Untersuchungen in vierdimensionalen verallgemeinerten Finslerräumen mit Hilfe eines natürlichen Vierbeins

Von A. MOÓR (Sopron)

Inhalt

§ 1. *Einleitung*

Unter einem natürlichen n-Bein eines n-dimensionalen Finslerraumes bzw. Linienelementraumes verstehen wir ein solches n-Bein $\underset{(\alpha)}{e^i}$, dessen Vektoren vom Grundelement $(x^i, \dot{x}^i)$ abhängig sind. Im Falle $n=2$ konstruierte im Finslerraum L. BERWALD (vgl. [1] und [2][1]) ein natürliches Zweibein, womit die Charakterisierung verschiedener Type der zweidimensionalen Finslerräume möglich wurde. Im dreidimensionalen Fall haben wir das natürliche n-Bein in unserem Aufsatz [6] konstruiert, und M. MATSUMOTO in [8] und besonders in [9] für interessante Probleme verwendet.

Im vierdimensionalen Finslerraum kommen schon bei der Konstruktion eines natürlichen Vierbeins große Schwierigkeiten vor, da außer l^i und A^i (vgl. [3]) keine weiteren geeigneten Vektoren existieren. Zwar könnte man z. B. aus den Krümmungstensoren durch kovariante Ableitung und Kontraktionen weitere Vektoren bekommen, doch wären diese Vektoren möglicherweise die Nullvektoren, somit wären sie für ein natürliches n-Bein nicht geeignet.

Da aber eben die physikalischen Feldtheorien den vierdimensionalen Fall benützen, halten wir es wünschenswert ein vierdimensionales natürliches Vierbein zu konstruieren und mit dessen Hilfe verschiedene Type der Linienelementräume zu untersuchen. Statt des Finslerraumes aber, werden wir eine Verallgemeinerung des

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern deuten an die Literatur am Ende unserer Arbeit.

Finslerraumes F_n^* zu Grunde legen, in der ein natürliches Vierbein konstruierbar ist. Diese Verallgemeinerung befindet sich in unserer Arbeit [5]; wir werden aber den μ_{ijk}-Tensor, der im [5] zum Tensor A_{ijk} addiert ist, für einen Nulltensor wählen, ferner sollen die g_{ij} den Fundamentaltensor eines Finslerraumes bestimmen, d.h. es sei im folgenden immer

$$g_{ik} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k}, \tag{1. 1}$$

wo $F(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$ homogen von erster Dimension ist, ferner $F(x, \dot{x})$ soll den im Finslerraum gewöhnlichen Bedingungen erfüllen (vgl. [10], Kap. I. § 1.).

Unsere wichtigste neue Resultate befinden sich in erster Reihe in den Paragraphen 6—8. Die Konstruktion des natürlichen Vierbeins werden wir in § 3. durchführen und in den Paragraphen 4 und 5 die allgemeinste Form gewisser Grundtensoren des vierdimensionalen verallgemeinerten Finslerraumes F_n^* bestimmen.

§ 2. *Grundgrößen und Grundformeln*

Zu Grunde gelegt sei ein n-dimensionaler F_n^*-Raum, in dem also die Metrik durch einen metrischen Fundamentaltensor von der Form (1. 1) festgelegt ist, die Grundelemente die Linienelemente $(x^i, \dot{x}^i)$ sind, die wir öfters kurz mit $(x, \dot{x})$ bezeichnen, und das invariante Differential, das die Parallelübertragung der Vektoren bestimmt, die Form

$$D\xi^i = d\xi^i + C_j{}^i{}_k \xi^j d\dot{x}^k + L_j{}^i{}_k dx^k \tag{2. 1}$$

hat. Dabei ist

$$C_j{}^i{}_k = \frac{1}{2} g^{ri} \frac{\partial g_{jr}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{4} g^{ri} \frac{\partial^3 F^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^r \partial \dot{x}^k},$$

wo g^{rj} selbstverständlich den kontravarianten metrischen Grundtensor bedeutet, ferner die $L_j{}^i{}_k$ bestimmen solche Übertragungsparameter, womit die Parallelübertragung metrisch ist, d.h. die Länge der Vektoren bei Parallelübertragung unverändert bleibt.

Unsere F_n^*-Raum ist also ein Spezialfall der in unserem Aufsatz [5] begründeten Geometrie, nur ist jetzt die Metrik auf Grund von (1. 1) eine Finslersche Metrik, die Übertragungsparameter sind $C_i{}^j{}_k$ und $L_i{}^j{}_k$. Diese letzten Übertragungsparameter sind mit Hilfe des von dem g_{ij} abgeleiteten entsprechenden Größen ausdrückbar (vgl. [5], § 2). Die Größen von [5] sind jetzt im F_n^*-Raum, die folgenden:

$$M^*_{ijk} = A_{ijk} = \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = FC_{ijk} \tag{2. 2a}$$

$$L^*_{ijk} = \Gamma^*_{ijk} - A_{ijt}\sigma_0{}^t{}_k + \sigma_{ijk} \tag{2. 2b}$$

(vgl. [5], Formeln (2. 13) und (2. 24), wo jetzt $\mu_{ijk}=0$, $J_k^t=\delta_k^t$ gesetzt werden soll), wobei σ_{ijk} einen in (i, j) schiefsymmetrischen und in $\dot{x}^i$ von nullter Ordnung homogenen Tensor bedeutet. *Der Tensor σ_{ijk} ist im wesentlichen außer der Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ die zweite Grundgröße des F_n^*-Raumes.*

Die Γ^*_{ijk} sind in (2. 2b) jetzt und im folgenden die aus g_{ij} gebildeten Cartanschen Übertragungsparameter (vgl. [3]) und der Index „0" in (2. 2b) bedeutet immer die Kontraktion mit l^i. Die Übertragungsparameter $L_j{}^i{}_k$ in (2. 1) hängen mit $L^{*i}_j{}_k$ durch die Formeln

(2. 3) $$L_j{}^i{}_k \equiv L^{*i}_j{}_k + A_j{}^i{}_r L^{*r}_0{}_k, \quad L_0{}^i{}_k \equiv L^{*i}_0{}_k$$

zusammen (vgl. [5], Gleichung (2. 10)).

Es kann leicht verifiziert werden, daß *die durch* (2. 1), (2. 2b) *und* (2. 3) *bestimmte Übertragung wirklich metrisch ist.* Drückt man das invariante Differential (2. 1) mit Hilfe der kovarianten Ableitungen aus, so wird

$$D\xi^i = \xi^i_{;k}\omega^k(d) + \nabla_k \xi^i dx^k,$$

wo

(2. 4) $$\xi^i_{;k} \overset{\text{def}}{=} F\frac{\partial \xi^i}{\partial \dot{x}^k} + A_j{}^i{}_k \xi^j$$

(2. 5) $$\nabla_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - F\frac{\partial \xi^i}{\partial \dot{x}^k} L^{*r}_0{}_k + L^{*i}_r{}_k \xi^r$$

die fundamentalen kovarianten Ableitungen, ferner

$$\omega^k(d) \equiv Dl^k \equiv dl^k + L^{*k}_0{}_t dx^t$$

das invariante Differential des Einheitsvektors l^i bedeutet (vgl. [5], (2. 8) und (2. 9)). Es kann nun unmittelbar verifiziert werden, daß

$$g_{ij;k} = 0, \quad \nabla_k g_{ij} = 0$$

ist, was unsere Behauptung beweist.

