δ-derivations d'algèbres

Par F. SÖLER (Moncton N.-B.)

Introduction. On définit les δ-dérivations des algèbres comme un module-homomorphisme avec certaines propriétés. Cela permet d'englober dans l'étude d'un seul cas, les dérivations canoniques, antidérivations et presque-dérivations, généralisant la notion de dérivée. Pour les définitions habituelles de la somme et du produit par un scalaire l'ensemble des δ-dérivations présente certaines structures algébriques. Le produit d'une dérivation par un algèbre-homomorphisme est toujours une dérivation; quand on limite ce produit à deux dérivations les conditions pour que celui-ci soit une dérivation sont très restrictives. Dans certaines algèbres les δ-dérivations prennent des formes assez spéciales; comme les algèbres associatives, le poids $(1, 1)$ et les algèbres commutatives la valence (ψ, ψ) et le poids (α, α). Pour les algèbres unitaires on n'a pas toujours $\delta(e)=0$. Le commutateur de deux dérivations doit remplir certaines conditions pour être une dérivation; résultats très importants qui peuvent être appliqués aux algèbres de Lie. On peut pour les δ-dérivations généraliser la règle de Leibniz pour le produit de deux facteurs ou plus, ce qui permet de retrouver les résultats connus des dérivations, quand on se limite aux algèbres associatives.

On obtient aussi une généralisation des dérivations des algèbres de quotients considérés comme une extension de l'algèbre. On donne en plus une généralisation de la règle de Leibniz pour n'importe quel nombre de dérivations successives d'un produit de plusieurs facteurs.

1. Soit U_K la classe d'algèbres sur le même anneau K et soient $A, B \in U_K$. On définit une application $\delta: A \to B$, par les propriétés suivantes:

(1) a) $\delta(xy) = \alpha\delta(x)\psi(y) + \beta\varphi(x)\delta(y)$, $\forall x, y \in A$ où: $\psi, \varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ et $\alpha, \beta \in K$, sont fixés.

b) $\delta(x+y) = \delta(x)+\delta(y)$, $\forall x, y \in A$

c) $\delta(\lambda x) = \lambda\delta(x)$, $\lambda \in K$ et $x \in A$.

Cette application est une dérivation dans le sens ordinaire [1] quand $A=B$, $\alpha=\beta=1$ et $\psi=\varphi=I$ (1 étant l'élément unité de l'anneau de base et I l'homomorphisme identité). On appellera δ-dérivation, l'application définie en (1), de l'algèbre A dans B, de valence (ψ, φ) et poids (α, β). Les dérivations de même valence et poids seront dites du même genre.

Cas Particuliers. Si A est une sous-algèbre de B:

1) Dérivations canoniques: valence (I, I) et poids $(1, 1)$.
2) Antidérivations: valence (I, I) et poids $(1, -1)$.
3) Antidérivations de grade n: valence (I, I) et de poids $\left(1, (-1)^n\right)$
4) Presque-dérivations: valence (I, I) et poids (α, α), $\alpha \neq 0$.

2. Soit $D_{(\alpha,\beta)}^{(\psi,\varphi)}$ $(A \to B)$ l'ensemble de toutes les dérivations du même genre et $D(A, B)$ l'ensemble de toutes les δ-dérivations.

Définition 1. Soient $\delta, \delta' \in D(A, B)$

$$(\delta + \delta')(x) = \delta(x) + \delta'(x), \quad \forall x \in A. \tag{2}$$

Définition 2. Soient $\lambda \in K$ et $\delta \in D(A, B)$

$$(\lambda\delta)(x) = \lambda\delta(x) = \delta(\lambda x). \tag{3}$$

Proposition 1. La somme de deux δ-dérivations est une δ-dérivation si une des suivantes conditions est vraie:

a) Les dérivations sont du même genre.

b) Les dérivations sont du même poids et induisent le même module-homomorphisme.

c) Les dérivations ont la même valence et induisent le même module-homomorphisme.

