhängt. Indem wir in f in geeigneter Weise die Funktionen $x_1, x_2, \bar{x}_2, y, \bar{y}, e_3(x_2), e_4(x_2)$ einsetzen, erhalten wir eine Funktion $\varphi(x_1, x_2, y)$ mit der Eigenschaft $\varphi(0, 0, 0) \neq \varphi(0, 1, 0)$, wobei man $\varphi(0, 0, 0) = 2$ annehmen darf. Die Funktionen $\varphi(x, \bar{x}, y)$ und $\varphi(\varepsilon_5(x, y), x, y)$ fallen mit y bzw. $\bar{y}$ zusammen. Das bedeutet einerseits $\varphi(0, 1, 2) = 1$, während andererseits $\varphi(0, 1, 2) = 0$ sein muß. Daher erhalten wir einen Widerspruch.

3. $T^{A_1} \cup T^{A_2} = \{\delta_5(x, y), \delta_6(x, y), x, y, \bar{x}, \bar{y}\}$. Wir beweisen $M \subseteqq U_{16}$. Unter der Annahme $M \subseteqq\!\!\!\!/\; U_{16}$ enthält M eine Funktion $f \in \mathfrak{P}_2^{A_1} \cup \mathfrak{P}_2^{A_2}$, die wesentlich von einem gewissen y_i anhängt. Indem wir in f in geeigneter Weise die Funktionen $x, \bar{x}, y_1, y_2, \bar{y}_2, e_3(x), e_4(x)$ einsetzen, erhalten wir eine Funktion $\varphi(x, y_1, y_2)$ mit der Eigenschaft $\varphi(0, 0, 0) \neq \varphi(0, 0, 2)$, wobei man $\varphi(0, 0, 0) = 0$ oder $\varphi(0, 0, 2) = 2$, annehmen darf. Die Funktionen $\varphi(x, y, y)$ und $\varphi(x, y, \bar{y})$ fallen mit x und $\bar{x}$ bzw. mit $e_3(x)$ und $e_4(x)$ zusammen. Unter Beachtung dieses Faktes erkennt man $\varphi(x, \delta_5(x, y), y) \equiv$ $\equiv$ konst, und erhält einen Widerspruch.

Folglich haben wir für $M \supseteqq F$ unter der Voraussetzung, daß M nicht den Bedingungen der Lemma 2—5 genügt, M als Teilmenge gewisser Mengen aus $\mathfrak{U}$ nachgewiesen, was der Voraussetzung über die $\mathfrak{U}$-Freiheit der Menge M widerspricht.

Die übrigen Fälle diskutiert man analog.

Das Lemma ist bewiesen.

Lemma 7. *Gilt für ein gewisses* $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ $M \subseteqq F_i$, *so ist das Mengensystem* $\mathfrak{U}$ *kein Vollständigkeitskriterium für die Äquivalenzklasse* $\mathfrak{A}(M)$.

Beweis. Wir zeigen, daß für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ eine abgeschlossene Klasse W_i existiert, für welche $W_i \supseteqq F_i$, $W_i \neq \mathfrak{P}_\Sigma$ und für alle $j = 1, 2, \ldots, 61$ gilt $(W_i \setminus W_i^{(1)}) \subsetneqq$ $\subsetneqq U_j$. Daraus ergibt sich dann unsere Behauptung. Die bei der Bildung der Mengen $F_1, F_2, \ldots, F_{10}$ ersichtliche Symmetrie gestattet es, diese Mengen in drei Klassen $I_1 = \{F_1, F_2, F_3\}$, $I_2 = \{F_4, F_5, \ldots, F_9\}$, $I_3 = \{F_{10}\}$ zusammenzufassen und die folgenden drei Fälle zu betrachten.

1. $F_i \in I_1$. Sei etwa $i = 1$. Wir betrachten die Menge

$$R = \{x, z, \bar{x}, e_1(x), e_2(x), \varepsilon_1'(x, z), \varepsilon_3'(x, z), \varepsilon_7'(x, z), \varepsilon_9'(x, z), \delta_1'(x, z), \delta_3'(x, z), \delta_7'(x, z), \delta_9'(x, z)\},$$

wobei

$$\varepsilon_l'(x, z) = \varepsilon_l(x, e_{11}(z)), \quad \delta_l'(x, z) = \delta_l(x, e_{11}(z)), \qquad l \in \{1, 3, 7, 9\},$$

und ε_l und δ_l die Funktionen aus der Tabelle 3 bedeuten. Die Menge R hat folgende Eigenschaft: wenn für irgendwelche f_1, f_2, f_3 aus R die Funktion $f_1(f_2, f_3)$ definiert ist, so ist $f_1(f_2, f_3) \in R$.

