Über die Darstellung der rationalen Zahlen durch Normformen

ATTILA PETHŐ (Debrecen)

Herrn Professor Dr. A. Rapcsák zum 60-sten Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Seien $1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ linear unabhängige algebraische Zahlen über dem Körper der rationalen Zahlen R, $K=R(\alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ ein algebraischer Zahlkörper mit dem Grad n; $\alpha=\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ die Konjugierten eines Elements $\alpha \in K$ und $N_{K/R}(\alpha)$ die Norm in diesem Körper. Es sei weiter

$$L^{(k)}(x) = x_1+\alpha_2^{(k)}x_2+\ldots+\alpha_m^{(k)}x_m \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Ein viel untersuchtes Problem ist, wann die diophantische Gleichung

$$N_{K/R}\big(L(x)\big) = a \tag{1}$$

unendlich viele $x=(x_1, \ldots, x_m)$ ganze rationale Lösungen hat. Wenn im Fall $m=n$ (1) eine ganze Lösung hat, dann hat es auch unendlich viele und diese können wir mit Hilfe der Einheiten von K angeben ([2], 158—161).

Im Fall $m<n$ hängt die Antwort von der Struktur des Moduls $M=\{1, \alpha_2\ldots, \alpha_m\}$ ab. Wir nennen M ausgeartet, wenn der entsprechende Vektorraum L (über R) einen Teilraum L' enthält der einem Teilkörper $K'\subset K$ ähnlich ist, wobei K' weder der Körper der rationalen Zahlen, noch ein imaginär-quadratischer Körper ist.

Wenn M ausgeartet ist gibt es ein $a\in R$, bei dem (1) unendlich viele ganze Lösungen hat ([2], 396—397).

Anderfalls — wenn der Modul nicht ausgeartet ist — hat W. M. SCHMIDT [6] bewiesen, daß (1) nur endlich viele Lösungen hat. Seine Methode ist aber nicht effektiv, ist nicht geeignet für das Aufsuchung sämtlicher Lösungen von (1).

Für die Höhen sämtlicher Lösungen $x=(x_1, \ldots, x_m)$ d.h. für $\max\limits_{1\le i\le m}(|x_i|)$ haben A. BAKER [1] für $m=2$ im allgemeinen, K. GYŐRY und L. LOVÁSZ [3] für $m=3$ im Falle eines nichtreellen Körpers K, zu dem eine normale Erweiterung (über R) F endlichen Grades existiert, deren maximaler reeller Unterkörper ebenfalls normal ist (im folgenden nennen wir solche Körper nichtreelle Kronecker-Körper oder kurz K-Körper, solche sind z. B die nichtreellen Abelschen Zahlkörper, siehe auch [4]) explizit, eine nur von dem Modul M und von a abhängende Schranke angegeben.

Bei einem vollständigen Modul können wir alle Lösungen (1) mit Hilfe der Einheiten von K angeben. Wenn M ausgeartet ist, so gibt es $a\in R$, für die (1) unendlich viele Lösungen hat, wir können sogar unendlich viele Lösungen angeben, aber es ist nicht richtig, daß diese alle, oder fast alle Lösungen erschöpfen. *)

Das Ziel dieser Arbeit ist es — in Verknüpfung mit dem Ergebnis von GYŐRY und LOVÁSZ [3] und die Ergebnisse über die Approximierung reeller quadratischer algebraischer Zahlen von S. LANG [5] benutzend — die Größenordnung der Lösungsanzahl der Normform Gleichungen mit drei Unbekannten zu bestimmen wenn K ein nicht reeller K-Körper ist und M ausgeartet ist. Genauer zeigen wir den folgenden Satz:

Satz. *Seien* $1, \alpha_2, \alpha_3$ *solche linear unabhängige algebraische Zahlen über* R, *für die* $K=R(\alpha_2, \alpha_3)$ *ein nicht reeller K-Körper und* $M=\{1, \alpha_2, \alpha_3\}$ *ausgeartet ist. Dann gibt es eine nur von* M *abhängende Konstante* A, *daß wenn* $a>A$ *ist und wenn wir mit* $P(N)$ *bezeichnen die Anzahl solcher Lösungen der Ungleichung*

$$|N_{K/R}(x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3)| \leqq a \qquad a \in R \tag{2}$$

für die die Bedingung $\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) \leqq N$ *gilt, solche nur von* M *und* a *abhängende Konstanten* $c_1, c_2>0$ *existieren, daß*

$$c_1 \log N \leqq P(N) \leqq c_2 \log N$$

erfüllt ist.

