О сходимости Лагранжева интерполирования по узлам Лагерра

Г. П. НЕВАИ (Будапешт)*)

1. Пусть $\alpha(>-1)$ произвольное, но фиксированное число, и

$$x_1 = x_{1n}(\alpha) > x_2 > \ldots > x_n \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{1}$$

корни многочленов Лагерра $p_n(\alpha; x)$, ортонормальных на положительной полуоси с весом $x^\alpha e^{-x}$. Пусть далее

$$l_k(x) = l_{kn}(\alpha; x) = \frac{p_n(\alpha; x)}{p_n'(\alpha; x_k)(x-x_k)} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

фундаментальные многочлены Лагранжева интерполирования по узлам (1). Обозначим через

$$L_n(x, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k(x) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

интерполяционный многочлен Лагранжа, совпадающий с наперед заданной функцией $f(x)$ $(0 \leqq x < \infty)$ в узлах (1).

Целью настоящей заметки является доказательство следующего предложения.

Теорема. *Пусть функция $g(x) = f(x^2)$ равномерно непрерывна и ограничена на положительной полуоси. Если на отрезке $[a, b]$ $(0 < a < b < \infty)$ $\operatorname*{var}_a^b f < \infty$, то тогда для всех точек x из интервала (a, b) имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} L_n(x, f) = f(x), \tag{2}$$

причем сходимость равномерна на любом отрезке, содержащемся в интервале (a, b).

2. Прежде всего перечислим некоторые известные результаты, которые в дальнейшем нам понадобятся. Обозначим через

$$\lambda_k = \lambda_{kn}(\alpha) = \left[\sum_{j=0}^{n-1} p_j(\alpha; x_{kn})^2\right]^{-1} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

числа Кристоффеля веса $x^\alpha e^{-x}$. Известно, что

*) G. P. Névai (Budapest).

при фиксированных n последовательность $\{\lambda_{kn}\}$ *возрастает для*

(3) $$x_k<\alpha+\frac{1}{2} \text{ и убывает для } x_k>\alpha+\frac{1}{2},$$

*далее**

(4) $$\lambda_{kn}=O(n^{-1/2}) \qquad (0<x_k\leqq c)$$

(см. Г. Сеге [1], § 15. 3.) Г. Фройд [2] показал, что

(5) $$[x_{kn}-x_{k+1,n}]^{\pm 1}=O(n^{\mp 1/2}) \qquad (0<x_{kn}\leqq c).$$

В нашей работе [4] мы установили следующие соотношения:

(6) $$l_k(x)=(-1)^{k+1}p_n(\alpha;x)\frac{\sqrt{\lambda_k x_k}}{x-x_k} \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

(см. формулу (19) в [4]),

(7) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{l_k^2(x)}{\lambda_k}=O(n^{1/2}) \qquad (c\leqq x\leqq c)^{**}$$

(см. там же (5) и (23)),

(8) $$\sum_{k=1}^{n}|l_k(x)|=O(\log n) \qquad (c\leqq x\leqq c)$$

(см. там же (37)),

(9) $$|l_k(x)|=O(1) \qquad (c\leqq x,\ x_k\leqq c)$$

(это следует непосредственно из формул (4) и (7)), и для всех фиксированных $\varepsilon(>0)$

(10) $$\sum_{|x-x_k|>\varepsilon}|l_k(x)|=O(1) \qquad (c\leqq x\leqq c)$$

(см. там же (17)). Далее в книге Г. Сеге [1] (§ 7. 6) показано, что

(11) $$|p_n(\alpha;x)|=O(n^{-1/4}) \qquad (c\leqq x\leqq c).$$

3. Лемма. *При всех натуральных n мы имеем*

(12) $$\sum_{k=1}^{n}|l_{kn}(x)+l_{k+1,n}(x)|=O(1) \qquad (c\leqq x\leqq c)$$

$(l_{n,n+1}(x)\equiv 0)$.

Доказательство. Пусть $x\in[c_1,c_2]$, где $0<c_1<c_2<\infty$ и $\varepsilon=\frac{c_1}{2}$. В силу неравенств (5), (9) и (10) нам достаточно показать, что

$$\sum_{\frac{1}{\sqrt{n}}\leqq|x-x_k|,\ |x-x_{k+1}|\leqq\varepsilon}|l_k(x)+l_{k+1}(x)|=O(1) \qquad (c_1\leqq x\leqq c_2).$$

---

* Под c будем понимать произвольные, но фиксированные, вообще говоря различные, конечные, полижотельные числа.

