Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt I.

Von ZOLTÁN SZABÓ (Debrecen)

Einleitung

Die stationären, sich auf einen Basispunkt stützenden Iterationsverfahren für die Berechnung von Nullstellen der Gleichung

(1) $$f(x)=0$$

mit der reellen, explicit gegebenen Funktion $f(x)$ sind von der Gestalt

$$x_{n+1}=F(x_n), \qquad n=0, 1, 2, \dots .$$

In der Theorie dieser Iterationen sind die Untersuchungen von BÉLA BARNA [1] von grundlegender Bedeutung, und im weiteren werden wir die von ihm eingeführte Terminologie benützen.

Unter den stationären Iterationen hat die bequeme und einfache Newton—Raphson'sche Tangentenmethode eine große Bedeutung. Mit den Verallgemeinerungen und mit hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz des Verfahrens haben sich mehrere Autoren beschäftigt. Aber diese Untersuchungen trugen einen lokalen Charakter in dem Sinne, daß sie sich nur auf irgendeine Konvergenzumgebung der Nullstelle bezogen haben. Auf Grund der Einfachheit und der ziemlich schnellen Konvergenz verwendet man die Newtonsche Iteration vorzugsweise bei elektronischen Rechenanlagen. Gleichzeitig wirft die Anwendung von diesen Anlagen die folgende Frage auf: wie beeinflußt die Auswahl des ersten Näherungswertes den Konvergenzcharakter der Iterationsfolge?

Der erste, der sich mit der Untersuchung dieses Problems beschäftigte, war unseres Wissens A. RÉNYI [9]. Er bewies, daß es im Fall der Polynomen $f(x)$ mit drei verschiedenen, einfachen reellen Nullstellen und mit einer monoton zunehmenden zweiten Derivierten (wie z. B. $f(x) = x^{2m+1}-px+q$, $m=1, 2, \dots$ sind) abzählbar unendlich viele solchen Ausgangswerte x_0 auf der Zahlengeraden gibt, die aus den gebildeten Punktfolgen zur Nullstelle des Polynoms nicht konvergieren. (Die Ausgangspunkte mit dieser Eigenschaft werden Divergenzpunkte genannt.) A. RÉNYI warf auch die folgende Frage auf: Bilden die Divergenzpunkte eine abzählbare Menge, wenn $f(x)$ ein Polynom mit nur reellen Wurzeln ist?

B. BARNA hat eine verneinende Antwort auf diese Frage in seinen Arbeiten [2] und [3] gegeben. Er hat bewiesen, daß die Divergenzpunkte im allgemeinen eine überabzählbare Nullmenge bilden, falls das Polynom $f(x)$ mit reellen Koeffizienten mindestens 4, nur reelle Wurzeln hat.

Es wird hier eine neue Iterationsmethode vorgeschlagen (siehe 2.), bei der *kein Divergenzpunkt* auftreten kann. Das Wesen des Verfahrens ist in anschaulicher Form das Folgende. Modifizieren wir die Tangentenmethode so, daß wir den Begriff der Berührung beibehalten, und anstatt der Geraden eine geeignete Parabel mit der Achse $x=\text{const}$ an die Funktion $f(x)$ im Punkt $P=(x_n, f(x_n))$ anschmiegen. Die größere (bzw. kleinere) Nullstelle x_{n+1} der an die Funktion $f(x)$ im Punkt P angeschmiegten Parabel wird als ein neuer Näherungswert der Wurzel α von der Gleichung (1) konsequent ausgewählt. Mit der vorigen Parabel und mit $P=(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ wiederholen wir die Prozedur, u. s. w. Die Methode wird auf der untenstehenden Figur gezeigt.

Wir werden beweisen, daß die aus beliebigem Anfangspunkt x_0 ausgehende Iterationsfolge $\{x_n\}$ unter gewissen, ziemlich allgemeinen, die Anwendbarkeit nicht wesentlich einschränkenden Voraussetzungen gegen die Nullstelle der Gleichung (1) konvergiert. Also hat das Verfahren keinen Divergenzpunkt. Die Methode wird auf alle drei Kegelschnitte erstreckt. Im zweiten Teil dieser Arbeit werden wir eine Iterationsfamilie ohne Divergenzpunkt angeben, außerdem werden wir die Konvergenzgeschwindigkeit, den numerischen Effektivitätsindex und die Fehlerabschätzungen der Verfahren bestimmen.