Ferner erkennt man leicht, daß $\mathfrak{U}(R) = [\mathfrak{U}(R)]$ und die Teilmenge aller derjenigen Funktionen aus $\mathfrak{U}(R)$, die von x und z abhängen, mit R zusammenfällt*) und daher $\mathfrak{U}(R) \neq \mathfrak{P}_\Sigma$ ist.

Außerdem gilt offenbar $\mathfrak{U}(R) \supseteqq F_1$. Zeigen wir noch, daß $\mathfrak{U}(R) \setminus U^{(1)}(R)$ in keinem der Elemente von $\mathfrak{U}$ als Teilmenge enthalten ist, so können wir $\mathfrak{U}(R)$ als W_1 wählen. Dazu genügt der Hinweis, daß die Menge

$$\{\varepsilon_1', \varepsilon_3', \varepsilon_7', \varepsilon_9', \delta_1', \delta_3', \delta_7', \delta_9', \varphi(x, z_1, z_2), \psi(y, z_1, z_2)\},$$

wo $\varphi(x, z, z) = z$ und $\varphi(x, z_1, z_2) = e_3(x)$ für $z_1 \neq z_2$, $\psi(y, z, z) = \bar{y}$ und $\psi(y, z_1, z_2) = 0$ für $z_1 \neq z_2$, in $\mathfrak{U}(R)$, aber in keiner Menge des Systems $\mathfrak{U}$ enthalten ist. Die Fälle $i \in \{2, 3\}$ diskutiert man analog.

2. $F_i \in I_2$. Sei etwa $i = 6$. Wir betrachten die Menge

$$R = \{x, y, \bar{x}, e_3(x), e_4(x), e_7(y), e_8(y), \varepsilon_1(x, y), \varepsilon_3(x, y), \varepsilon_7(x, y), \varepsilon_9(x, y),$$
$$\sigma_1(x, y), \sigma_3(x, y), \sigma_7(x, y), \sigma_9(x, y)\}$$

wobei die Funktionen ε_l, σ_l, $l \in \{1, 3, 7, 9\}$ durch die Tabelle 3 bestimmt sind. Wie oben ist auch hier $\mathfrak{U}(R) = [\mathfrak{U}(R)]$, $\mathfrak{U}(R) \neq \mathfrak{P}_\Sigma$ und $\mathfrak{U}(R) \supseteqq F_6$. Ferner ist das System

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_7, \varepsilon_9, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_7, \sigma_9, \varphi(y_1, y_2, z)\} \quad \text{mit} \quad \varphi(y, y, z) = y,$$

$\varphi(0, 2, 2) = 2$ und $\varphi(a, b, c) = 0$ für $(a, b, c) \neq (0, 2, 2)$ und $a \neq b$, wohl in $\mathfrak{U}(R)$ aber in keiner Menge des Mengensystems $\mathfrak{U}$ enthalten. Daher kann man als W_6 die Menge $\mathfrak{U}(R)$ wählen. Die übrigen Fälle $i \in \{4, 5, 7, 8, 9\}$ diskutiert man analog.

---

*) Wir verallgemeinern den Begriff der „Erhaltun einer Menge $M \subseteqq \mathfrak{P}_\Sigma$. Sei $f(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t, z_1, \ldots, z_r) \in \mathfrak{P}_\Sigma$. Wir sagen, f erhalt M oder laßt M invariant, wenn $f(g_1, \ldots, g_s, h_1, \ldots, h_t, w_1, \ldots, w_r) \in M$ für alle diejenigen Funktionen $g_1, \ldots, g_s$, $h_1, \ldots, h_t, w_1, w_r$ aus M, für die der angegebene Ausdruck gefiniert ist. Die Menge aller Funktionen aus $\mathfrak{P}_\Sigma$, die M invariant lassen, symbolisieren wir mit $\mathfrak{U}(M)$ und bezeichnen sie als Invarianzmenge von M.