2. Beweis des Satzes

Zum Beweis des Satzes brauchen wir die folgenden Lemmas.

Lemma 1. (S. LANG [5].) *Sei* α *eine reelle quadratische Zahl und* c *eine solche natürliche Zahl, daß die Ungleichung*

$$0 < |q\alpha - p| < \frac{c}{q}$$

unendlich viele ganze rationale Lösungen q *und* p *hat, wo* $q>0$. *Bezeichne weiter* $\lambda(N)$ *die Lösungsanzahl dieser Ungleichung im Falle* $q \leqq N$. *Dann existieren Konstanten* $c_1', c''>0$, *sodaß für alle* N *die Ungleichung*

$$|\lambda(N) - c_1' \log N| \leqq c''$$

richtig ist. Mit anderen Worten

$$\lambda(N) = c_1' \log N + O(1)$$

BEWEIS. Siehe [5], Seite 80.

Wir bemerken, daß S. Lang in [5] den obigen Satz mit der Untersuchung der Lösungsanzahl der vollständigen zerlegbaren Formen mit zwei Unbekannten bewies. Da die in [5] vorkommenden Lemmas (wegen gewissen Nebenbedingungen) nicht mit den jetzt folgenden Lemmas 2. und 3. identisch sind, beweisen wir zur Vollständigkeit auch Lemma 2. und 3.

*) Zusatz bei der Korrektur: Neuerdings bewies W. M. SCHMIDT (*Annals of Math.* **96** (1972), 526—551.) allgemein, daß die Lösungen von (1), unabhängig von der Struktur M, zu endlich vielen Lösungsfamilien gehören.

Lemma 2. *Sei $d>1$ eine quadratfreie ganze Zahl, $K=R(\sqrt{d})$ und 1, ω die Ganzheitsbasis von K, wo* $\omega = \begin{cases} \sqrt{d} & \text{wenn } d \not\equiv 1 \pmod 4 \\ \dfrac{\sqrt{d}+1}{2} & \text{wenn } d \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$ *Sei weiter f eine natürliche Zahl. Dann existieren Konstanten $c_3, c_4>0$ sodaß die Anzahl $R(N)$ der Lösungen (x, y) der Gleichung*

$$(3) \qquad |N_{K/R}(x+f\omega y)| = 1$$

welchen der Bedingung $\max(|x|, |y|) \leqq N$ *genügt*

$$c_3 \log N \leqq R(N) \leqq c_4 \log N$$

gilt.

Beweis. Zuerst beweisen wir die Abschätzung nach oben. Wir können annehmen, daß $x, y>0$, denn wenn für eine Lösung (x, y), $y<0$ wäre dann ist $(-x, -y)$ auch eine Lösung von (3), weil

$$|N_{K/R}(-x-f\omega y)| = |N_{K/R}(-(x+f\omega y))| = |N_{K/R}(-1)| = 1.$$

Weiter können wir zu jeder Lösung $y>0$ höchstens 2 Lösungen geben, nämlich bei festem y ist (3) eine quadratische Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten in x, die höchstens zwei Lösungen hat. Von diesen ist eine nicht negativ, weil bei festem y (3) die Gestalt

$$x^2 + xy\,\mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) + y^2 N_{K/R}(f\omega) \pm 1 = 0$$

hat. Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$x_{1,2} = \frac{-y\,\mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) \pm \sqrt{y^2\,\mathrm{Sp}^2_{K/R}(f\omega) - 4\big(y^2 N_{K/R}(f\omega) \pm 1\big)}}{2}$$

und weil

$$N_{K/R}(f(\omega)) = \begin{cases} -df^2 & \text{wenn} \quad d \not\equiv 1 \pmod 4 \\ \dfrac{1-d}{4} f^2 & \text{wenn} \quad d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

ist die Zahl unter der Wurzel mindestens $(y\mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega))^2$.