In der Arbeit brauchen wir die folgenden Bezeichnungen und Bedingungen. A) Das Symbol $\langle u, v\rangle$ bedeutet das durch die reellen, von einander verschiedenen Zahlen u und v begrenzte, abgeschlossene Intervall:

$$\langle u, v\rangle \overset{\mathrm{df}}{=} [\min\{u, v\},\ \max\{u, v\}].$$

B) Wir setzen voraus, daß die zweite Ableitung der reellen Funktion $f(x)$ in der Strecke $[a, b]$ existiert, und beschränkt ist. Deshalb sind die Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ dort stetig, und infolgedessen beschränkt. Diese Bedingungen, die in allen Behauptungen der Arbeit eine wichtige Rolle spielen werden, können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

(2) $\left\{\begin{array}{l}\text{Die reelle, im abgeschlossenen Intervall } I=[a, b] \text{ definierte} \\ \text{Funktion } f(x) \text{ sei dort mindestens zweimal differenzierbar,} \\ \text{und} \\ \qquad |f(x)| \leqq M, \\ \qquad |f'(x) \leqq M_1 \neq 0, \\ \qquad |f''(x)| \leqq M_2, \qquad x \in I. \end{array}\right.$

1. *Die Methode der Berührungshyperbeln*

Betrachten wir die Hyperbel

$$y = \pm c\sqrt{1+x^2} \qquad (c>0),$$

die eine Transformierte der gleichschenkeligen Hyperbel ist. Sichtbar beeinflußt die Konstante c die „Dickheit" der Hyperbel. (Wie wir im Lemma sehen werden, wird der Wert von c so ausgewählt, daß der an die Funktion $f(x)$ geschmiegte und parallel verschobene Hyperbelzweig unterhalb (bzw. oberhalb) unserer Funktion liegt, falls der Wert von $f(x_0)$ positiv (bzw. negativ) ist.)

Also schmiegen wir den Hyperbelzweig $y=-c\sqrt{1+x^2}$ (bzw. $y=c\sqrt{1+x^2}$) parallel an die Funktion $f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ so an, daß dort auch die Tangenten von beiden Kurven zusammenfallen. Die angeschmiegte Hyperbel hat die Form

$$h(x) = A \mp c\sqrt{1+(x-B)^2}.$$

Die Konstanten A und B können aus den Gleichungen

$$f(x_0) = h(x_0)$$

und

$$f'(x_0) = h'(x_0)$$

berechnet werden. So erhalten wir die Gleichung der vorher erwähnten Berührungshyperbel:

$$h(x) = f(x_0) \pm \frac{c^2}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}} \mp c\sqrt{1+\left[x-x_0 \mp \frac{f'(x_0)}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}}\right]^2}, \tag{3}$$

wo die Quadratwurzeln mit positiven Werten berücksichtigt werden müssen, und gleichzeitig die oberen (bzw. die unteren) Vorzeichen in Betracht genommen werden im Falle, daß der Wert von $f(x_0)$ positiv (bzw. negativ) ist. (3) ist also die Gleichung des die Kurve $y=f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ berührenden „unteren", bzw. „oberen" Hyperbelzweiges mit der reellen Achse von der Gestalt $x=B$.

Lemma 1. *Wenn die Bedingungen* (2) *erfüllt sind, außerdem*

$$c^2 = 2M_1^2 + \frac{16}{3} M_2^2$$

und

$$f(x_0) \neq 0,$$

dann ist der Wert der durch die Gleichung (3) *gegebenen (entsprechenden) Funktion $h(x)$ in der Strecke I im Fall $f(x_0)>0$ (bzw. $f(x_0)<0$) nicht größer (bzw. kleiner), als $f(x)$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns nur mit dem Fall $f(x_0)>0$ beschäftigen, im gegenteiligen Fall betrachten wir nämlich die Funktion $-f(x)$.