Die Torsions- und Krümmungstensoren des F^*_n-Raumes können in der gewöhnlichen Weise mit Hilfe der Cartanschen ω-Symbolik bestimmt werden (vgl. [5] § 7 und [3]). Bedeuten „d" und „δ" vertauschbare Differentiale, „D" und „Δ" die zu ihnen gehörigen invarianten Differentiale, so bestimmen

$$\Omega^i = (\Delta D - D\Delta)x^i$$

bzw.

$$\Omega^i{}_j \xi^j = (\Delta D - D\Delta)\xi^i$$

die Torsions- bzw. die Krümmungstensoren des F^*_n-Raumes. Wenn wir das invariante Differential (2. 1) in der Form:

(2. 6) $$D\xi^i = d\xi^i + (A_j{}^i{}_k \omega^k(d) + L^{*i}_j{}_k dx^k)\xi^j$$

schreiben, so wird

$$\Omega^i = A_j{}^i{}_k [dx^j \omega^k(d)] + \Omega^{*i}_j{}_k [dx^j dx^k],$$

wo die eckigen Klammern die äußeren Produkte der entsprechenden Differentiale bedeuten, ferner

$$\Omega^{*i}_j{}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(L^{*i}_j{}_k - L^{*i}_k{}_j)$$

ist. Die Torsionstensoren sind also $A_j{}^i{}_k$ und $\Omega^{*}{}_j{}^i{}_k$. Auf Grund von (2. 2b) sieht man, daß die Torsionstensoren des F_n^*-Raumes im wesentlichen $A_j{}^i{}_k$ und $\sigma_j{}^i{}_k$ sind.

Die Krümmungstensoren sind in der Formel

$$\Omega^i{}_j \equiv \frac{1}{2} R_j{}^i{}_{km}[dx^k dx^m] + P_j{}^i{}_{km}[dx^k \omega^m] + \frac{1}{2} S_j{}^i{}_{km}[\omega^k \omega^m]$$

enthalten, wo wir im folgenden nur $R_j{}^i{}_{km}$ und $S_j{}^i{}_{km}$ benötigen werden.

Der Krümmungstensor $S_j{}^i{}_{km}$ stimmt mit dem dritten Krümmungstensor des durch die Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ bestimmten Finslerraumes überein. Es ist:

$$S_j{}^i{}_{km} \overset{\text{def}}{=} A_j{}^s{}_m A_s{}^i{}_k - A_j{}^s{}_k A_s{}^i{}_m. \tag{2. 7}$$

Der erste Krümmungstensor hat die Form (vgl. [5], Formeln (7. 6) und (7. 7)):

$$R_j{}^i{}_{km} \overset{\text{def}}{=} \bar{R}_j{}^i{}_{km} + A_j{}^i{}_r \bar{R}_0{}^r{}_{km}, \tag{2. 8}$$

wo $\bar{R}_j{}^i{}_{km}$ den Hauptkrümmungstensor bedeutet. Es ist:

$$\bar{R}_j{}^i{}_{km} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial L^{*}{}_j{}^i{}_k}{\partial x^m} - F \frac{\partial L^{*}{}_j{}^i{}_k}{\partial \dot{x}^s} L^{*}{}_0{}^s{}_m + L^{*}{}_j{}^s{}_k L^{*}{}_s{}^i{}_m - k|m, \tag{2. 9}$$

wo $k|m$ den vorigen Ausdruck, aber mit vertauschen Indexen k und m bedeutet.

Auf Grund der Formeln (1. 18) und (1. 18a) der Arbeit [7] kann der Hauptkrümmungstensor des F_n^*-Raumes mit Hilfe des Hauptkrümmungstensors des Finslerraumes ausgedrückt werden. Es ist

$$\bar{R}_j{}^i{}_{km} = \overset{(F)}{\bar{R}}_j{}^i{}_{km} + \Phi_j{}^i{}_{km}, \tag{2. 10}$$

wo $\overset{(F)}{\bar{R}}_j{}^i{}_{km}$ den Hauptkrümmungstensor des Finslerraumes bedeutet — der stimmt formal mit (2. 9) überein, nur steht in seiner Formel statt $L^{*}{}_j{}^i{}_k$ der symmetrische Übertragungsparameter $\Gamma^{*}{}_j{}^i{}_k$ des Finslerraumes — und es ist

$$\Phi_j{}^i{}_{km} \overset{\text{def}}{=} \Lambda_j{}^i{}_k|_m - F \frac{\partial L^{*}{}_j{}^i{}_k}{\partial \dot{x}^t} \Lambda_0{}^t{}_m + \Lambda_j{}^t{}_k \Lambda_t{}^i{}_m - k|m \tag{2. 11}$$

mit

$$\Lambda_j{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} - A_j{}^i{}_t \sigma_0{}^t{}_k + \sigma_j{}^i{}_k, \tag{2. 12}$$

wo noch das Zeichen „$|_m$" die erste Cartansche kovariante Ableitung bedeutet. Diese Ableitung stimmt formal mit (2. 5) überein, nur stehen hier statt $L^{*}{}_i{}^j{}_k$ die Cartanschen Übertragungsparameter $\Gamma^{*}{}_i{}^j{}_k$.

§ 3. *Konstruktion des fundamentalen Vierbeins*

In diesem Paragraphen wollen wir aus dem zwei Fundamentalgrößen des F_4^*-Raumes ein orthonormales Vierbein konstruieren. Die Fundamentalgrößen sind — wie das im § 1 schon bemerkt wurde — die Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ und der in i, j schiefsymmetrische Tensor: σ_{ijk}.

Als erster Grundvektor des orthonormierten Vierbeins wählen wir den Einheitsvektor:

$$\underset{(1)}{e_i} \stackrel{\text{def}}{=} l_i \equiv \frac{\dot{x}^j}{F} g_{ij},$$

der die Richtung seines Stützelementes hat. Als zweiter Grundvektor wählen wir den auf Eins normierten Torsionsvektor A_i^*. Es ist somit

$$\underset{(2)}{e_i} \stackrel{\text{def}}{=} A_i^* \equiv (g_{jk} A^j A^k)^{-1/2} A_i \equiv (A_j A^j)^{-1/2} A_i. \tag{3. 1}$$

Nach einem interessanten Resultat von A. DEICKE (vgl. [4]) ist $A_i \neq 0$, falls $F(x, \dot{x}) > 0$ im ganzen Raum besteht. Da wir diese Bedingung gestellt haben (vgl. [10], Kap. I. § 1), ist $\underset{(2)}{e_i}$ in jedem Linienelement eindeutig definiert[2]). Diese Vektoren stehen wegen

$$A_i \equiv A_i{}^k{}_k = \frac{1}{4} g^{jk} \frac{\partial^3 F^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}$$

und wegen der Homogenität erster Ordnung von $F(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$ senkrecht aufeinander.

Um den dritten Einheitsvektor bestimmen zu können, bilden wir aus dem Grundtensor σ_{ijk} den Vektor

$$\sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_i{}^k{}_k \equiv -\sigma^k{}_{ik}.$$

Wir müssen im folgenden annehmen, daß dieser Vektor von Null verschieden ist. Nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren bilden wir den Vektor

$$\sigma_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_i - \sigma_0 l_i - (\sigma_j A^{*j}) A_i^*. \tag{3. 2a}$$

Nach einer Normierung erhält man den dritten Einheitsvektor

$$\underset{(3)}{e_i} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_j^* \sigma^{*j})^{-1/2} \sigma_i^*, \tag{3. 2b}$$

der wegen (3. 2a) offenbar auf $\underset{(1)}{e_i}$ und $\underset{(2)}{e_i}$ senkrecht steht.