Sei also (x, y) eine nicht negative Lösung von (3). Dann

$$(4) \qquad |yf\omega^{(2)} + x| = \frac{1}{|yf\omega^{(1)} + x|} < \frac{1}{y}$$

denn wegen $\omega^{(1)}>1$ ist $|yf\omega^{(1)}+x| = yf\omega^{(1)}+x > y$. Darum gilt (4) für alle nicht negativen Lösungen von (3). Weil $f\omega$ eine reelle quadratische algebraische Zahl ist, hat (4) nach dem Approximationssatz von Dirichlet unendlich viele ganzrationale Lösungen (x, y).

Also sind die Bedingungen von Lemma 1. erfüllt und für die Lösungsanzahl $\lambda(N)$ von (4) gilt bei der Bedingung $1 \leqq y \leqq N$

$$R(N) \leqq 4\lambda(N) = 4c_1' \log N + O(1) \leqq c_4 \log N$$

Danach beweisen wir die Abschätzung nach unten. Sei (x, y) die Lösung der Ungleichung $|yf\omega^{(2)}+x| < \frac{1}{y}$ und nehmen wir an, daß $|y| < \frac{1}{4f}\sqrt{\frac{N}{d+1}}$. Dann ist auf Grund von Lemma 1. die Anzahl dieser Lösungen

$$2\lambda\left(\frac{1}{4f}\sqrt{\frac{N}{d+1}}\right) = 2c_1' \log\frac{1}{4f}\sqrt{\frac{N}{d+1}} + O(1).$$

Wegen $|x| \leqq |-yf\omega^{(2)}| + |yf\omega^{(2)}+x|$ ist weiter $|x| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{N}$ und

$$|N_{K/R}(x+f\omega y)| = |x+f\omega^{(1)}y|\,|x+f\omega^{(2)}y| < \left|\frac{x}{y}+f\omega^{(1)}\right|.$$

Wenn $\omega = \sqrt{d}$, dann $\omega^{(1)} = \omega^{(2)} + 2\sqrt{d}$, also

$$\left|\frac{x}{y}+f\omega^{(1)}\right| \leqq \left|\frac{x}{y}+f\omega^{(2)}\right| + 2\sqrt{d}f < 1+2f\sqrt{d}.$$

Wenn aber $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$, dann $\omega^{(1)} = \omega^{(2)} + \sqrt{d}$ und

$$\left|\frac{x}{y}+f\omega^{(1)}\right| \leqq 1+f\sqrt{d} < 1+2f\sqrt{d},$$

also in beiden Fällen

$$|N_{K/R}(x+f\omega y)| < 1+2f\sqrt{d}$$

das heißt (x, y) ist eine Lösung der Gleichung

$$|N_{K/R}(x+f\omega y)| = t \tag{5}$$

für irgendein $|t| < 1+2f\sqrt{d}$. Durch das Schachtelungsprinzip muß es solche $|t_0| < 1+2f\sqrt{d}$ geben für welche die Lösungsanzahl der Gleichung (5) mindestens $2\lambda\left(\frac{1}{4f}\sqrt{\frac{N}{d+1}}\right)\Big/[2(1+2f\sqrt{d})]$ ist (wo $t_0 \neq 0$).

Jetzt betrachten wir für diese t_0 die Menge H_{t_0} der Lösungen der Gleichung (5). Zwei Elemente (x_1, y_1) und (x_2, y_2) von H_{t_0} nennen wir äquivalent wenn $x_1 \equiv x_2 \pmod{|t_0|}$ und $y_1 \equiv y_2 \pmod{|t_0|}$.

Die Anzahl der Äquivalenzklassen, die durch die obige Äquivalenzrelation induziert sind, ist t_0^2. Noch einmal gibt es auf Grund des Schachtelungsprinzips eine Klasse O, daß die Anzahl ihrer Elemente $|O| \geqq |H_{t_0}|/t_0^2$ ist.