Wir müssen einsehen, daß die Differenz

$$D(x) = f(x) - h(x)$$

in der Strecke I nicht negativ ist, d.h.

$$D(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{c^2}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}} + c\sqrt{1+\left[x-x_0-\frac{f'(x_0)}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}}\right]^2} \geqq 0, \qquad x \in I.$$

Nach den Voraussetzungen gilt die Relation

$$c^2 - f'^2(x_0) > 0.$$

Im Falle $x=x_0$ ist die Behauptung trivial. Es sei also im weiteren $x \neq x_0$. Wenden wir den Satz von Lagrange auf die Differenz der ersten zwei Glieder an:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)\cdot(x-x_0), \qquad \xi \in \langle x_0, x\rangle.$$

Der Wert der Funktion $D(x)$ ist nicht negativ genau dann, wenn die Ungleichung

$$\frac{c^2}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}}-f'(\xi)(x-x_0)\leqq c\sqrt{1+\left[x-x_0-\frac{f'(x_0)}{\sqrt{c^2-f'(x_0)}}\right]^2}$$

erfüllt ist. Wenn die linke Seite nicht positiv ist, ist der Beweis zu Ende. Andernfalls erheben wir beide Seiten ins Quadrat:

$$\frac{c^4}{c^2-f'^2(x_0)}-2f'(\xi)(x-x_0)\frac{c^2}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}}+f'^2(\xi)(x-x_0)^2\leqq$$

$$\leqq c^2\left[1+(x-x_0)^2-\frac{2f'(x_0)(x-x_0)}{\sqrt{c^2-f'^2(x)}}+\frac{f'^2(x_0)}{c^2-f'^2(x_0)}\right],$$

woraus sich nach Umordnung die Relation

$$\frac{2c^2(x-x_0)[f'(x_0)-f'(\xi)]}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}}\leqq(x-x_0)^2[c^2-f'^2(\xi)]$$

ergibt. Nun wenden wir nochmals den Lagrange'schen Satz auf die Differenz $f'(x_0)-f'(\xi)$ an. Nach Einsetzung bekommen wir die Ungleichung

$$-f''(\hat{\xi})(\xi-x_0)(x-x_0)\frac{2c^2}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}}\leqq(x-x_0)^2[c^2-f'^2(\xi)],\qquad \hat{\xi}\in\langle x_0,\xi\rangle.$$

Aus der Relation $\xi\in\langle x_0, x\rangle$ folgt, daß der Wert des Produktes $(\xi-x_0)(x-x_0)$ nicht negativ ist. Deswegen kann die erhaltene Ungleichung folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$-f''(\hat{\xi})\frac{2c^2\vartheta}{\sqrt{c^2-f'(x_0)}}\leqq c^2-f'^2(\xi),$$

wo

$$\vartheta=\frac{\xi-x_0}{x-x_0}\qquad(x\neq x_0,\ 0\leqq\vartheta\leqq 1).$$

Wenn hier $f''(\hat{\xi})\geqq 0$ gilt, ist der Beweis zu Ende. Es sei also $f''(\hat{\xi})<0$. Es genügt zur Erfüllung unserer Ungleichung, wenn

$$\frac{2c^2|f''(\hat{\xi})|}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}}\leqq c^2-f'^2(\xi)$$

ist. Die linke (bzw. rechte) Seite wird nicht ab- (bzw. zu-) nehmen, wenn wir an Stelle der ersten Differentialquotienten von $f(x)$ den Wert M_1, und an Stelle von $|f''(\hat{\xi})|$ den Wert M_2 einsetzen:

$$2c^2M_2\leqq(c^2-M_1^2)^{3/2}.$$

Nach den Voraussetzungen ist

$$c^2=2M_1^2+\frac{16}{3}M_2^2,$$

und so kann die Ungleichung folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$2M_2\left(2M_1^2+\frac{16}{3}M_2^2\right)\leqq\left(M_1^2+\frac{16}{3}M_2^2\right)^{3/2}.$$

Jetzt erheben wir beide Seiten ins Quadrat. Nach Umordnung erhalten wir die Relation

$$M_1^6+\frac{2^{10}}{3^3}M_2^6\geqq 0,$$

die offenbar erfüllt ist. Damit ist der Beweis beendet.