Proposition 2. La somme de deux dérivations est:

a) du même genre, si se vérifie la condition a) de la proposition 1.

b) de valence, la somme des valences $(\psi + \psi', \varphi + \varphi')$ et de même poids, si se vérifie la condition b) de la proposition 1.

c) de même valence, et poids la somme des poids $(\alpha + \alpha', \beta + \beta')$ si se vérifie la condition c) de la proposition 1.

Les propositions 1 & 2 résultent immédiatement de (1) et (2).

Proposition 3. A une structure de module pour les opérations définies en (2) et (3):

a) l'ensemble des dérivations du même genre.

b) l'ensemble des dérivations qui induisent le même module-homomorphisme et qui ont le même poids.

c) l'ensemble des dérivations qui induisent le même module-homomorphisme et qui ont la même valence.

d) l'ensemble des dérivations du même genre qui induisent le même module-homomorphisme.

3. *Proposition 4.* Soient A, B, C des algèbres sur le même anneau K.

i) $\delta \in D_{(\alpha,\beta)}^{(\psi,\varphi)}(A \to B)$; $\quad \psi, \varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$; $\quad \alpha, \beta \in K$

ii) $v \in \mathrm{Hom}\,(B, C)$, $\quad u \in \mathrm{Hom}\,(C, A)$.

Alors

a) $\delta' \in D_{(\alpha,\beta)}^{(v\circ\psi,\, v\circ\varphi)}(A \to C)$; $\delta' \equiv v \circ \delta$

b) $\delta'' \in D_{(\alpha,\beta)}^{(\psi\circ u,\, \varphi\circ u)}(C \to B)$; $\delta'' \equiv \delta \circ u$

PREUVE*).

a) $\delta'(xy) = v \circ \delta(xy)$

$$= v(\alpha\bar{\delta}\hat{\psi} + \beta\bar{\varphi}\hat{\delta})$$

$$= \alpha\overline{v\circ\delta}\,\widehat{v\circ\psi} + \beta\overline{v\circ\varphi}\,\widehat{v\circ\delta}.$$

Soit $\delta' \in D_{(\alpha,\beta)}^{(v\circ\psi,\, v\circ\varphi)}(A \to C)$

b) Démonstration analoque au cas a).

Soit $\delta'' \in D_{(\alpha,\beta)}^{(\psi\circ u,\, \varphi\circ u)}(C \to B)$

Corollaire 1. Si A, B, C et D sont des algèbres sur le même anneau.

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{\delta} C \xrightarrow{v} D$$

et v et u des homomorphismes d'algèbres, alors $\delta' = v \circ \delta \circ u$ est une dérivation, $\delta' \in D_{(\alpha,\beta)}^{(v\circ\psi\circ u,\, v\circ\varphi\circ u)}(A \to D)$.

Proposition 5. Soit A une algèbre sur un anneau commutatif K et δ, δ' deux dérivations de A dans A.

i) $\delta \in D_{(\alpha,\beta)}^{(\psi,\varphi)}(A \to A)$; $\delta' \in D_{(\alpha',\beta')}^{(\psi',\varphi')}(A \to A)$

ii) le produit des dérivations étant défini comme le composé des applications.

Alors le produit $\delta\delta'$ sera une dérivation de valence $(\psi\psi', \varphi\varphi')$ et poids $(\alpha\alpha', \beta\beta')$ si:

$$\alpha\beta'\,\overline{\delta\varphi'}\,\widehat{\psi\delta'} + \beta\alpha'\,\overline{\varphi\delta'}\,\widehat{\delta\psi'} = 0 \tag{4}$$

Corollaire 2. Si δ, δ' induisent le même module-homomorphisme et sont du même genre,

Alors: $\delta^2 = \delta\delta' \in D_{(\alpha^2,\beta^2)}^{(\psi^2,\varphi^2)}(A \to A)$

si une des deux conditiones se vérifie:

a) $[\delta, \varphi]_- = 0$, $[\delta, \psi]_+ = 0$

b) $[\delta, \varphi]_+ = 0$, $[\delta, \psi]_- = 0$.