** Это следует расшифровать так, что оценка (7) имеет место равномерно на любом фисированном отрезке, содержащемся в интервале $(0,\infty)$.

Для простоты мы будем оценивать лишь сумму по индексам $x+\frac{1}{\sqrt{n}} \leqq x_{k+1} \leqq$ $\leqq x+\varepsilon$, другая же оценивается аналогичным образом. В силу (6) и (11)*

$$\sum{}' \equiv \sum{}' |l_k(x)+l_{k+1}(x)| = O(n^{-1/4}) \sum{}' \left| \frac{\sqrt{\lambda_k x_k}}{x_k - x} - \frac{\sqrt{\lambda_{k+1} x_{k+1}}}{x_{k+1}-x} \right| =$$

$$= O(n^{-1/4}) \left[\sum{}' \sqrt{\lambda_k} \left| \frac{\sqrt{x_k}}{x_k - x} - \frac{\sqrt{x_{k+1}}}{x_{k+1}-x} \right| + \sum{}' \frac{\sqrt{x_{k+1}}}{x_{k+1}-x} \left| \sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_{k+1}} \right| \right].$$

Теперь из соотношений (3), (4) и (5) следует, что втроая сумма в квадратных скобках имеет в точности тот же порядок, что и первая сумма в квадратных скобках. Значит, принимая во внимание (4) и (5), получим

$$\sum{}' = O(n^{-1/2}) \sum{}' \left[\sqrt{x_k} \left| \frac{1}{x_k - x} - \frac{1}{x_{k+1}-x} \right| + \frac{\sqrt{x_k}-\sqrt{x_{k+1}}}{x_{k+1}-x} \right] =$$

$$= O(n^{-1/2}) \sum{}' \left[\frac{n^{-1/2}}{(x_{k+1}-x)^2} + \frac{n^{-1/2}}{x_{k+1}-x} \right] = O[n^{-1/2}(n^{1/2}+\log n)] = O(1).$$

Лемма доказана.

4. Следующее утверждение, которое — на наш взгляд — представляет собой самостоятельный интерес, играет центральную роль при доказательстве Теоремы.

Лемма. *(о равносходимости). Пусть* $[a_1, b_1] \subset (0, \infty)$ *произвольный, но фиксированный отрезок и* δ *любое фиксированное число из интервала* $\left(0, \frac{1}{2} a_1\right)$. *Если функция* $g(x)=f(x^2)$ *равномерно непрерывна и ограничена на положительной полуоси, то тогда*

$$(13) \qquad \left| L_n(x, f) - f(x) - \frac{1}{2} \sum_{|x-x_k|<\delta} [f(x_k)-f(x_{k-1})] l_k(x) \right| = o(1) \qquad (a_1 \leqq x \leqq b_1)$$

при $n \to \infty$.

Доказательство. Обозначим через $\bar{\omega}(f; t)$ модуль непрерывности функции $f(x^2)$. Так как $x_{1n}(\alpha)=O(n)$ (см. Г. Сеге [1], 6.32.6)), то — согласно теореме Джексона — при всех n существует многочлен $P_m(x)$ степени не выше $m=[n^{\frac{3}{4}}]$ такой, что

$$(14) \qquad |f(x)-P_m(x)| = O\left[\bar{\omega}\left(f; \frac{\sqrt{n}}{m}\right)\right] \qquad (0 \leqq x \leqq x_{1n}(\alpha)).$$

Отметим, что из (14) и неравенства Бернштейна следует оценка

$$(15) \qquad |P_m'(t)| = O\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right) = O(n^{1/4}) \qquad (a_1 - 2\delta \leqq t \leqq b_1 + 2\delta).$$

---

* $\sum{}'$ означает суммирование по тем индексам k, для которых $x+\frac{1}{\sqrt{n}} \leqq x_{k+1} \leqq x+\varepsilon$.