Hiernach sei nochmals $f(x_0)>0$, und außerdem seien die beiden Schnittpunkte des Hyperbelzweiges $h(x)$ mit der x-Achse x_1', x_1 mit $x_1'\leqq x_1$. Dann sind natürlich die Ungleichungen

$$x_1'\leqq x_0\leqq x_1$$

erfüllt, und aus der Beziehung (3) erhalten wir

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_1'\end{matrix}\right\}=x_0+\frac{f'(x_0)}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}}\pm\sqrt{\left[\frac{f(x_0)}{c}+\frac{c}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}}\right]^2-1}. \tag{4}$$

Im falle $x_1, x_1'\in I$ gilt nach Lemma 1, daß

$$h(x)\leqq f(x),\quad x\in\langle x_1', x_1\rangle\subseteqq I,$$

und speziell

$$0=h(x_1')\leqq f(x_1'),$$

beziehungsweise

$$0=h(x_1)\leqq f(x_1).$$

Wenn wir unser Verfahren mit dem Punkt x_1 anstatt x_0 fortsetzen, erhalten wir die Abszisse x_2. So entsteht die monoton wachsende Iterationsfolge

$$x_0, x_1, x_2, \ldots .$$

Hier können drei Fälle vorkommen:

1) $$f(x_n)\neq 0,\quad x_n\in I\quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Hier nimmt die Folge $\{x_n\}$ streng monoton zu und ist außerdem beschränkt, woraus ihre Konvergenz folgt:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha\in I.$$

Aus der Gleichung (4) bekommen wir mit Grenzübergang $f(\alpha)=0$.

2) Es gibt ein Index $i>0$ mit $f(x_i)=0$, $x_i\in I$.

Hier ist (auch nach (4))

$$x_i\equiv x_{i+k}\qquad (k=1, 2, \ldots),$$

deswegen sind die folgenden Gleichungen trivialerweise erfüllt:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_i=\alpha,\qquad f(\alpha)=0.$$

3) Es gibt mindestens ein Index $i>0$ so, daß $x_i \notin I$.

Es gelten nach dem Lemma in den ersten beiden Fällen

$$f(x) \neq 0, \quad x \in [x_0, \alpha),$$

und im dritten Fall

$$f(x) \neq 0, \quad x \in [x_0, b].$$

Ganz ähnlich kann die (monoton abnehmende) Folge

$$x_0, x_1', x_2', \ldots$$

überprüft werden, die Stelle der Überprüfung ist aber das Intervall $[a, x_0]$.

Auch im Fall $f(x_0)<0$ können ähnliche Überlegungen durchgeführt werden, für die Berechnung von x_1 und x_1' wird jedoch die Formel

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_1' \end{matrix}\right\} = x_0 - \frac{f'(x_0)}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}} \pm \sqrt{\left[-\frac{f(x_0)}{c} + \frac{c}{\sqrt{c^2-f'^2(x_0)}}\right]^2 - 1}$$

verwendet.

Wir summieren unsere bisherigen Ergebnisse im folgenden

Satz 1. *Wenn die Bedingungen* (2) *erfüllt sind, außerdem*

$$c^2 = 2M_1^2 + \frac{16}{3} M_2^2$$

und $f(x_0) \neq 0$ *in irgendeinem Ausgangspunkt* $x_0 \in (a, b)$, *dann konvergiert die durch die rekursive Formel*

$$x_{n+1} = x_n + \operatorname{sgn} f(x_0) \frac{f'(x_n)}{\sqrt{c^2-f'^2(x_n)}} \pm \sqrt{\left[\frac{|f(x_n)|}{c} + \frac{c}{\sqrt{c^2-f'^2(x_n)}}\right]^2 - 1}, \tag{5}$$

$$(n=0, 1, 2, \ldots)$$

bestimmte, monotone Folge $\{x_n\}$ *zu der rechts (bzw. links) von* x_0 *nächstliegenden Nullstelle* $\alpha \in I$ *der Funktion* $f(x)$, *falls das obere (bzw. untere) Vorzeichen konsequent berücksichtigt wird. Wenn* $\alpha \notin I$, *so verläßt die Folge die Strecke* I.