Corollaire 3. Si δ, δ' induisent le même module-homomorphisme, sont du même genre et de valence (ψ, ψ), $\delta\delta'$ est une dérivation si une de deux conditions est vérifiée:

a) A est une algèbre unitaire $(\delta(e) = 0)$ et $\operatorname{im}\psi = e$ (e étant l'élément unité de l'algèbre).

b) $\operatorname{im}\psi \subset \ker\delta$ (considérés comme modules-homomorphismes).

---

*) Maintenant et dans la suite, le trait ($^-$) indique fonction de x et l'accent circonflexe ($^\wedge$) indique fonction de y. Soit $\bar{\delta} \equiv \delta(x)$, $\hat{\delta} \equiv \delta(y)$.

Conjecture. Le produit de deux dérivations de valence (I, I) et qui induisent le même module-homomorphisme, n'est qu'une dérivation que pour le cas trivial; quand $\ker \delta = A$, c'est-à-dire, $\forall x \in A$, $\delta(x) = 0$.

Corollaire 4. Si δ est une dérivation de valence (I, φ) et si elle induit le module-homomorphisme identité. Alors δ^2 sera une dérivation de poids $(1, \beta)$ si $\ker \varphi = A$.

4. *Proposition 6.* Soient A et B des algèbres associatives sur le même anneau commutatif et sans éléments idempotents autres que 0 et 1.

Alors les dérivations possibles sont de poids (1 1).

PREUVE. Cela vient de la définition d'une dérivation (1), et du fait que, A est une algèbre associative;

$$\forall x, y, z \in A \Rightarrow (xy)z = x(yz)$$

$$\delta(xyz) = \delta\big(x(yz)\big) = \delta\big((xy)z\big)$$

a) $\delta\big(x(yz)\big) = \alpha\hat{\bar{\delta}}\hat{\psi}\mathring{\psi} + \beta\bar{\varphi}\delta(yz)$

$$= \alpha\hat{\bar{\delta}}\hat{\psi}\mathring{\psi} + \beta\alpha\bar{\varphi}\hat{\delta}\mathring{\psi} + \beta^2\bar{\varphi}\hat{\varphi}\mathring{\delta} =$$

$$\left(\text{étant } \mathring{\delta} \equiv \delta(z), \mathring{\psi} \equiv \psi(z), \mathring{\varphi} \equiv \varphi(z)\right)$$

b) $\delta\big((xy)z\big) = \alpha\delta(xy)\mathring{\psi} + \beta\bar{\varphi}\hat{\varphi}\mathring{\delta} =$

$$= \alpha^2\hat{\bar{\delta}}\hat{\psi}\mathring{\psi} + \alpha\beta\bar{\varphi}\hat{\delta}\mathring{\psi} + \beta\bar{\varphi}\hat{\varphi}\mathring{\delta}$$

et si on compare a) et b) on a:

$$\alpha^2 = \alpha, \quad \beta^2 = \beta$$

étant l'élément neutre l'unique idempotente; $\alpha = \beta = 1$.

Proposition 7. Soient A et B des algèbres commutatives sur le même anneau

$\forall x, y \in A$ on a $[x, y] = 0$ $\delta(xy) = \delta(yx)$.

Alors $\alpha\psi(x) = \beta\varphi(x)$; $\forall x \in A$ et cela implique $\alpha = \beta$, $\psi = \varphi$.
Si l'algèbre est commutative les dérivations possibles sont de valence (ψ, ψ) et de poids (α, α).

PREUVE.

$$\delta(xy) = \alpha\hat{\bar{\delta}}\hat{\psi} + \beta\bar{\varphi}\hat{\delta}$$

$$\delta(yx) = \alpha\hat{\delta}\bar{\psi} + \beta\hat{\varphi}\bar{\delta}$$

donc

$$\alpha\hat{\psi} = \beta\hat{\varphi}$$

$$\alpha\bar{\psi} = \beta\bar{\varphi}$$

et si on fait la somme, $\alpha\psi(x+y) = \beta\varphi(x+y)$, $\forall x, y \in A$. D'autre part si $x = yz$ et $\forall x \in A$ $\alpha\bar{\psi} = \beta\bar{\varphi}$ et puisque $\psi, \varphi \in \mathrm{Hom}\,(A, B)$

$$\alpha\bar{\psi}\hat{\psi} = \beta\bar{\varphi}\hat{\varphi}$$

soit: $\psi = \varphi$.