3. $F_i \in I_3$. Wir ordnen die Tripel aus $A_1 \times A_2 \times A_3$ in folgender Reihenfolge

$$(*) \qquad (0,0,1), (0,2,2), (1,0,2), (1,2,1), (1,0,1), (1,2,2), (0,0,2), (0,2,1)$$

und betrachten die nachstehenden Folgen

$$a_1 = 0011, \quad a_2 = 1100, \quad a_3 = 0202, \quad a_4 = 2020, \quad a_5 = 1221, \quad a_6 = 2112.$$

Seinen i, j irgend weiche Zahlen, die den Bedingemgen $1 \leqq i, j \leqq 2$ oder $3 \leqq i, j \leqq 4$ oder $5 \leqq i, j \leqq 6$ genügen. Wir bezeichnen mit $\varphi_{ij}(x, y, z)$ eine Funktion, deren Wertefolge auf der Folge $(*)$ gleich $a_i a_j$ ist. Wir betrachten die Menge R aller Funktionen $\varphi_{ij}(x, y, z)$. Ebenso wie oben bemerken wir, daß R sich selbst erhält, $\mathfrak{U}(R) = [\mathfrak{U}(R)]$, $\mathfrak{U}(R) \neq \mathfrak{P}_\Sigma$ und $\mathfrak{U}(R) \supseteqq F_{10}$ gilt. Da das System $\{\varphi_{22}, \varphi_{43}, \varphi_{65}\}$ in keinem Element der Menge $\mathfrak{U}$ enthalten ist, kann man als W_{10} die Menge $\mathfrak{U}(R)$ wählen. Das Lemma ist bewiesen.

Zum Beweis des Satzes 1 bemerken wir folgendes. Sei $M \subseteqq \mathfrak{P}_\Sigma$. Falls $[M^{(1)}]_{\text{Ä}}$ den Bedingungen der Lemma 3, 5 oder 6 genügt, so liefert U ein Vollständigkeitskriterium für $\mathfrak{A}(M)$. Möge $[M^{(1)}]_{\text{Ä}}$ nicht den Bedingungen der Lemma 3, 5 oder 6 genügen. Dann ist offenbar $[M^{(1)}]_{\text{Ä}}$ für gewisses $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ äquivalent zu einegewissen Teilmenge der Menge F_i und nach Lemma 7 liefert U kein Vollständigkeitsr kriterium für $\mathfrak{A}(M)$.

§ 3. Beweis des Satzes 2

Wir zeigen zunächst, daß jede Menge U_i, die Element von $\mathfrak{U}$ ist, fastvollständig ist. Dazu bemerken wir zunächst, daß alle diese Mengen, außer $U_4, U_5, \dots, U_{14}$ Konstanten enthalten und daß jede der Klassen $U_4, \dots, U_{14}$ für gewisse j, k, l, m und u ein Funktionenpaar $e_j^{A_l}(u)$ und $e_k^{A_m}(u)$, $l \neq m$ enthält. Daher ist es im Hinblick auf die Lemma 3 und 5 für den Beweis der Fastvollständigkeit aller Mengen $U_n \in \mathfrak{U}$ hinreichend, zu zeigen, daß es in $\mathfrak{U}$ eine solche Teilmenge M_n gibt, die in keinem anderen Element des Systems $\mathfrak{U}$ enthalten ist. Wegen der Symmetrie der Mengensysteme S_j, $j = 1, 2, \dots, 16$ genügt es, die Mengen M_r, $r = 1, 4, 8, 11, 14, 15, 18, 22, 25, 28, 34, 37, 46, 52, 58, 61$ zu konstruieren. Man überzeugt sich unschwer davon, daß die folgenden Mengen die geforderten Eigenschaften haben.