2. *Die Methode der Berührungsparabeln*

Wir verfolgen einen, zu dem Obenstehenden ähnlichen Gedankengang, und werden in diesem Abschnitt ein gleichungslösendes Iterationsverfahren angeben, das anstelle von Hyperbeln mit den Parabeln

$$y = \pm c x^2, \qquad c>0 \tag{6}$$

arbeitet.

Wie wir uns leicht überzeugen können, kann die Gleichung der die Kurve $y=f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ berührenden (und parallel verschobenen) Parabel mit einer auf der Abszissenachse senkrechten Achse folgendermaßen angegeben werden:

$$p(x) = f(x_0) - c \operatorname{sgn} f(x_0)(x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0). \tag{7}$$

Es gilt das

Lemma 2. *Wenn die Bedingungen* (2) *erfüllt sind,* $c=M_2$ *und* $f(x_0)\neq 0$, *dann ist der Wert der durch Gleichung* (7) *gegebenen (entsprechenden) Funktion* $p(x)$ *in der Strecke* I *nicht größer (bzw. nicht kleiner), als der Wert von* $f(x)$, *falls* $f(x_0)>0$ (*bzw.* $f(x_0)<0$).

Beweis. Es genügt, wenn wir uns nur mit dem Fall $f(x_0)>0$ beschäftigen, im entgegengesetzten Fall betrachten wir nämlich die Funktion $-f(x)$. Wir haben zu beweisen, daß

$$D(x) = f(x) - p(x) \geqq 0,$$

d.h.

$$f(x) - f(x_0) + c(x-x_0)^2 - f'(x_0)(x-x_0) \geqq 0, \qquad x \in I.$$

Nun wenden wir den Lagrange'schen Satz auf die Differenz der ersten beiden Glieder an:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)\cdot(x-x_0), \quad \xi \in \langle x_0, x\rangle.$$

So ist der Wert von $D(x)$ nicht negativ genau dann, wenn die Ungleichung

$$(x-x_0)[f'(\xi) - f'(x_0) + c(x-x_0)] \geqq 0 \tag{8}$$

erfüllt ist.

Im Punkt $x=x_0$ ist die Behauptung trivial. Im weiteren setzen wir voraus, daß $x-x_0 \neq 0$.

Nochmals wenden wir den Satz von Lagrange auf die Differenz $f'(\xi)-f'(x_0)$ an. Nach der Substitution erhalten wir die Relation

$$(x-x_0)[c(x-x_0) + f''(\hat{\xi})(\xi - x_0)] \geqq 0,$$

d.h.

$$(x-x_0)^2[c + \vartheta f''(\hat{\xi})] \geqq 0,$$

wo $\hat{\xi} \in \langle x_0, \xi\rangle$ und $0 \leqq \vartheta = \dfrac{\xi - x_0}{x - x_0} \leqq 1.$

Wenn $f''(\hat{\xi}) \geqq 0$, ist der Beweis zu Ende. Im entgegengesetzten Fall ist unsere Ungleichung mit

$$\vartheta |f''(\hat{\xi})| \leqq c$$

äquivalent, und dies ist nach den Voraussetzungen offensichtlich erfüllt. Damit haben wir das Lemma bewiesen.