Sei $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in O$ und

$$x' = \frac{x_1x_2 + \mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega)x_2y_1 + N_{K/R}(f\omega)y_1y_2}{|t_0|}, \quad y' = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{|t_0|}.$$

x' und y' sind ganzrationale Zahlen, weil z. B.

$$x_1 x_2 \equiv x_2^2 \pmod{|t_0|}$$

$$\mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) x_2 y_1 \equiv \mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) x_2 y_2 \pmod{|t_0|}$$

$$N_{K/R}(f\omega) y_1 y_2 \equiv N_{K/R}(f\omega) y_2^2 \pmod{|t_0|}$$

also

$$|t_0| x' \equiv x_2^2 + \mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) x_2 y_2 + N_{K/R}(f\omega) y_2^2 \equiv N_{K/R}(x_2 + f\omega y_2) \equiv t_0 \equiv 0 \pmod{|t_0|}$$

und durch einfaches Rechnen kann man sehen, daß sie Lösungen von (3) sind. Weiter ist wegen

$$|x_i| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{N} \qquad (i = 1, 2)$$

$$|x'| \leqq N, \quad \text{und} \quad |y'| \leqq N.$$

Sei $(x_3, y_3) \in O$ und

$$x'' = \frac{x_1 x_3 + \mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) x_3 y_1 + N_{K/R}(f\omega) y_1 y_3}{|t_0|}, \quad y'' = \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{|t_0|}$$

Wir zeigen, daß wenn

(6) $$x' = x'' \quad \text{und} \quad y' = y'',$$

so $x_2 = x_3$ und $y_2 = y_3$, das heißt, die Lösungsanzahl der Gleichung (3) ist mindestens $|O|$.

In der Tat, wenn (6) erfüllt ist, dann

$$[x_1 + y_1 \mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega)](x_2 - x_3) + y_1 N_{K/R}(f\omega)(y_2 - y_3) = 0$$

$$-y_1(x_2 - x_3) \qquad + x_1(y_2 - y_3) = 0$$

Die Determinante dieses homogenen linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{vmatrix} x_1 + y_1 \mathrm{Sp}_{K/R}(f\omega) & y_1 N_{K/R}(f\omega) \\ -y_1 & x_1 \end{vmatrix} = N_{K/R}(x_1 + f\omega y_1) = t_0 \neq 0$$

also $x_2 = x_3$ und $y_2 = y_3$.

Das Vorhergehende zusammengefaßt erhalten wir

$$R(N) \geqq |O| \geqq \frac{2}{2t_0^2(1 + 2f\sqrt{d})} \lambda \left(\frac{1}{4f} \sqrt{\frac{N}{d+1}} \right) \geqq \frac{c_1'}{2(1 + 2f\sqrt{d})^3} \log N + O(1).$$

Lemma 3. *Seien α_1, α_2 solche reelle linear unabhängige algebraische Zahlen, für die $K = R(\alpha_1, \alpha_2)$ ein, über R quadratischer Körper ist. Hat die Gleichung*

(7) $$N_{K/R}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = a \qquad a \in R$$

eine ganze Lösung (x_1, x_2), so gibt es solche nur von M und a abhängende Konstan-

ten $c_5, c_6>0$ für die die Anzahl $P_2(N)$ der Lösungen von (7) *welche die Bedingungen* $\max(|x_1|, |x_2|)\leqq N$ *erfüllen*

$$c_5 \log N \leqq P_2(N) \leqq c_6 \log N$$

gilt.

Beweis. Da K ein quadratischer reeller Körper ist, gibt es eine quadratfreie ganzrationale Zahl $0<d$, sodaß $R(\alpha_1, \alpha_2)=R(\sqrt{d})$. Wir nehmen an, daß $d\not\equiv 1 \pmod 4$, weil im gegenteiligen Fall der Beweis ähnlich ist.

Dann ist $1, \sqrt{d}$ eine Ganzheitsbasis von K. Wir nehmen weiter an, daß α_1, α_2 ganz in K sind, weil wir dies leicht erreichen können. Da der Modul $M=\{\alpha_1, \alpha_2\}$ vollständig ist, gibt es nur endlich viele nicht assoziierte Elemente mit der Norm a (und solche Systeme einander nicht assoziierter Elemente können wir effektiv bestimmen). Seien diese $\beta_i = k_i+f\sqrt{d}\, l_i$ ($i=1, \dots, r$ und k_i, l_i ganzrational).