Мы имеем в силу (14)

$$L_n(x, f)-f(x) = L_n(x, f-P_m)+o(1) \qquad (a_1 \leqq x \leqq b_1). \tag{16}$$

Далее, если принять обозначение $f(x_{0n})=P_m(x_{0n})=0$ и $l_{n+1,\,n}(x)\equiv 0$, то элементарный подсчет показывает справеливость преобразования

$$\begin{aligned} L_n(x, f-P_m) = {} & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{[f(x_k)-P_m(x_k)]-[f(x_{k-1})-P_m(x_{k-1})]\}\,l_k(x)+ \\ & +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-P_m(x_k)][l_k(x)+l_{k+1}(x)]. \end{aligned} \tag{17}$$

Используя теперь соотношения (16), (17), (14), (10) и (12), получим, что

$$L_n(x,f)-f(x) = \frac{1}{2}\sum_{|x-x_k|<\delta}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\,l_k(x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{|x-x_k|<\delta}[P_m(x_k)-P_m(x_{k-1})]\,l_k(x)+o(1) \qquad (a_1 \leqq x \leqq b_1).$$

Ясно, что в силу (5), (8) и (15) имеем

$$\Big|\sum_{|x-x_k|<\delta}[P_m(x_k)-P_m(x_{k-1})]\,l_k(x)\Big| = O\left(\frac{\log n}{n^{1/4}}\right) \qquad (a_1 \leqq x \leqq b_1).$$

(13) следует теперь из двух последних формул.

5. Переходим к доказательству нашей Теоремы. Пусть a_1 и b_1 такие числа, что $a<a_1\leqq x\leqq b_1<b$ и $\delta=\frac{1}{2}\min\{a_1-a,\, b_1-b\}$. Тогда в силу (13)

$$|L_n(x, f)-f(x)| \leqq \frac{1}{2}\Big|\sum_{|x-x_k|<\delta}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\,l_k(x)\Big|+o(1) \qquad (a_1 \leqq x \leqq b_1).$$

Значит, применяя неравенство Коши, получим

$$|L_n(x, f)-f(x)| \leqq \frac{1}{2}\left\{\sum_{|x-x_k|<\delta}\lambda_k[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2\sum_{k=1}^{n}\frac{l_k^2(x)}{\lambda_k}\right\}^{1/2}+o(1) \quad (a_1 \leqq x \leqq b_1),$$

тоесть по (4) и (7)

$$|L_n(x, f)-f(x)| = O(1)\Big\{\sum_{|x-x_k|<\delta}[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2\Big\}^{1/2}+o(1) =$$

$$= O(1)\Big\{\operatorname*{var}_a^b f \max_{|x-x_k|<\delta}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\Big\}^{1/2}+o(1) \qquad (a_1 \leqq x \leqq b_1),$$

и Теорема доказана, так как в силу (5)

$$\max_{|x-x_k|<\delta}|f(x_k)-f(x_{k-1})| = o(1) \qquad (a_1 \leqq x \leqq b_1).$$

6. Если существует так называемый „принцип локализации" при интерполировании на бесконечном интервале, то в формулировке Теоремы достаточно предпологать непрерывность функции $f(x)$ лишь в точке x (соответственно на подотрезке интервала (a, b)). Нам кажется, что доказательство такого локализационного принципа (если он есть) весьма трудная задача, нам никак не удалось его доказать.

Наконец отметим, что аналогичную теорему доказали мы в статье [3] о Лагранжевом интерполировании по узлам Эрмита.

Литература

[1] Г. Сеге, Ортогональные многочлены, *Москва*, 1962.

[2] Г. Фройд, Об одном классе ортогональных многочленов, *Математические Заметки,* т. **9**, № 5 (1971), 511—520.

[3] Г. П. Неваи, Об интерполяционном процессе Лагранжа с узлами в корнях многочленов Эрмита, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **24** (1973), 209—213.

[4] NÉVAI G. P., A Laguerre-polinomok gyökein alapuló Lagrange-féle interpolációról, *Mat. Lapok,* **22** (1971, 149—164.

Замечание при корректуре. Недавно мы получили некоторые результаты, которые полностью решают проблемы локализации для Лагранжева интерполирования с узлами в корнях многочленов Эрмита. Эти наши результаты содержатся в нашей сатье „Локальные теоремы о сходимости интерполяционного процесса Лагранжа с узлами в корнях многочленов Эрмита" которая будет опубликована в журнале Acta Math. Acad. Sci. Hung.

(Поступула: 20. VII. 1972.)