$$M_1 = \{0, 1, \delta_3(x, y), \overline{x \cdot e_9(z)}, \varepsilon_2(x, y)\},$$

$$M_4 = \{e_1, e_3, e_5, e_7, e_9, e_{11}, \varepsilon_1(x, y), e_5(y) \cdot (x + e_{10}(z))\},$$

$$M_8 = \{\bar{x}, e_5, e_6, e_8, e_9, e_{10}, e_{12}, e_3((\bar{e}_5(y) v x) \cdot e_9(z))\},$$

$$M_{11} = \{\bar{y}, \bar{z}, e_1, e_7, e_{11}, x_1(e_5(y) v x_2)\},$$

$$M_{14} = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, e_1, e_3, e_5, e_9, x_1 x_2 v x_1 x_3 v x_2 x_3\},$$

$$M_{15} = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, e_5, e_9, e_{11}, \varepsilon_1\},$$

$$M_{18} = \{0, 1, 2, e_1, e_3, e_5, e_9, \varepsilon_1\},$$

$$M_{22} = \{0, 1, 2, \delta_2, \varepsilon_2, \overline{x \cdot e_9(z)}\},$$

$M_{25}=\{0, e_1, e_5, \varepsilon_1, \varepsilon_4, e_3(x\cdot e_5(y)), e_{10}(z_1)\cdot\bar{e}_{10}(z_2)\}$,

$M_{28}=\{0, e_5, e_9, e_3(\varepsilon_2), e_1(\varepsilon_2(x, e_{11}(z)))\}$,

$M_{34}=\{0, \bar{z}, e_1, e_5, x\cdot e_9(z)\}$,

$M_{37}=\{0, e_1, e_5, e_9, e_4(e_{10}(z_1)\cdot(x+e_{10}(z_2)))\}$,

$M_{46}=\{0, \bar{z}, e_5, e_9, e_{10}, \delta_1, \varepsilon_5, e_3(x\cdot e_6(y))\}$,

$M_{52}=\{0, e_1, e_9, e_{11}, e_{12}, e_9(e_{10}(x, e_{11}(z))), \varepsilon_1(e_9(z), y)\}$,

$M_{58}=\{0, e_1, e_5, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, \varepsilon_2, e_3((e_9(z_1)vx)\cdot e_9(z_2))\}$,

$M_{61}=\mathfrak{P}_\Sigma^{(1)}$.

wo die Funktionen ε_i und δ_j durch die Tabelle 3 bestimmt sind. Wir beweisen nun abschließend Satz 2.

Sei $U_i\in\mathfrak{U}$. Man erkennt leicht, daß das System $\mathfrak{U}$ ein Vollständigkeitskriterium für die Äquivalenzklasse $\mathfrak{A}(U_i^{(1)})$ liefert und daß genau eine fastvollständige Klasse M_i existiert, für die $M_i^{(1)}=U_i^{(1)}$ gilt, nämlich gerade U_i.

Betrachten wir nun $\mathfrak{A}(U_i^{(1)})$. Da $U_i\in\mathfrak{A}(U_i^{(1)})$ und U_i in keiner von sich selbst und von $\mathfrak{P}_\Sigma$ verschiedenen abgeschlossenen Klasse enthalten ist, so muß jedes System $\mathfrak{B}$, dessen Wirkungsbereich den von $\mathfrak{U}$ umfaßt, als Element die Menge U_i enthalten. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Literatur

[1] W. B. Kudrjavcev, G. Burosch, Das Problem der Wollstandigkeit für Boolesche Funktionen über zwei Dual mengen. Ersch. in *Math. Nachrichten*.

[2] G. N. Blochina, W. B. Kudrajavcev, G. Burosch, Das Problem der Vollstandigkeit für Boolesche Funktionen über zwei Dualmengen mit nichtleerem Durchschnitt. Ersch. in *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen der Mathematik*.

]3] S. A. Janowskaja (Яновская С. А.) Математическая логика и основания Математики, Математика в СССР 1917—1957; Bd. 1, *Moskau* 1959, 13—120.

[4] A. Salomaa, Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain, I, II, *Turun Ylopiston Julkaisuja Annales Universitatis Turkuensis,* sarja A, **53** (1962), 1—9, **63** (1963), 1—19.

[5] S. W. Jablonskij, (Яблонский, С. В.) Функциональные построения в К-значной логике, Труды Мат.-института АН СССР, т. **51**, 1958.

[6] S. W. Jablonskij, G. P. Gawrilow, W. B. Kudrjavcev, (*Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кубрявцев В.Б.)* Функции алгедры логике и кцассы Поста, *Москва* 1966.

(Eingegangen am 15. Februar 1972.)