Wenn wir den nach dem Lemma des vorigen Abschnittes stehenden Gedankengang verfolgen, gelangen wir zum

Satz 2. *Wenn die Voraussetzungen* (2) *erfüllt sind, ferner* $c=M_2$ *und* $f(x_0)\neq 0$ *im Ausgangspunkt* $x_0 \in (a, b)$ *gilt, dann strebt die durch die rekursive Formel*

$$x_{n+1} = x_n + \operatorname{sgn} f(x_0)\frac{f'(x_n)}{2c} \pm \sqrt{\frac{|f(x_n)|}{c} + \left[\frac{f'(x_n)}{2c}\right]^2} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

bestimmte, monotone Folge $\{x_n\}$ *nach der rechts (bzw. links) von* x_0 *nächstliegenden Nullstelle* $\alpha \in I$ *von* $f(x)$, *falls das obere (bzw. untere) Vorzeichen konsequent berücksichtigt wird. Im Falle* $\alpha \notin I$ *verläßt die Folge die Strecke I.*

3. *Die Methode der Berührungsellipsen*

Ähnlich zu den beiden vorigen Iterationen kann auch das mit der Ellipse verbundene Iterationsverfahren eingeführt werden. Wir betrachten die Ellipse

$$y = \pm c\sqrt{1-x^2} \qquad (c>0, \quad |x| \leqq 1).$$

Die Gleichung der parallel verschobenen Berührungsellipse ist von der Gestalt

$$(10) \qquad e(x) = f(x_0) \mp \frac{c^2}{\sqrt{c^2+f'^2(x_0)}} \pm c\sqrt{1-\left[x-x_0 \mp \frac{f'(x_0)}{\sqrt{c^2+f'^2(x_0)}}\right]^2},$$

wo im Fall $f(x_0)>0$ (bzw. $f(x_0)<0$) gleichzeitig die oberen (bzw. unteren) Vorzeichen berücksichtigt werden müssen. Aus geometrischen Gründen ist es offenbar, daß die Relationen

$$|f(x)| \leqq M \leqq c, \quad x \in I$$

erfüllt sein müssen.

Lemma 3. *Wenn die Bedingungen* (2), $c = \max\left\{M, \frac{11}{5} M_1, 2M_2\right\}$ *und* $f(x_0) \neq 0$ *erfüllt sind, dann ist der Wert der durch die Gleichung* (10) *definierten (entsprechenden) Funktion* $e(x)$ *im abgeschlossenen Intervall I im Falle* $f(x_0)>0$ (*bzw.* $f(x_0)<0$) *nicht größer (bzw. kleiner), als der Wert von* $f(x)$.

BEWEIS. Es genügt auch jetzt nur den Fall $f(x_0)>0$ zu betrachten. Wir werden zeigen, daß

$$D(x) = f(x) - e(x) \geqq 0,$$

d. h.

$$f(x) - f(x_0) + \frac{c^2}{\sqrt{c^2+f'^2(x_0)}} - c\sqrt{1-\left[x-x_0-\frac{f'(x_0)}{\sqrt{c^2+f'^2(x_0)}}\right]^2} \geqq 0.$$

Wenn $x=x_0$, dann ist die Behauptung trivial. Also sei $x \neq x_0$. Wenn wir den Satz von Lagrange verwenden, erhalten wir

$$(11) \qquad f'(\xi)(x-x_0) + \frac{c^2}{\sqrt{c^2+f'^2(x_0)}} \geqq c\sqrt{1-\left[x-x_0-\frac{f'(x_0)}{\sqrt{c^2+f'^2(x_0)}}\right]^2},$$

wo $\xi \in \langle x_0, x\rangle$.

Zuerst sehen wir ein, daß die linke Seite nicht negativ ist, d.h.