Nun gehen wir zur Konstruktion des vierten Grundvektors über. Erstens bestimmen wir den sog. vierdimensionalen ε-Tensor. Es ist

$$\varepsilon_{ijkm} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g} \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} & \delta_{1m} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} & \delta_{2m} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} & \delta_{3m} \\ \delta_{4i} & \delta_{4j} & \delta_{4k} & \delta_{4m} \end{vmatrix}, \tag{3. 3}$$

wo δ_{ik} das Kronecker-δ bedeutet. ε_{ijkm} ist also ein in allen ihren Indexen schiefsymmetrischer Tensor. Der Tensorcharakter folgt leicht aus der Transformations-

[2]) Wir bemerken, daß $A_i \neq 0$ in nicht positiv definiten Finslerräumen schon nicht gültig ist. Auch in diesem Falle können wir $\underset{(2)}{e_i}$ in der angegebenen Weise definieren, wir müssen uns aber auf solche Teilbereiche des F_4^*-Raumes beschränken, wo $A_i \neq 0$ gültig ist.

formel von $g=|g_{ik}|$. Da $\sqrt{\bar{g}} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right| \sqrt{g}$ ist, wo $\bar{g}$ das transformierte g bedeutet, so wird nach dem Multiplikationssazt der Determinanten

$$\bar{\varepsilon}_{ijkm} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^i} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^j} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^k} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^m} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^i} & \cdot & & \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^i} & & \cdot & \\ \frac{\partial x^4}{\partial \bar{x}^i} & & & \frac{\partial x^4}{\partial \bar{x}^m} \end{vmatrix},$$

was man auf Grund von (3. 3) in der Form

$$\bar{\varepsilon}_{ijkm} = \varepsilon_{abcd} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^m}$$

schreiben kann, und das beweist den Tensorcharakter des ε-Tensors.

Die kontravarianten Komponenten des ε-Tensors sind

$$\varepsilon^{abcd} = g^{ai} g^{bj} g^{ck} g^{dm} \varepsilon_{ijkm},$$

wo die g^{rs} die kontravarianten Komponenten des metrischen Grundtensors bedeuten. Bekanntlich hat g^{rs} die Form $g^{rs}=g^{-1}U^{rs}$, wo U^{rs} die Unterdeterminante von g_{rs} in der Determinante g ist. Da im vierdimensionalen Fall $|U^{rs}|=g^3$ ist, wird mit Hilfe von (3. 3):

(3. 4)
$$\varepsilon^{pqrs} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} & \delta_{1s} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} & \delta_{2s} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} & \delta_{3s} \\ \delta_{4p} & \delta_{4q} & \delta_{4r} & \delta_{4s} \end{vmatrix}.$$

Auf Grund von (3. 3) und (3. 4) folgt, daß im F_4^*-Raum

(3. 5)
$$\varepsilon_{ijkm}\varepsilon^{iqrs} = \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} & \delta_{js} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \\ \delta_{mq} & \delta_{mr} & \delta_{ms} \end{vmatrix}$$

besteht, was auf Grund des Multiplikationssatzes der Determinanten leicht bewiesen werden kann.

Der vierte Einheitsvektor unseres Vierbeins ist nun:

(3. 6)
$$\underset{(4)}{e_i} \overset{\text{def}}{=} \varepsilon_{ijkm} \underset{(1)}{e^j} \underset{(2)}{e^k} \underset{(3)}{e^m}.$$

Da offensichtlich

(3. 6a)
$$\underset{(4)}{e^i} = \varepsilon^{iprs} \underset{(1)}{e_p} \underset{(2)}{e_r} \underset{(3)}{e_s}$$

ist, folgt auf Grund von (3. 5) und (3. 6), daß

$$\underset{(4)}{e_i}\underset{(4)}{e^i} = \prod_{h=1}^{3} \underset{(h)}{e^j}\underset{(h)}{e_j} = 1$$

gilt. Wegen der schiefsymmetrischen Eigenschaften des ε-Tensors folgt somit

(3. 7) $$\underset{(a)}{e_i}\underset{(b)}{e^i} = \delta_{ab},$$

woraus nach fundamentalen Regeln der Tensoralgebra auch

(3. 8) $$\underset{(a)}{e_i}\underset{(a)}{e^j} = \delta_i^j$$

gefolgert werden kann. Ziehen wir in der letzten Formel den Index j ab, so erhalten wir unmittelbar die Beindarstellung des metrischen Grundtensors:

(3. 9) $$g_{ij} = \underset{(a)}{e_i}\underset{(a)}{e_j}.$$

§ 4. *Beindarstellung des Tensors* σ_{ijk}

Der Fundamentaltensor σ_{ijk} des F_4^*-Raumes hat nach dem Vierbein $\underset{(a)}{e_i}$ die Beindarstellung

(4. 1) $$\sigma_{ijk} = \underset{(abc)}{\sigma}\,\underset{(a)}{e_i}\underset{(b)}{e_j}\underset{(c)}{e_k},$$

wo die Klammern unter dem σ die nicht-tensoriellen Indizes (und nicht die Symmetrie) kennzeichnen wollen. Nach (3. 7) und (4. 1) ist der Skalar $\underset{(abc)}{\sigma}$ von der Form:

(4. 1a) $$\underset{(abc)}{\sigma} = \sigma_{ijk}\underset{(a)}{e^i}\underset{(b)}{e^j}\underset{(c)}{e^k},$$

und wegen der schiefen Symmetrie von σ_{ijk} in i, j, ist auch $\underset{(abc)}{\sigma}$ schiefsymmetrisch in a, b.

Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Es gilt immer:*

(4. 2) $$\underset{(141)}{\sigma} + \underset{(242)}{\sigma} + \underset{(343)}{\sigma} = 0.$$

Beweis. Eine Kontraktion von (4. 1) mit g^{jk} gibt wegen (3. 7)

(4. 3) $$\sigma_i = \sigma_i{}^k{}_k = \underset{(abb)}{\sigma}\,\underset{(a)}{e_i}.$$

Da nach (3. 2a) und (3. 2b) $\sigma_i \underset{(4)}{e^i} = 0$ ist, folgt nach einer Kontraktion mit $\underset{(4)}{e^i}$ und in Hinsicht auf die schiefe Symmetrie von $\underset{(abc)}{\sigma}$ in a, b eben (4. 2), w. z. b. w.

Der Vektor σ_i hat im allgemeinen eine andere Richtung, als $\underset{(3)}{e_i}$. Es gilt aber der

Satz 2. *Es sind die Gleichungen*

$$\sum_{\beta=2}^{4} \underset{(1\beta\beta)}{\sigma} = 0, \qquad \underset{(121)}{\sigma} + \underset{(323)}{\sigma} + \underset{(424)}{\sigma} = 0 \tag{4. 4}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß σ_i und $\underset{(3)}{e_i}$ dieselbe Richtung haben, d. h.:

$$\sigma_i = \sigma \underset{(3)}{e_i}. \tag{4. 5}$$

Beweis. Auf Grund von (4. 2) reduziert sich (4.3) immer auf[3])

$$\sigma_i = \sum_{a=1}^{3} \underset{(abb)}{\sigma} \underset{(a)}{e_i}. \tag{4. 6}$$

Wegen der schiefen Symmetrie von $\underset{(abc)}{\sigma}$ in a, b geht diese Formel in (4. 5) über, mit $\sigma = \underset{(3bb)}{\sigma}$, falls die beiden Gleichungen in (4. 4) gelten. Aus (4. 4) folgt also (4. 5). Es gilt aber auch die Umkehrung; aus (4. 5) folgen nach Überschiebung von (4. 6) mit l^i bzw. $\underset{(2)}{e^i}$ wegen der schiefen Symmetrie von $\underset{(abc)}{\sigma}$ in a, b eben die beiden in (4. 4) angegebenen Gleichungen, w. z. b. w.