Bezeichnen wir mit $\mathcal{D}_M$ den Multiplikatorenring M, so können wir alle Lösungen der Gleichung (7) mit der Gestalt

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 = \varepsilon\beta_i \tag{8}$$

erzeugen mit irgendwelchen $1\leqq i\leqq r$, wo $\varepsilon\in\mathcal{D}_M$ eine beliebige Einheit ist [2]. Aber wegen dem Einheitensatz Dirichlets sind der Rang der Einheitengruppe $\mathcal{D}_M$ und K gleich und so ist in diesem Fall die Einheitengruppe $\mathcal{D}_M$ $\{\pm\varepsilon^n\}$ mit irgendeinem ganzen $n\geqq 1$, wo $\varepsilon>1$ Grundeinheit von K ist. Jetzt mit $\mathcal{D}$ den Ring der ganzen Zahlen von$K$ bezeichnend und mit f den Index $\{\mathcal{D}:\mathcal{D}_M\}$, ist $1, f\omega$ (Siehe [2], S. 178) eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{D}_M$, wobei in diesem Fall $\omega=\sqrt{d}$ ist $\left(\text{im Fall } d\equiv 1 \pmod 4\right.$ ist $\left.\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)$, und so sind sämtliche Einheiten von $\mathcal{D}_M$ der Gestalt $\varepsilon^k = x+yf\omega$ und $|x|, |y|\leqq N$, die Lösungen (3). Dann fällt wegen Lemma 2. die Anzahl dieser Einheiten zwischen zwei konstante Produkte von $\log N$.

Sei $\alpha_j = a_j+f\sqrt{d}b_j$ ($j=1, 2$), $\varepsilon = x+\sqrt{d}fy$ (a_j, b_j, x, y ganz). Dann ist zur Erfüllung von (8) notwendig, daß das Gleichungsytem

$$a_1x_1+a_2x_2 = k_ix+l_idf^2y$$
$$b_1x_1+b_2x_2 = l_ix+k_iy$$

erfüllt ist. Aber dieses können wir wegen des obengesagten sowohl für x_1, x_2, als auch für x, y, bei irgendeinem i, als auch für Unbekannten im Ring der ganzrationalen Zahlen lösen.

Andererseits wenn $\max(|x|, |y|)\leqq Nd'$, dann $\max(|x_1|, |x_2|)\leqq N$ und umgekehrt, wenn $\max(|x_1|, |x_2|)\leqq N$ dann ist $\max(|x|, |y|)\leqq Nd''$, wo d' und d'' unabhängig von N sind. Aber dann ist mit der Benutzung von Lemma 2.

$$c_5 \log N \leqq c_7 \log Nd' \leqq P_2(N) \leqq c_8 \log Nd'' \leqq c_6 \log N.$$

Zunächst brauchen wir noch ein Lemma.

Lemma 4. (K. Győry—L. Lovász [3].) *Wenn K ein nicht reeller K-Körper ist und $\alpha\in K$, so* $\operatorname{Re}\alpha$, $i\operatorname{Im}\alpha\in K$ *und*

$$|N_{K/R}(\operatorname{Re}\alpha)|, \quad |N_{K/R}(i\operatorname{Im}\alpha)| \leqq |N_{K/R}(\alpha)|$$

BEWEIS. Siehe [3] (Siehe auch [4]).

BEWEIS DES SATZES. Wir können annehmen, daß $i \operatorname{Im} \alpha_2$, $i \operatorname{Im} \alpha_3$ nicht 0 und linear unabhängig sind.

Weil wenn $\alpha_2 = \beta_2 + i\beta_2'$, $\alpha_3 = \beta_3 + i\beta_3'$ ($\beta_3' \neq 0$) und entweder $\beta_2'=0$ oder $\beta_2'=r\beta_3'$ ($r \in R$) und $\beta_2' \neq 0$ wenden wir auf den Modul M die Ähnlichkeitstransformation $\bar{\alpha}_3 M$ (d.h. die Gleichung (2) multiplizieren wir mit $|N_{K/R}(\bar{\alpha}_3)|$). Für Generatoren $\bar{\alpha}_3 M$ ist die Bedingung schon erfüllt.