Proposition 8. Soient A et B des algèbres unitaires. Soit $e \in A$ l'élément neutre ($\forall x \in A$, $ex = xe = x$) et δ une dérivation, alors:

a) $\alpha + \beta = 1$ si $\delta(e) \neq 0$

b) si $\alpha + \beta \neq 1$ alors $\delta(e) = 0$.

(0, est l'élément neutre de la structure de groupe abélien).

PREUVE.

$$\begin{aligned}\delta(e) &= \delta(ee)\\ &= (\alpha+\beta)\delta(e).\end{aligned}$$

Corollaire 5. Si l'algèbre est associative et unitaire $\delta(e) = 0$.

Proposition 9. Soient δ, δ' deux dérivations d'une algèbre avec anneau de base commutative.

i) $\delta \in D^{(\psi;\varphi)}_{(\alpha,\beta)}(A \to A)$; $\delta' \in D^{(\psi';\varphi')}_{(\alpha',\beta')}(A \to A)$

ii) $\psi, \psi', \varphi, \varphi' \in \operatorname{End}(A)$; $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in K$.

Alors les conditions pour que $[\delta, \delta']$ soit une dérivation de l'algèbre, de valence $(\psi\psi', \varphi\varphi')$ et de poids $(\alpha\alpha', \beta\beta')$ sont:

1) $-[\psi, \psi'] = [\varphi, \varphi'] = 0$

2) $-[\delta, \psi'] = [\delta, \varphi'] = 0$

3) $-[\delta', \psi] = [\delta', \varphi] = 0$.

PREUVE. De (1 et tenant compte de la proposition 5 on a:

$$\begin{aligned}[\delta, \delta'](xy) &= \alpha\alpha'(\overline{\delta\delta'}\,\widehat{\psi\psi'} - \overline{\delta'\delta}\,\widehat{\psi'\psi}) =\\ &= \alpha'\beta(\overline{\varphi\delta'}\,\widehat{\delta\psi'} - \overline{\delta'\varphi}\,\widehat{\psi'\delta}) =\\ &= \alpha\beta'(\overline{\delta\varphi'}\,\widehat{\delta\psi'} - \overline{\varphi'\delta}\,\widehat{\delta'\psi}) =\\ &= \beta\beta'(\overline{\varphi\varphi'}\,\widehat{\delta\delta'} - \overline{\varphi'\varphi}\,\widehat{\delta'\delta}\end{aligned}$$

et tenant compte que: $[a, b]cd + ba[c, d] = abcd - badc$ on peut écrire:

$$\begin{aligned}[\delta, \delta'](xy) &= \alpha\alpha'\{\overline{[\delta, \delta']}\,\widehat{\psi\psi'} + \overline{\delta'\delta}\,\widehat{[\psi, \psi']}\} +\\ &+ \beta\beta'\{\overline{[\varphi, \varphi']}\,\widehat{\delta\delta'} + \overline{\varphi'\varphi}\,\widehat{[\delta, \delta']}\} +\\ &+ \alpha\beta'\{\overline{[\delta, \varphi']}\,\widehat{\psi\delta'} + \overline{\varphi'\delta}\,\widehat{[\psi, \delta']}\} +\\ &+ \beta\alpha'\{\overline{[\varphi, \delta']}\,\widehat{\delta\psi'} + \overline{\delta'\varphi}\,\widehat{[\delta, \psi']}\}\end{aligned}$$

5. Si δ est une dérivation de A dans B; $A, B \in U_K$, et $x_1, \ldots, x_n \in A$.

Alors à partir de (1):

$$\delta(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-1-i} \beta^i \varphi(x_1 \cdot \ldots \cdot x_i) \delta(x_{i+1}) \psi(x_{i+2} \cdot \ldots \cdot x_n) \tag{7}$$

étant $\varphi(x_i)=1$ pour $i=0$, $\alpha^\circ=\beta^\circ=1$.