Wir wollen nun die allgemeinste Form von σ_{ijk} bestimmen, falls (4. 5) besteht, und $\underset{(4)}{e_i}$ in der Beindarstellung nicht vorkommt.

Satz 3. *Der Tensor σ_{ijk} hat die Form:*

$$\sigma_{ijk} = \sum_{a,b,c=1}^{3} \underset{(abc)}{\sigma} \underset{(a)}{e_i} \underset{(b)}{e_j} \underset{(c)}{e_k} \tag{4. 7}$$

und es gilt auch (4. 5) *dann und nur dann, falls die Relationen*

$$\underset{(122)}{\sigma} + \underset{(133)}{\sigma} = 0, \qquad \underset{(211)}{\sigma} + \underset{(233)}{\sigma} = 0 \tag{4. 8}$$

bestehen, ferner $\underset{(abc)}{\sigma} = 0$, falls eine der Indizes a, b, c gleich 4 ist.

Beweis. Die letzte Bedingung des Satzes ist nach (4. 1) und (4. 1a) notwendig und hinreichend für (4. 7). Nach Satz 2 sind jetzt die Bedingungsleichungen (4. 4) eben mit (4. 8) identisch, was im Hinblick auf die schiefen Symmetrie von $\underset{(abc)}{\sigma}$ in a, b unmittelbar folgt. Auf Grund des Satzes 2 folgt schon die Behauptung des Satzes 3.

Die Sätze 2 und 3 sind ziemlich einfach, doch haben sie eine wichtige Bedeutung. Sie bestimmen nämlich die Form von σ_{ijk}, wenn dieser Tensor, außer den Grundtensoren des Finslerraumes nur noch aus einem einzigen Vektor aufgebaut ist.

[3]) In (4.6) soll auf den Index „b" selbstverständlich von 1 bis 4 summiert werden. Für den Index „a" geht aber die Summation nur von 1 bis 3.

Z. B. sind die Gleichungen (4. 5) und (4. 7) erfüllt, falls für einen Vektor σ_i die Relationen (4. 6) gelten, und σ_{ijk} die Form

$$\sigma_{ijk} = (\sigma_i l_j - \sigma_j l_i) l_k$$

hat. Doch sind selbstverständlich auf Grund des Satzes 3 auch andere Type möglich.

§ 5. *Beindarstellung der Tensoren A_{ijk} und S_{ijkm}*

Der Torsionstensor A_{ijk} ist bekanntlich durch die Formel

$$A_{ijk} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{4} F \frac{\partial^3 F^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k} \tag{5. 1}$$

definiert. Dieser Tensor ist somit in seinen Indexen totalsymmetrisch, ferner es ist wegen der Homogenität erster Ordnung der Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$

$$A_{0jk} = A_{j0k} = A_{jk0} = 0.$$

Das bedeutet aber, daß in der Beindarstellung des Torsionstensors der Vektor $\underset{(1)}{e_i} \equiv l_i$ nicht vorkommen kann. Die Beindarstellung des Torsionstensors ist somit:

$$A_{ijk} = \underset{(\alpha\beta\gamma)}{\mathfrak{I}} \underset{(\alpha)}{e_i} \underset{(\beta)}{e_j} \underset{(\gamma)}{e_k}, \tag{5. 2}$$

wo *die griechischen Indizes jetzt und im folgenden immer die Zahlen 2, 3, 4; während die lateinischen Indizes* (wie im vorigen) *die Zahlen 1, 2, 3, 4 durchlaufen.*

Die Einsteinsche Konvention soll selbstverständlich auch auf die griechischen Indizes gelten. Es ist somit in (5. 2) nach (3. 7):

$$\underset{(\alpha\beta\gamma)}{\mathfrak{I}} = A_{ijk} \underset{(\alpha)}{e^i} \underset{(\beta)}{e^j} \underset{(\gamma)}{e^k}. \tag{5. 3}$$

Diese, in α, β, γ symmetrischen Größen, sind die Torsionsinvarianten des F_4^*-Raumes; sie sind aber voneinander nicht vollständig unabhängig. Nach (3. 1) hat $A_i = A_i{}^k{}_k$ die Richtung von $\underset{(2)}{e_i}$. Aus (5. 2) folgt somit nach Überschiebung mit g^{jk}:

$$A_i = \underset{(\alpha\beta\beta)}{\mathfrak{I}} \underset{(\alpha)}{e_i},$$

da aber A_i die Richtung von $\underset{(2)}{e_i}$ hat, muß

$$\underset{(3\beta\beta)}{\mathfrak{I}} = 0, \quad \underset{(4\beta\beta)}{\mathfrak{I}} = 0 \tag{5. 4}$$

bestehen. Die Zahl der Torsionsinvarianten ist nach (5. 3) offenbar 10, aber wegen (5. 4) sind nur 8 unabhängige Torsionsinvarianten.

Der dritte Cartansche Krümmungstensor ist durch (2. 7) angegeben (vgl. [3], S. 34). Ziehen wir den Index „i" herunter, so wird S_{ijkm} in (i, j) und (k, m) schiefsymmetrisch sein. Ferner es ist

$$S_{ijkm} = S_{kmij}, \tag{5. 5}$$

wie das aus der Definitionsformel (2. 7) nach dem Herunterziehen von „i“ unmittelbar bestätigt werden kann.

Die Beindarstellung von S_{ijkm} hat die Form:

$$S_{ijkm} = \underset{(\alpha\beta\gamma\delta)}{\mathfrak{S}} \underset{(\alpha)}{e_i} \underset{(\beta)}{e_j} \underset{(\gamma)}{e_k} \underset{(\delta)}{e_m}, \tag{5. 6}$$

wo wegen der schiefsymmetrischen Eigenschaften des dritten Cartanschen Krümmungstensors auch die $\underset{(\alpha\beta\gamma\delta)}{\mathfrak{S}}$ dieselben schiefsymmetrischen Eigenschaften besitzen, d.h.:

$$\underset{(\alpha\beta\gamma\delta)}{\mathfrak{S}} = -\underset{(\beta\alpha\gamma\delta)}{\mathfrak{S}}, \quad \underset{(\alpha\beta\gamma\delta)}{\mathfrak{S}} = -\underset{(\alpha\beta\delta\gamma)}{\mathfrak{S}}, \tag{5. 7}$$

ferner, auf Grund von (5. 5) ist

$$\underset{(\alpha\beta\gamma\delta)}{\mathfrak{S}} = \underset{(\gamma\delta\alpha\beta)}{\mathfrak{S}}. \tag{5. 8}$$

Auf Grund von (2. 7) und (5. 2) können selbstverständlich die Krümmungsskalare

$$\underset{(\alpha\beta\gamma\delta)}{\mathfrak{S}} = S_{ijkm} \underset{(\alpha)}{e^i} \underset{(\beta)}{e^j} \underset{(\gamma)}{e^k} \underset{(\delta)}{e^m}$$

mit Hilfe der Torsionsinvarianten ausgedrückt werden. Es wird

$$\underset{(\alpha\beta\gamma\delta)}{\mathfrak{S}} = \underset{(\alpha\varrho\delta)}{\mathfrak{J}} \underset{(\beta\varrho\gamma)}{\mathfrak{J}} - \underset{(\alpha\varrho\gamma)}{\mathfrak{J}} \underset{(\beta\varrho\delta)}{\mathfrak{J}}. \tag{5. 9}$$