$$\frac{c^2}{\sqrt{c^2+f'^2(x_0)}} \geqq -f'(\xi)(x-x_0).$$

Ist hier die rechte Seite nicht positiv, so ist unsere Behauptung richtig. Im gegenteiligen Fall erheben wir beide Seiten ins Quadrat:

$$\frac{c^4}{c^2+f'^2(x_0)} \geqq f'^2(\xi)(x-x_0)^2.$$

Da die Länge der mit der x-Achse parallelen Ellipsenachse 2 ist, nimmt die linke Seite nicht zu und die rechte Seite nicht ab, wenn an die Stelle von $(x-x_0)^2$ bzw. der ersten Differentialquotienten der Wert von 4 bzw. M_1 eingesetzt wird:

$$\frac{c^4}{c^2+M_1^2} \geqq 4M_1^2.$$

Nach Umordnung bekommen wir die zu beweisende Relation

$$(c^2-2M_1^2)^2 \geqq 8M_1^4.$$

Wenn an die Stelle von c der Wert $2{,}2M_1$ eingesetzt wird, nimmt die linke Seite nach den Voraussetzungen nicht zu:

$$2{,}84^2 M_1^4 \geqq 8M_1^4.$$

Aus der erhaltenen evidenten Ungleichung folgt, daß die linke Seite von (11) wirklich nicht negativ ist.

Wir erheben also beide Seiten von (11) ins Quadrat. Nach Umordnung erhalten wir die Ungleichung

$$(x-x_0)^2(c^2+f'^2(\xi))\sqrt{c^2+f'^2(x_0)} \geqq 2c^2(x-x_0)\big(f'(x_0)-f'(\xi)\big).$$

Auf die Differenz $[f'(x_0)-f'(\xi)]$ wenden wir den Lagrange'schen Satz an. Wenn wir die Bezeichnung

$$\vartheta = \frac{\xi-x_0}{x-x_0} \qquad (0\leqq\vartheta\leqq 1)$$

einführen, und mit dem Ausdruck $(x-x_0)^2$ abkürzen, bekommen wir die Beziehung

$$(c^2+f'^2(\xi))\sqrt{c^2+f'^2(x_0)} \geqq 2c^2\vartheta(-f''(\mathring{\xi})), \qquad \mathring{\xi}\in\langle x_0,\xi\rangle.$$

Falls $f''(\mathring{\xi})\geqq 0$, ist der Beweis zu Ende. Andernfalls nimmt die linke Seite nicht zu und die rechte Seite nicht ab, wenn an die Stelle der ersten Differentialquotienten (bzw. $|f''(\mathring{\xi})|$, bzw. ϑ) der Wert von Zero (bzw. M_2, bzw. 1) eingesetzt wird:

$$c^3 \geqq 2c^2 M_2,$$

und diese Relation ist nach den Voraussetzungen erfüllt. Damit haben wir das Lemma bewiesen.

Wenn wir die schon bekannten Überlegungen auch hier durchführen, erhalten wir den zusammenfassenden

Satz 3. *Wenn die Bedingungen* (2), *außerdem* $c=\max\left\{M, \frac{11}{5}M_1, 2M_2\right\}$, *und* $f(x_0)\neq 0$ *im Ausgangspunkt* $x_0\in(a,b)$ *erfüllt sind, dann konvergiert die durch die re-*

kursive Formel

$$(12) \qquad x_{n+1} = x_n + \operatorname{sgn} f(x_0) \frac{f'(x_n)}{\sqrt{c^2+f'^2(x_n)}} \pm \sqrt{1 - \left[\frac{|f(x_n)|}{c} - \frac{c}{\sqrt{c^2+f'^2(x_n)}} \right]^2}$$

definierte, monotone Folge $\{x_n\}$ *nach der rechts (bzw. links) von dem Ausgangspunkt* x_0 *nächstliegenden Nullstelle* $\alpha \in I$ *von* $f(x)$, *falls das obere (bzw. untere) Vorzeichen konsequent berücksichtigt wird. Im Fall* $\alpha \notin I$ *verläßt die Folge* $\{x_n\}$ *die Strecke I.*

