Berichtigung zur Arbeit „Über die Iteration reeller Funktionen II"

Von B. BARNA (Debrecen)

In meiner genannten Arbeit — wie das Herr M. KRÜPPEL bemerkte — ist der Beweis des Satzes 9. (in Bd. 13. dieser Zeitschrift, S. 169)[1]) unvollständig.

Im Beweis bekam ich das Zwischenresultat, daß für alle Punkte eines abgeschlossenen Intervalls

$$f_m(x)=f_n(x) \tag{1}$$

gilt, wobei m, n ein gewisses Zahlenpaar ist [2]).

Man soll jetzt den Beweis, wie folgt, fortsetzen: Nimmt man $m>n$ an, so kann man für (1) auch schreiben

$$f_{m-n}(x)=x, \quad x\in(\Delta x)_n. \tag{$*$}$$

Aus ($*$) folgt, daß $(\Delta x)_n$ aus Fixpunkten besteht, deren Ordnungen Teiler der Zahl $m-n$ sind. Da es nur endlich viele solche Teiler gibt, existiert ein Teiler so, daß die Fixpunkte k-ter Ordnung wenigstens in einem Teilintervall (c, d) von $(\Delta x)_n$

[1]) In der Fußnote 3. der genannten Arbeit statt „die Vereinigung" „der Durchscnitt" zu lesen ist.

[2]) Ich schreibe später (S. 170): „Es sei $f_p(x)$ die erste iterierte Funktion von $f(x)$ die sich in Δx durch Iteration wiederholt, und $f_{p+\mu}(x)$ die erste Wiederholung von $f_p(x)$, d.h.

$$f_{p+1}(x)\neq f_p(x), \ldots, f_{p+\mu-1}(x)\neq f_p(x),\ f_{p+\mu}(x)=f_p(x), \quad x\in\Delta x.$$

Ich folgere dann hieraus, daß das p-te iterierte Intervall von Δx aus Fixpunkten μ-ter Ordnung besteht. *Dies gilt aber im allgemeien nicht*, wie die Funktion $f(x) = 1-x$, $I\equiv[0, 1]$ zeigt. Für alle Punkte aus I gilt dann

$$f_2(x)=f(x)$$

und $x=\dfrac{1}{2}$ ist ein Fixpunkt erster Ordnung, alle andere Punkte sind Fixpunkte zweiter Ordnung. Da das Intervall I also nicht aus Fixpunkten derselben Ordung besteht, gibt es bei diesem Beispiel keine solchen Zahlen p und μ, daß das p-te iterierte Interval aus Fixpunkten μ-ter Ordnung besteht.

dicht liegen, während die Menge der Fixpunkte aus $(\varDelta x)_n$, deren Ordnungen kleiner sind als k, nirgends dicht ist. Wegen der Stetigkeit der Funktion $f_k(x)$ gilt für alle $x\in(c, d)$

$$f_k(x)=x.$$

Da die Fixpunkte, deren Ordnungen kleiner sind als k, in $(\varDelta x)_n$ und somit in (c, d) nirgends dicht liegen, können wir aus (c, d) ein Teilintervall (a, b) auswählen, welches nur aus Fixpunkten k-ter Ordnung besteht. Damit ist Satz 9 vollständig bewiesen.

Ich verdanke diesen Beweis einer brieflichen Mitteilung von Herrn M. Krüppel, dem ich an dieser Stelle aufrichtigen Dank sagen möchte.

(Eingegangen am 20. December 1972.)