Es sei nun

$$\underset{(\alpha\beta)}{h_{ij}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \underset{(\alpha)}{e_i} & \underset{(\beta)}{e_i} \\ \underset{(\alpha)}{e_j} & \underset{(\beta)}{e_j} \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{2} \left(\underset{(\alpha)}{e_i} \underset{(\beta)}{e_j} - \underset{(\alpha)}{e_j} \underset{(\beta)}{e_i} \right). \tag{5. 10}$$

Offenbar ist $\underset{(\alpha\beta)}{h_{ij}}$ in (i, j) und auch in (α, β) schiefsymmetrisch. Die Indizes (i, j) sind selbstverständlich tensorielle Indizes. (5. 6) kann dann wegen (5. 7) in der Form:

$$S_{ijkm} = \underset{(\alpha\beta\gamma\delta)}{\mathfrak{S}} \underset{(\alpha\beta)}{h_{ij}} \underset{(\gamma\delta)}{h_{km}} \tag{5. 11}$$

angegeben werden. Der dritte Cartansche Krümmungstensor kann also mit Hilfe der Größen (5. 10) in der Form (5. 11) bestimmt werden.

Bemerkung. Im dreidimensionalen Fall ist $\alpha, \beta, \ldots = 2, 3$. Die Formel (5. 11) gilt auch jetzt, es wird aber wegen (5. 7) $\underset{(2323)}{\mathfrak{S}}$ alle übrigen Krümmungsinvarianten bestimmen; (5. 11) hat somit im wesentlichen die Form:

$$S_{ijkm} = \mathfrak{S} \underset{(23)}{h_{ij}} \underset{(23)}{h_{km}}$$

(vgl. [8], § 2.).

§ 6. *Spezielle Type bezüglich der Tensoren A_{ijk} und S_{ijkm}*

Die Form von A_{ijk} im zweidimensionalen bzw. im dreidimensionalen Fall befindet sich in [2] bzw. [6]. Der Krümmungstensor S_{ijkm} verschwindet bekanntlich im zweidimensionalen Fall, und im dreidimensionalen Raum hat seine Form M. Matsumoto bestimmt (vgl. [8], § 2.). Wir geben im folgenden eine Bedingung im vierdimensionalen F_4^*-Raum, so, daß wenn diese Bedingung erfüllt ist, diese Tensoren zum Typ des dreidimensionalen Falles ähnlich seien.

Satz 4. *Gilt eine der Relationen*

$$(6.1) \qquad \text{a)} \quad A_{ijk} \underset{(3)}{e^k} = 0, \qquad\qquad \text{b)} \quad A_{ijk} \underset{(4)}{e^k} = 0,$$

so haben die Tensoren A_{ijk} und bezüglich der Tensoren (5. 10) *auch S_{ijkm} von F_4^* die Form des dreidimensionalen Falles.*

Beweis. Wir werden nur den Typ (6. 1b) untersuchen, denn der andere Typ hat im wesentlichen dieselben Eigenschaften.

Wegen der totalen Symmetrie von A_{ijk} und $\underset{(\alpha\beta\gamma)}{\mathfrak{J}}$ in ihren Indexen, folgt aus (6. 1b), (5. 2) und (5. 3), daß in dem durch (6. 1b) charakterisierten Fall die griechischen Indizes $\alpha, \beta, \ldots$ nur die Zahlen 2, 3 annehmen können, somit folgt schon die Behauptung des Satzes bezüglich des Torsionstensors A_{ijk}.

Auf Grund von (6. 1b) und (2. 7) kann aber $\underset{(4)}{e_i}$ auch in der Beindarstellung von S_{ijkm} nicht vorkommen. Das bedeutet aber nach (5. 11) wegen der schiefsymmetrischen Eigenschaften (5. 7) und $\underset{(\alpha\beta)}{h_{ij}}$ in α, β, daß (5. 11) die Form

$$(6.2) \qquad S_{ijkm} = \mathfrak{S} \underset{(23)}{h_{ij}} \underset{(23)}{h_{km}}$$

haben wird, womit der Satz 4 vollständig bewiesen ist.

Die Formel (6. 2) ist bezüglich des Tensors $\underset{(23)}{h_{ij}}$ von der Form des dreidimensionalen Falles. Doch es ist auch ein Unterschied vorhanden. Im dreidimensionalen Fall gilt nämlich auf Grund der Beindarstellung von g_{ij}:

$$(6.3) \qquad h_{ij} \overset{\text{def}}{=} g_{ij} - l_i l_j = \underset{(2)}{e_i} \underset{(2)}{e_j} + \underset{(3)}{e_i} \underset{(3)}{e_j}, \qquad (n = 3),$$

woraus folgt, daß (6. 2) die Form (vgl. [8], § 2.):

$$(6.4) \qquad S_{ijkm} = \mathfrak{S}(h_{ik} h_{jm} - h_{im} h_{jk})$$

hat, was im vierdimensionalen Fall nur unter weiteren Bedingungen erfüllt ist. Es kann leicht verifiziert werden, daß nach (5. 10), *im dreidimensionalen Fall*

$$\underset{(23)}{h_{ij}} \underset{(23)}{h_{km}} = \frac{1}{4} (h_{ik} h_{jm} - h_{im} h_{jk})$$

besteht.

Im vierdimensionalen F_4^*-Raum ist im allgemeinen (6. 4) nicht erfüllt. Ist aber (6. 4) mit konstantem $\mathfrak{S}$ gültig, so ist der Raum nach O. Varga von konstantem Krümmungsmaß (vgl. [11], Satz 2, und [8]). Es gilt aber der

Satz 5. *Der dritte Krümmungstensor des F_4^*-Raumes hat die Form* (6. 4) *dann und nur dann, falls die Relationen*

$$\underset{(2323)}{\mathfrak{S}} = \underset{(2424)}{\mathfrak{S}} = \underset{(3434)}{\mathfrak{S}} \equiv \mathfrak{S}, \tag{6. 5}$$

$$\underset{(2324)}{\mathfrak{S}} = \underset{(2334)}{\mathfrak{S}} = \underset{(2434)}{\mathfrak{S}} = 0 \tag{6. 6}$$

bestehen, wobei jetzt $h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j \equiv \underset{(\alpha)}{e_i} \underset{(\alpha)}{e_j}$ *ist.*

Beweis. Auf Grund der Formeln (5. 7) und (5. 8) folgt, daß $\underset{(\alpha\beta\gamma\delta)}{\mathfrak{S}}$, die in (6. 5) und (6. 6) vorkommenden 6 Invarianten bestimmt. Aus (5. 11) wird somit:

$$S_{ijkm} = 4\mathfrak{S}\big(\underset{(23)(23)}{h_{ij}\, h_{km}} + \underset{(24)(24)}{h_{ij} h_{km}} + \underset{(34)\,)34)}{h_{ik}\, h_{km}}\big). \tag{6. 7}$$

Im vierdimensionalen F_4^*-Raum ist nun auf Grund der Beindarstellung von g_{ij}:

$$h_{ij} \overset{\text{def}}{=} g_{ij} - l_i l_j \equiv \underset{(\alpha)(\alpha)}{e_i\, e_j}, \tag{6. 8}$$

woraus nach einfacher Rechnung folgt, daß der Ausdruck:

$$h_{ik} h_{jm} - h_{im} h_{jk}$$

eben der Faktor des Skalars $\mathfrak{S}$ in der Formel (6. 7) ist. Somit folgt, daß (6. 7) in die Formel (6. 4) übergeht, w. z. b. w. (h_{ij} bedeutet jetzt selbstverständlich die durch (6. 8) angegebene Größe). Die Umkehrung folgt aus (5.10) und (5.11) durch explizite Berechnung von S_{ijkm}.