BEMERKUNGEN 1. Wir erhalten die obenstehenden Iterationsformeln auch dann, wenn wir, anstatt den entsprechenden Kegelschnitt entlang des y-Achse mit einer Konstanten $c \geqq 0$ zu dehnen die Funktion $f(x)$ dort schrumpfen lassen. Dies, und außerdem auch die Form der Iterationsformeln macht es selbstverständlich und zweckmäßig, die Bezeichnung $g(x) = \frac{f(x)}{c}$ einzuführen. Mit ihrer Hilfe können die drei gleichungslösenden Iterationsverfahren auf eine einheitliche, zusammenfassende und verkürzte Weise aufgeschrieben werden:

$$x_{n+1} = x_n + G(x_n) F(x_n) + s\sqrt{H(x_n)},$$

wo $s = \operatorname{sgn}(\alpha - x_0)$ und $F(x_n) = \operatorname{sgn} f(x_0) g'(x_n)$, ferner

$$G(x_n) = [1 - g'^2(x_n)]^{-1/2}, \quad H(x_n) = [|g(x_n)| + G(x_n)]^2 - 1$$

im Fall der Berührungshyperbeln,

$$G(x_n) \equiv \frac{1}{2}, \quad H(x_n) = |g(x_n)| + \frac{g'^2(x_n)}{4}$$

im Fall der Berührungsparabeln und

$$G(x_n) = [1 + g'^2(x_n)]^{-1/2}, \quad H(x_n) = 1 - [|g(x_n)| - G(x_n)]^2$$

im Fall der Berührungsellipsen.

2. Aus den Beweisen der Lemmata geht es hervor, daß die Voraussetzung $|f''(x)| \leqq M_2$ nur in solchen Punkten $x \in I$ erfüllt werden muß, wo $f(x_0) f''(x) < 0$ gilt, d.h. wo die Konvexität des Berührungskegelschnittes und der Funktion $f(x)$ übereinstimmt.

3. In unseren Beweisen haben wir die Endlichkeit des Intervalls I nicht verwendet. Auch im Falle $a = -\infty$ (bzw. $b = \infty$) ist jede der Behauptungen über die Konvergenz der Iterationsfolgen mit der selbstverständlichen Bemerkung gültig, daß die monotone Folge $\{x_n\}$ im Fall $\alpha \notin (-\infty, x_0]$ (bzw. $\alpha \notin [x_0, \infty)$) divergent ist.

4. In Verbindung mit den Konvergenzsätzen der Iterationen wollen wir bemerken, daß unter den rechts (bzw. links) von x_0 liegenden Nullstellen von $f(x)$ eine kleinste (bzw. größte) immer existiert, da die Funktion $f(x)$ stetig ist.

Literatur

[1] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen I., II. *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960), 16—40; **13** (1966), 169—172.

[2] B. BARNA, Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen I—IV. *Publ. Math. Debrecen* **3** (1953), 109—118; **4** (1956), 384—397; **8** (1961), 193—207; **14** (1967), 91—97.

[3] B. BARNA, Über das Newtonsche Verfahren zur Annäherung von Wurzeln algebraischer Gleichungen. *Publ. Math. Debrecen* **2** (1951), 50—63.
[4] I. S. BEREZIN—N. P. ZHIDKOV, Computing Methods. *Oxford—London—Edinburgh—New York—Paris—Frankfurt*, 1965.
[5] E. BODEWIG, On types of convergence and on the behavior of approximations in the neighborhood of a multiple root of an equation. *Quarterly of Applied Mathematics* **7** (1949), 325—333.
[6] S. E. MIKELADZE, Reschenije tschislennich urawnenij. *Tbilisi*, 1965. *(Russisch)*
[7] A. M. OSTROWSKI, Solution of Equations and Systems of Equations. *New York—London*, 1960.
[8] A. RALSTON, A first course in numerical analysis. *McGraw-Hill, Inc.*, 1965.
[9] RÉNYI A., A Newton-féle gyökközelitő eljárásról (Über das Newtonsche Annäherungsverfahren). *Mat. Lapok* **1** (1950), 278—293. *(Ungarisch)*
[10] E. SCHRÖDER, Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. *Math. Ann.* **2** (1870), 317—365.
[11] J. F. TRAUB, Iterative Methods for the Solution of Equations. *Prentice-Hall, N. J.*, 1964.
[12] J. F. TRAUB, On a Class of Iteration Formulas and Some Historical Notes. *Communications of ACM* **4** (1961b), 276—278.

(Eingegangen am 2. Juli 1972.)