Sei nämlich $\bar{\alpha}_3 M = \{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\}$, wo

$$\begin{aligned}
\alpha_1' &= \alpha_3 \bar{\alpha}_3 \\
\alpha_2' &= \bar{\alpha}_3 = \beta_3 - i\beta_3' \\
\alpha_3' &= \alpha_2 \bar{\alpha}_3 = \beta_2\beta_3 + \beta_2'\beta_3' + i(\beta_2'\beta_3 - \beta_2\beta_3').
\end{aligned}$$

Wenn $\beta_2'=0$, dann $\operatorname{Im} \alpha_2' = -\beta_3'$ und $\operatorname{Im} \alpha_3' = -\beta_2\beta_3'$ und weil $\beta_2 \notin R$ (anderfalls sind $1, \alpha_2, \alpha_3$ linear abhängig) sind die obigen Bedingungen erfüllt.

Wenn aber $\beta_2'=r\beta_3'$ dann $\operatorname{Im} \alpha_2' = -\beta_3'$ und $\operatorname{Im} \alpha_3' = \beta_3'(r\beta_3 - \beta_2)$. Weil $\beta_3' \neq 0$ so $\operatorname{Im} \alpha_2' \neq 0$. $\operatorname{Im} \alpha_3'=0$ kann nur sein wenn $r\beta_3 - \beta_2 = 0$. Dann folgt aber wegen der Bedingung, daß $\alpha_2 = r\alpha_3$, was ein Widerspruch ist. $\operatorname{Im} \alpha_2'$ und $\operatorname{Im} \alpha_3'$ kann auch nicht linear abhängig sein, weil wenn sie es wären, dann $\beta_3'(r\beta_3 - \beta_2) = -s\beta_3'$ ($s \in R$), d.h. $\beta_3'(r\beta_3 - \beta_2 + s) = 0$. Aus diesem folgt, daß $r\alpha_3 - \alpha_2 + s = 0$, was wieder ein Widerspruch ist.

Weiter $i \operatorname{Im} \alpha_j = \dfrac{\alpha_j - \bar{\alpha}_j}{2}$ ($j=1, 2$), darum wenn wir (2) mit einer geeigneten ganzen rationalen Zahl multiplizieren können erreichnen, daß $i \operatorname{Im} \alpha_2$, $i \operatorname{Im} \alpha_3$ ganz seien, was wir im Weiteren annehmen.

Nun beweisen wir die Abschätzung nach oben. Auf Grund von Lemma 4. ist für sämtliche $x=(x_1, x_2, x_3)$ Lösungen von (2), daß $|N_{K/R}(i \operatorname{Im} \alpha_2 x_2 + i \operatorname{Im} \alpha_3 x_3)| \leqq |a|$ erfüllt. Weil auf der linke Seite eine ganzrationale Zahl steht, hat die Gleichung

$$N_{K/R}(i \operatorname{Im} \alpha_2 x_2 + i \operatorname{Im} \alpha_3 x_3) = a' \tag{9}$$

mindestens für ein $a' \in Z$, wo $|a'| \leqq |a|$, unendlich viele Lösungen. Gäbe es nämlich für jede ganze rationale Zahl $|a'| \leqq |a|$ nur endlich viele Lösungen, dann wäre auch die Zahl der Lösungen von (2) endlich, da zu jedem festen x_2, x_3 endlich viele (höchstens $[K:R]=n$) x_1 existieren.