Wir beweisen noch bezüglich der Formel (6. 4) den folgenden

Satz 6. *Gelten die Formeln* (6. 4) *und* (6. 8), *so ist der Raum bezüglich der kovariante Ableitung* (2. 5) *immer von rekurrenter Krümmung.*

Beweis. Eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad \nabla_k l_i = 0$$

gilt, woraus auf Grund der Definitionsgleichung (6. 8) folgt, daß auch $\nabla_k h_{ij} = 0$ ist. Dann folgt aber aus (6. 4):

$$\nabla_r S_{ijkm} = \nabla_r \mathfrak{S}(h_{ik} h_{jm} - h_{im} h_{jk}),$$

woraus, wieder im Hinblick auf die Formel (6. 4) selbst, bekommt man, daß

$$\nabla_r S_{ijkm} = \nabla_r \log|\mathfrak{S}| S_{ijkm}$$

besteht, w. z. b. w.

Bemerkung. Ebenso kann gezeigt werden, daß wenn der dritte Cartansche Krümmungstensor die Form (6. 4) hat, dann ist er auch bezüglich der ersten Cartanschen kovarianten Ableitung „$|_r$" (vgl. [3]) mit den Übertragungsparametern $\Gamma_i^{*j}{}_k$, von rekurrenter Krümmung.

§ 7. *Variation der Länge der Vektoren*

In unserem Aufsatz [6] haben wir die Variation der quadrierten Länge der Vektoren bei der Variation der Richtung des Stützelementes bzw. bei der Variation der Berwaldschen Parallelübertragung im dreidimensionalen Fall berechnet. Jetzt wollen wir im folgenden das analoge Problem im F_4^*-Raum untersuchen. Es wird sich leicht zeigen, daß auch im F_4^*-Raum die Variationen ähnliche geometrische Bedeutung haben, wie im F_3^*, nur ist hier die Dimensionszahl um eins größer.

Es sei ξ^i ein kontravarianter Vektor (pünktlich gesagt: ein Vektorfeld); es soll die Variation δ_0 der quadrierten Länge ξ^2 von ξ^i berechnet werden, falls auf die Richtung $\dot{x}^i$ eine Variation von der Form:

$$\dot{x}^i \to \dot{x}^i + \varepsilon F \bar{\xi}^i$$

verwendet wird. Es ist dann:

$$\delta_0(\xi^2) = g_{ij}(x, \dot{x} + \varepsilon F \bar{\xi})\xi^i \xi^j - g_{ij}(x, \dot{x})\xi^i \xi^j,$$

woraus die Formel

$$\delta_0(\xi^2) = 2\varepsilon A_{ijk}\xi^i \xi^j \bar{\xi}^k \tag{7. 1}$$

folgt. Auf Grund von (5. 2) wird:

$$\delta_0(\xi^2) = 2\varepsilon \underset{(\alpha\beta\gamma)}{\mathfrak{J}} \underset{(\alpha)}{e_i}\xi^i \underset{(\beta)}{e_j}\xi^j \underset{(\gamma)}{e_k}\bar{\xi}^k. \tag{7. 2}$$

Aus (7. 2) *sieht man, daß die Torsionsinvarianten die Variation* δ_0 *bestimmen.*

Die Formel (7. 2) enthält eine Reihe verschiedene wichtige Spezialfälle. Die Variation δ_0 geht in eine sehr einfache Form über, falls ξ^i und $\bar{\xi}^i$ die Richtung eines Grundvektors $\underset{(\alpha)}{e^i}$ haben. Sind

$$\xi^i = \xi \underset{(\alpha)}{e^i}, \quad \bar{\xi}^i = \bar{\xi} \underset{(\alpha)}{e^i} \qquad (\alpha \textit{ fix}),$$

so geht (7. 2) in

$$\delta_0(\xi^2) = 2\varepsilon \underset{(\alpha\alpha\alpha)}{\mathfrak{J}} \xi^2 \bar{\xi}, \qquad \textit{(nicht summieren über } \alpha\textit{)}, \tag{7. 2a}$$

über. Die Variation ist also durch $\underset{(\alpha\alpha\alpha)}{\mathfrak{J}}$ bestimmt. *Für*

$$\xi^i = \xi \underset{(1)}{e^i}, \quad \bar{\xi}^i = \bar{\xi} \underset{(1)}{e^i}$$

verschwindet offenbar die Variation, da $\underset{(1\alpha\beta)}{\mathfrak{J}} = 0$ *ist.*

Für $\alpha = 4$ wird aus (7. 2a):

$$\delta_0(\xi^2) = 2\varepsilon \underset{(444)}{\mathfrak{J}} V^2 \bar{V}^2, \tag{7. 2b}$$

wo nach (3. 6)

$$\xi \equiv V = \underset{(4)}{e_i}\xi^i = \sqrt{g}\,\varepsilon_{ijkm}\xi^i \underset{(1)}{e^j}\underset{(2)}{e^k}\underset{(3)}{e^m} = \sqrt{g}\,\mathrm{Det}\,(\vec{\xi}, \underset{(1)}{\vec{e}}, \underset{(2)}{\vec{e}}, \underset{(3)}{\vec{e}})$$

das Volumen des durch die Vektoren ξ^i, $\underset{(1)}{e^i}$, $\underset{(2)}{e^i}$ und $\underset{(3)}{e^i}$ aufgeprägten Parallelepipeds bedeutet. Entsprechendes gilt für

$$\bar{V} = \underset{(4)}{e_i}\,\bar{\xi}^i = \sqrt{g}\,\mathrm{Det}\,(\bar{\xi}, \underset{(1)}{e}, \underset{(2)}{e}, \underset{(3)}{e}).$$

Ist nun:

$$\xi^i = \xi \underset{(\alpha)}{e^i}, \quad \bar{\xi}^i = \bar{\xi} \underset{(\beta)}{e^i}, \qquad (\alpha, \beta \textit{ fix})$$

so geht (7. 2) in

$$\text{(7. 2c)} \qquad \delta_0(\xi^2) = 2\varepsilon \underset{(\alpha\alpha\beta)}{\mathfrak{J}}\, \xi^2 \bar{\xi}, \qquad \textit{(nicht summieren über } \alpha)$$

über, wo ξ und $\bar{\xi}$ die Länge der Vektoren ξ^i und $\bar{\xi}^i$ bedeuten. Nur $\underset{(234)}{\mathfrak{J}}$ kommt in keinen Variationen δ_0 vor, somit hat diese Invariante bei dieser Variation keine geometrische Bedeutung.

Führen wir eine infinitesimale Parallelverschiebung eines Vektors (genauer eines Vektorfeldes) $\xi^i(x, \dot{x})$ im Sinne der Berwaldschen Parallelübertragung durch, so verschwindet das Berwaldsche invariante Differential:

$$\text{(7. 3)} \qquad D_B\xi^i = d\xi^i + A_r{}^i{}_k\,\xi^r\,\tilde{\omega}^k(d) + (\Gamma^{*i}_{r\;k} + A_r{}^i{}_k|_0)\,\xi^r dx^k,$$

wo „$|_0 \equiv |_i l^i$" die erste Cartansche kovariante Ableitung und Kontraktion mit l^i, ferner

$$\text{(7. 4)} \qquad \tilde{\omega}^k(d) \overset{\text{def}}{=} dl^k + \Gamma^{*k}_{0\;t}\,dx^t \equiv D_B l^k$$

bedeuten (vgl. z. B. [6], § 4).