Si l'algèbre est associative, les dérivations sont de poids (1, 1) (prop. 6) et l'équation (7) s'écrit:

$$\delta(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(x_1 \cdot \ldots \cdot x_i) \delta(x_{i+1}) \psi(x_{i+2} \cdot \ldots \cdot x_n) \tag{8}$$

Si $x_1=x_2=\ldots=x_n$, on écrira $x^n=x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$; $n<r$, r est l'exposant d'un élément nilpotent.

$$\delta(x^n) = \sum_{i=0}^{n-1} [\varphi(x)]^i \delta(x) [\psi(x)]^{n-1-i} \tag{9}$$

avec $[\varphi(x)]^\circ=1$.

Remarque. On peut à partir de (9) obtenir la dérivée d'un polynôme $P(x)$; pour le cas des dérivations canoniques, soit de valence (I, I)

$$\delta(x^n) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i \delta(x) x^{n-1-i} \tag{10}$$

ou encore de (10) si l'algèbre est commutative: $\delta(x^n) = nx^{n-1} \cdot \delta(x)$.

On peut encore généraliser la règle des dérivations sur un anneau de quotients, donnée par [2] et [3].

Si chaque élément a un inverse pour la loi multiplicative

$$\forall x \in A, \exists x^{-1} \in A | xx^{-1} = e$$

(et aussi pour B); étant $\delta(e)=0$

$$\delta(xx^{-1}) = \alpha\delta(x)\psi(x^{-1}) + \beta\varphi(x)\delta(x^{-1}) = 0$$

$$\delta(x^{-1}) = -\alpha\beta[\varphi(x)]^{-1} \cdot \delta(x)\psi(x^{-1}) \tag{11}$$

et on obtient de (1) et (11)

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \alpha\{\delta(x)\psi(y^{-1}) - \varphi(x)[\varphi(y)]^{-1}\delta(y)\psi(y^{-2})\} \tag{12}$$

Pour les algèbres associatives et commutatives (12) devient:

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \psi(y^{-1})[\psi(y)]^{-1}\{\delta(x)\psi(y) - \psi(x)\delta(y)\}$$

Règle de Leibniz pour δ-dérivations. Soit δ une dérivation de A dans A de valence (ψ, φ) et poids (α, β).

Si

$$[\delta, \varphi]_- = [\delta, \psi]_- = 0$$

Alors on peut écrire la règle de Leibniz ([4] pour les dérivations canoniques)

$$\delta^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [\delta^{n-1} \circ (\beta\varphi)^i(x)][\delta^i \circ (\alpha\psi)^{n-i}(y)] \tag{13}$$

étant $(\beta\varphi)^i = \beta^i \varphi \circ \varphi \circ \overset{i}{\therefore} \circ \varphi$, $\delta^i = \delta \circ \delta \circ \overset{i}{\therefore} \circ \delta$
es $\varphi^\circ = \delta^\circ = I$

Généralisation de la règle de Leibniz. Si on définit le produit de $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ comme:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = x_1 \cdot (x_2 \cdot \ldots \cdot x_n).$$

On pose pour simplifier l'écriture $\binom{1/n}{x} = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. De l'équation (13) on a:

$$\delta^m \binom{1/n}{x} = \sum_{i_1=0}^{m} \binom{m}{i_1} [(\beta\varphi)^{m-i_1} \circ \delta^{i_1}(x_1)] \left[(\alpha\psi)^{i_1} \circ \delta^{m-i_1} \binom{2/n}{x}\right]$$

et si on applique (13) de nouveau à $\delta^{m-i} \binom{2/n}{x}$, on a:

$$\delta^{m-i_1} \binom{2/n}{x} = \sum_{i_2=0}^{m-i_1} \binom{m-i_1}{i_2} [(\beta\varphi)^{m-i_1-i_2} \circ \delta^{i_2}(x_2)] \left[(\alpha\psi)^{i_2} \circ \delta^{m-i_1-i_2} \binom{3/n}{x}\right]$$

ce qui permet d'écrire, pour être $\psi \in \mathrm{End}\,(A)$,

$$\delta^m \binom{1/n}{x} = \sum_{i_1=0}^{m} \sum_{i_2}^{m-i_1} \binom{m}{i_1} \binom{m-i_1}{i_2} [(\beta\varphi)^{m-i_1} \circ \delta^{i_1}(x_1)] \times$$
$$\times [(\alpha\psi)^{i_1} \circ (\beta\varphi)^{m-i_1-i_2} \circ \delta^{i_2}(x_2)] \left[(\alpha\psi)^{i_1} \circ (\alpha\psi)^{i_2} \circ \delta^{m-i_1-i_2} \binom{3/n}{x}\right]$$

et par récurrence on obtient la formule suivante:

$$\begin{aligned} \delta^m \binom{1/n}{x} = & \sum_{i_1=0}^{m} \sum_{i_2=0}^{m-i_1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{m-i_1-\ldots-i_{n-2}} \binom{m}{i_1} \binom{m-i_1}{i_2} \cdots \binom{m-i_1-i_2-\ldots-i_{n-2}}{i_{n-1}} \times \\ & \times \alpha^p \beta^q [\varphi^{m-i_1} \circ \delta^{i_1}(x_1)][\psi^{i_1} \circ \varphi^{m-i_1-i_2} \circ \delta^{i_2}(x_2)] \times \\ & \times \ldots \times [\psi^{i_1} \circ \psi^{i_2} \circ \ldots \circ \psi^{i_{n-2}} \circ \varphi^{m-i_1-\ldots-i_{n-1}} \circ \delta^{i_{n-1}}(x_{n-1})] \times \\ & \times [\psi^{i_1} \circ \psi^{i_2} \circ \ldots \circ \psi^{i_{n-1}} \circ \delta^{m-i_1-i_2-\ldots-i_{n-1}}(x_n)] \end{aligned} \tag{14}$$

la formule (14) est valable pour $m, n \in Z^+$.(La puissance indique le nombre de facteurs de la fonction composée,

$$\varphi^i \equiv \varphi \circ \varphi \circ \overset{i}{\therefore} \circ \varphi; \quad \psi^i \equiv \psi \circ \psi \circ \overset{i}{\therefore} \circ \psi).$$

Les valeurs de p et q sont:

$$\begin{aligned} p &= (n-1)i_1 + (n-2)i_2 + \ldots + 2i_{n-2} + i_{n-1} \\ q &= (n-1)m - (n-1)i_1 - (n-2)i_2 - \ldots - 2i_{n-2} - i_{n-1} \\ &= (n-1)m - p. \end{aligned}$$

Si l'algèbre est associative et commutative, la formule (14) devient:

$$\delta^m(x_1 \dots x_n) = \sum_i \binom{m}{i_1}\binom{m_1}{i_2} \dots \binom{m_{n-2}}{i_{n-1}} \prod_{\mu=1}^{n} \psi^{m-i_\mu} \circ \delta^{i_\mu}(x_\mu).$$

étant:

$$i_n = m - i_1 - i_2 - \dots - i_{n-1},$$
$$m_k = m - i_1 - i_2 - \dots - i_k,$$
$$0 \leqq i_k \leqq m_{k-1}.$$

References

[1] S. LANG, Algebra pp. 266, *Massachusett—California—London* 1971.
[2] I. KLEINER, Rings of Quotients of Rings of Derivations *Can. Math. Bull.* **3** (1968), 383.
[3] K. TEWARI, Complexes over a Complete Algebra of Quotients *Can. J. Math.* **19** (1967), 40.
[4] T. ANDERSON, Hereditary Radicals and Derivations of Algebras *Can. J. Math.* **20** (1969), 372.

(Reçu le 20 oktobre 1971.)