Also ist der Modul $M' = \{i \operatorname{Im} \alpha_2, i \operatorname{Im} \alpha_3\}$ wegen Satz von Thue [7] (Siehe noch [1] oder [6]) voll, quadratisch oder ähnlich zu einem solchen. Also gibt es auf Grund von Lemma 3. eine Konstante c_9, daß bei der Bedingung $\max(|x_2|, |x_3|) \leqq N$ die Lösungsanzahl von (9) $\leqq c_9 \log N$ ist. Wegen des Vorangehenden gehören zu jedem x_2, x_3 höchstens n x_1 und es gibt höchstens $2|a|$ Gleichung der Gestalt (9), also

$$P(N) \leqq 2n|a| c_9 \log N = c_2 \log N$$

Endlich beweisen wir die Abschätzung nach unten. Multiplizieren wir beide Seite von (2) mit einer ganzen rationalen Zahl so können wir erreichen, daß $\alpha_2 m = \alpha_2'$ und $\alpha_3 m = \alpha_3'$ ganz sind, so wir mit den Bezeichnungen $\alpha_1' = m$ und $a' = am^{[K:R]}$ (2) in der Gestalt $|N_{K/R}(\alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \alpha_3' x_3)| \leqq a'$ schreiben können.

Sei $\{\alpha, \beta\}$ Teilraum des durch den Modul $\{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\}$ erzeugten Vektorraumes über R, der zu einem reellen quadratischen Teilkörper ähnlich ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß

$$\alpha = c_{11}\alpha_1' + c_{21}\alpha_2' + c_{31}\alpha_3', \quad \beta = c_{12}\alpha_1' + c_{22}\alpha_2' + c_{32}\alpha_3'; \qquad c_{ij} \in Z$$

Seien c_{13}, c_{23}, c_{33} solche ganze rationale Zahlen, daß

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

und betrachten wir die Transformation

$$x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3$$
$$x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3$$
$$x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3$$

wo

$$|x_k| \leqq c \max_{1 \leqq i \leqq 3} (|y_i|) \quad \text{und} \quad c = 3 \max_{1 \leqq i, k \leqq 3} (|c_{ik}|).$$

Angenommen, daß $R(\alpha, \beta) = K'$ quadratisch ist, so gibt es ein $0 \neq a'' \in Z$ für welches die Gleichung

$$N_{K'/R}(\alpha y_1 + \beta y_2) = a'' \tag{10}$$

eine Lösung $y_1, y_2 \in Z$ hat. Dann hat sie unendlich viele Lösungen.

Bezeichne a'' die kleinste solche Zahl im absoluten Betrag. Die Anzahl der Lösungen von (10), für welche $\max_{1 \leqq i \leqq 3} (|y_i|) \leqq \frac{N}{c}$ ist, ist $\geqq c_1 \log N$ auf dem Grund von Lemma 3. Jetzt sind sämtliche Lösungen y_1, y_2 von (10) auch Lösungen der Gleichung

$$a''^{[K:K']} = N_{K/R}(\alpha y_1 + \beta y_2) = N_{K/R}(\alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \alpha_3' x_3)$$

bei $y_3 = 0$. Zu allen Lösungen $(y_1, y_2, 0)$ gehört eine solche Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)$ der nächsten Gleichung, welche die Bedingung $\max_{1 \leqq i \leqq 3} (|x_i|) \leqq N$ erfüllt. Wenn also $A \geqq |a'|^{[K:K']}/m^{[K:R]}$, so hat die Ungleichung (2) für alle $a \geqq A$ mindestens $c_1 \log N$ Lösungen.

Literatur

[1] A. BAKER, Contributions to the theory of diophantine equations, I, II, *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A.* **263** (1968), 173—208.

[2] Ш. И. БОРЕВИЧ—И. Р. ШАФАРЕВИЧ, Теория чисел, Издательство „Наука", Москва, 1964.

[3] K. GYŐRY—L. LOVÁSZ, Representation of integers by norm-forms II., *Publ. Math. (Debrecen)*, **17** (1970), 173—181.

[4] K. GYŐRY, Sur l'irréductibilité d'une classe des polynômes, I., *Publ. Math. (Debrecen)*, **18** (1971), 289—307.

[5] С. ЛЕНГ, Введение в теорию диофантовых приближений, Издательство „Мир", Москва, 1970.

[6] W. M. SCHMIDT, Linearformen mit algebraischen Koeffizienten, II., *Math. Ann.* **191** (1917), 1—20.

[7] A. THUE, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. Reine. Angew. Math.* **135** (1909), 284—305.

(Eingegangen am 30. Juni 1972.)