Die allgemeine Variation der quadrierten Länge eines Vektors ξ^i ist durch die Formel:

$$\text{(7. 5)} \qquad \delta(\xi^2) = g_{ij}(x+dx, \dot{x}+d\dot{x})(\xi^i + d\xi^i)(\xi^j + d\xi^j) - g_{ij}(x, \dot{x})\,\xi^i\xi^j$$

bestimmt. Bei der Berwaldschen Parallelübertragung ist aber:

$$\tilde{\omega}^i(d) = 0, \quad D_B\xi^i = 0,$$

woraus nach (7. 3) und (7. 4) folgt, daß wegen $\dot{x}^k = Fl^k$:

$$\text{(7. 6)} \qquad d\dot{x}^k = l^k dF - FG^{*k}_{0\;r}\,dx^r$$

und

$$\text{(7. 7)} \qquad d\xi^i = -G^{*i}_{j\;k}(x, \dot{x})\,\xi^j dx^k,$$

wo wir die gewöhnliche Bezeichnung

$$\text{(7. 8)} \qquad G^{*i}_{j\;k} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^{*i}_{j\;k} + A_j{}^i{}_k|_0$$

für die Berwaldschen Übertragungsparameter benützt haben.

Beschränken wir uns auf Größen erster Ordnung in dx^i, $d\dot{x}^i$ und $d\xi^i$, so wird nach (7. 6) und (2. 2a)

$$g_{ij}(x+dx, \dot{x}+d\dot{x}) = g_{ij}(x, \dot{x}) + \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + 2A_{ijr}G^{*r}_{0\;k}\right) dx^k,$$

woraus folgt, daß (7. 5) auf Grund von (7. 7) in

$$\delta(\xi^2) = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - 2A_{ijr}G^{*r}_{0\ k} - G^*_{ijk} - G^*_{jik}\right)\xi^i\xi^j dx^k$$

übergeht. Beachten wir jetzt (7. 8), ferner die Relation

$$g_{ij}|_k \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - 2A_{ijr}\Gamma^{*r}_{0\ k} - \Gamma^*_{ijk} - \Gamma^*_{jik} \equiv 0,$$

so wird:

$$\delta(\xi^2) = -2A_{ijk}|_0\xi^i\xi^j dx^k. \tag{7. 9}$$

Um die Variation von ξ^2 zu bekommen, müssen wir $A_{ijk}|_0$ berechnen. Auf Grund von (5. 2) folgt, daß es zweckmäßig ist zuerst $\underset{(\alpha)}{e_i}|_0$ zu bestimmen. Da

$$\underset{(\alpha)}{e_i}|_0 l^i = 0$$

ist, hat $\underset{(\alpha)}{e_i}|_0$ die Form:

$$\underset{(\alpha)}{e_i}|_0 = \beta_\alpha \underset{(2)}{e_i} + \gamma_\alpha \underset{(3)}{e_i} + \delta_\alpha \underset{(4)}{e_i}.$$

Da $\underset{(4)}{e_i}$ ein Einheitsvektor ist, folgt

$$\underset{(\alpha)}{e_i}|_0 \underset{(\alpha)}{e^i} = 0, \qquad \textit{(nicht summieren über } \alpha),$$

da die Cartansche kovariante Ableitung metrisch ist. Die letzte Relation bedeutet aber, daß in der Beindarstellung von $\underset{(\alpha)}{e_i}|_0$ der Vektor $\underset{(\alpha)}{e_i}$ nicht vorkommen kann. Somit wird

$$\underset{(2)}{e_i}|_0 = \gamma_2 \underset{(3)}{e_i} + \delta_2 \underset{(4)}{e_i}, \quad \underset{(3)}{e_i}|_0 = \beta_3 \underset{(2)}{e_i} + \delta_3 \underset{(4)}{e_i},$$

$$\underset{(4)}{e_i}|_0 = \beta_4 \underset{(2)}{e_i} + \gamma_4 \underset{(3)}{e_i}.$$

Die Koeffizienten $\beta_3, \beta_4, \ldots$ erhält man durch Kontraktionen mit $\underset{(\alpha)}{e^i}$. Z. B. es wird:

$$\gamma_2 = \underset{(2)}{e_i}|_0 \underset{(3)}{e^i}, \quad \delta_2 = \underset{(2)}{e_i}|_0 \underset{(4)}{e^i}, \quad \beta_3 = \underset{(3)}{e_i}|_0 \underset{(2)}{e^i}, \ldots .$$

Diese Koeffizienten sind aber voneinander noch nicht unabhängig. Aus $\underset{(2)}{e_i}\underset{(3)}{e^i}=0$ folgt nach der Operation: „$|_0$" die Formel:

$$\underset{(2)}{e_i}|_0 \underset{(3)}{e^i} + \underset{(2)}{e_i}\underset{(3)}{e^i}|_0 = 0$$

und das bedeutet, daß

$$\gamma_2 + \beta_3 = 0.$$

In ähnlicher Weise bekommt man:

$$\gamma_4 + \delta_3 = 0, \quad \beta_4 + \delta_2 = 0.$$

Mit der Bezeichnung: $\gamma_2=\gamma$, $\delta_2=\delta$, $\delta_3=\beta$, wird:

$$\left.\begin{array}{lll} (7.10\text{a}) & \underset{(2)}{e_i}|_0 = \gamma \underset{(3)}{e_i} + \delta \underset{(4)}{e_i}, & \gamma \equiv \underset{(2)}{e_i}|_0 \underset{(3)}{e^i} \\ (7.10\text{b}) & \underset{(3)}{e_i}|_0 = -\gamma \underset{(2)}{e_i} + \beta \underset{(4)}{e_i}, & \delta \equiv \underset{(2)}{e_i}|_0 \underset{(4)}{e^i} \\ (7.10\text{c}) & \underset{(4)}{e_i}|_0 = -\delta \underset{(2)}{e_i} - \beta \underset{(3)}{e_i}, & \beta \equiv \underset{(3)}{e_i}|_0 \underset{(4)}{e^i} \end{array}\right\}.$$

Aus (7. 9), (5. 2) und (7. 10a)—(7. 10c) kann die allgemeinste Form der Variation von ξ^2 bestimmt werden. Im einfachsten Fall folgt aus diesen Gleichungen der

Satz 7. *Sind die Bedingungen:*

$$\underset{(\alpha\beta\gamma)}{\mathfrak{J}}|_0 \equiv 0, \qquad \beta=\gamma=\delta=0$$

erfüllt, so ist die Variation $\delta(\xi^2)$ bei einer Berwaldschen Parallelübertragung identisch Null. Ist

$$\underset{(\alpha\beta\gamma)}{\mathfrak{J}}|_0 \not\equiv 0, \qquad \beta=\gamma=\delta=0,$$

so gilt

$$\delta(\xi^2) = -2 \underset{(\alpha\beta\gamma)}{\mathfrak{J}}|_0 \xi^2 \cos\Theta_\alpha \cos\Theta_\beta \underset{(\gamma)}{e_k} dx^k,$$

wo $\Theta_\alpha \overset{\text{def}}{=} \sphericalangle (\underset{(\alpha)}{\bar{e}}, \xi)$ *bedeutet.*

§ 8. *Verschiedene Type bezüglich des Krümmungstensors R_{ijkm}*

Im diesem Paragraphen wollen wir die Räume skalarer Krümmung durch Skalar-Relationen unter den allgemeinen Räumen kennzeichnen. Bekanntlich ist ein Raum von skalarer Krümmung, falls

$$R_{ijkm} = \mathfrak{R}(x, \dot{x})(g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk}) \tag{8.1}$$

besteht, wo $\mathfrak{R}(x, \dot{x})$ den Krümmungsskalar bedeutet. Selbstverständlich kann der F_4^*-Raum auch bezüglich des Finslerschen Krümmungstensors $\overset{(F)}{R}_{ijkm}$ von skalarer Krümmung sein.

Die Beindarstellung des Krümmungstensors R_{ijkm} hat die Form:

$$R_{ijkm} = \underset{(abcd)}{\mathfrak{R}} \underset{(a)}{e_i} \underset{(b)}{e_j} \underset{(c)}{e_k} \underset{(d)}{e_m}, \tag{8.2}$$

wo die Krümmungsskalare

$$\underset{(abcd)}{\mathfrak{R}} \overset{\text{def}}{=} R_{ijkm} \underset{(a)}{e^i} \underset{(b)}{e^j} \underset{(c)}{e^k} \underset{(d)}{e^m} \tag{8.3}$$

ebensolche schiefsymmetrische Eigenschaften haben, wie der Krümmungstensor selbst. Es gilt der folgende

Satz 8. *Notwendig und hinreichend dafür, daß der F_4^*-Raum von skalarer Krümmung sei, ist die Gültigkeit der Formel:*

(8. 4) $$\underset{(abcd)}{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}),$$

wo die Definition des Krümmungsskalars durch (8. 3) *angegeben ist.*

Beweis. Die Bedingung (8. 4) ist hinreichend. Aus (8. 4) und (8. 2) folgt nämlich auf Grund von (3. 9) eben die Formel (8. 1). Nehmen wir jetzt an, daß (8. 1) gilt, d. h. der F_4^*-Raum ein Raum von skalarer Krümmung ist. Aus (8. 1) und (8. 3) folgt nach (3. 7) eben die Formel (8. 4), womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Nehmen wir im folgenden an, daß $\sigma_0{}^i{}_k = 0$ ist. Aus (2. 12) folgt dann wegen $l^j|_m = 0$ auch $\Lambda_0{}^i{}_k = 0$, ferner aus (2. 11): $\Phi_0{}^i{}_{km} = 0$. Das gibt aber auf Grund von (2. 8) und (2. 10) die Relation:

$$R_0{}^i{}_{km} = \overline{R}_0{}^i{}_{km} = \overset{(F)}{\overline{R}}_0{}^i{}_{km}.$$

Aus dieser Formel folgt offenbar auch

(8. 5) $$R_{0i0m} = \overset{(F)}{\overline{R}}_{0i0m}.$$

Im Finslerraum ist aber bekanntlich der in (8. 5) vorkommende Tensor in (i, m) symmetrisch, ferner die Kontraktion mit l^i gibt Zero. Die Beindarstellung des durch (8. 5) angegebenen Tensors ist somit:

(8. 6) $$R_{0i0j} = \underset{(\alpha\beta)}{\mathfrak{R}}\, \underset{(\alpha)}{e_i}\, \underset{(\beta)}{e_j},$$

wo

$$\underset{(\alpha\beta)}{\mathfrak{R}} \overset{\text{def}}{=} R_{0i0j}\, \underset{(\alpha)}{e^i}\, \underset{(\beta)}{e^j}$$

bedeutet. Aus (8. 6) folgt der

Satz 9. *Ist*

$$R_{0i0j}\, \underset{(4)}{e^i} = 0,$$

so hat R_{0i0j} die Form des dreidimensionalen Falles. Ist

$$R_{0i0j}\, \underset{(3)}{e^i} = R_{0i0j}\, \underset{(4)}{e^i} = 0,$$

so hat R_{0i0j} die Form des zweidimensionalen Falles. Ist endlich

(8. 7) $$\underset{(22)}{\mathfrak{R}} = \underset{(33)}{\mathfrak{R}} = \underset{(44)}{\mathfrak{R}} \equiv \mathfrak{R}, \quad \underset{(\alpha\beta)}{\mathfrak{R}} = 0, \qquad (\alpha \neq \beta),$$

so ist R_{0i0j} von skalarer Form.

Beweis. Auf Grund von (8. 6) sind die ersten beiden Behauptungen des Setzes in trivialer Weise richtig. Ist nun (8. 7) richtig, so folgt aus der Formel (8. 6) wegen (3. 9):

$$R_{0i0j} = \mathfrak{R}\, \underset{(\alpha)}{e_i}\, \underset{(\alpha)}{e_k} \equiv \mathfrak{R}(g_{ij} - l_i l_j).$$

Diese Form ist aber für die Finslerräume skalarer Krümmung charakteristisch. Somit ist im wesentlichen unter den Krümmungstensoren der Tensor $\overset{(F)}{\overline{R}}_{ijkm}$ von skalarer Form, R_{ijkm} kann aber wegen (2. 10) eine andere Form haben.

§ 9. *Schlußbemerkungen*

Die Grundidee unserer Untersuchungen war die Konstruktion des Vierbeins $\underset{(a)}{e_i}$. Die Verallgemeinerung auf n-Dimensionen ist mit dieser Methode nicht möglich, da ein nur vom Grundelement $(x, \dot{x})$ abhängiges n-Bein, das aus den Grundgrößen abgeleitet ist, im allgemeinen nicht existiert. In einem solchen Raum aber, wo außer $\sigma_i{}^j{}_k$ noch ein Fundamentaltensor existiert, wie in der in unserer Arbeit [5] untersuchten Geometrie der Tensor $\mu_i{}^j{}_k$, wäre möglich, die analoge Untersuchungen auf ein F_5^*-Raum durchführen. Wir glauben aber, daß noch im F_4^*-Raum mehrere Resultate mit der angegebenen Vierbein-Konstruktion erreichbar sind.

Wenn die Untersuchungen *nur längs gewissen Kurven* durchgeführt werden sollen, so kann man selbstverständlich immer das begleitende n-Bein der Kurven benützen.

Literatur

[1] L. Berwald, Über zweidimensionale allgemeine Räume. *Journal f. d. reine und angew. Math.* **156** (1927), 191—222.
[2] L. Berwald, On Finsler and Cartan geometries III. Ann. of Math. (2) **42** (1941), 81—112.
[3] E. Cartan, Les espaces de Finsler. *Actualités scientifiques et industrielles.* **79** Paris (1934).
[4] A. Deicke, Über Finslerräume mit $A_i=0$. *Archiv der Math.* **4** (1953), 45—51.
[5] A. Moór, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **17** (1956), 85—120.
[6] A. Moór, Über Torsions- und Krümmungsinvarianten der dreidimensionalen Finslerschen Räume. *Math. Nachrichten.* **16** (1957), 85—99.
[7] A. Moór, Über affine Finslerräume von skalarer Krümmung. *Acta Sci. Math. (Szeged).* **22** (1961), 157—189.
[8] Makoto Matsumoto, On Finsler spaces with curvature tensors of some special forms. *Tensor N. S.* **22** (1971), 201—204.
[9] Makoto Matsumoto, A theory of three-dimensional Finsler spaces in terms of scalars. *Demonstratio Mathematica (vor Erscheinung).*
[10] H. Rund, The differential geometry of Finsler spaces. *Berlin—Göttingen—Heidelberg* (1934).
[11] O. Varga, Die Krümmung der Eichfläche des Minkowskischen Raumes und die geometrische Deutung des einen Krümmungstensors des Finslerschen Raumes. *Abh. aus dem Math. Seminar der Univ. Hamburg.* **20** (1955), 41—51.

(Eingegangen am 25. August 1972.)