Eine Bemerkung zum Hilbert—Kamke-Problem

S. TURJÁNYI (Debrecen)

Herrn Professor A. Rapcsák zum 60-sten Geburtstag mit Verehrung gewidmet

1. Einleitung

Sei $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl. Nach dem *Satz von Waring—Hilbert* [3] existiert ein nur von n abhängendes $s=s(n)$ derart, daß die Gleichung

$$x_1^n + \dots x_s^n = N$$

für jede natürliche Zahl N in rationalen ganzen Zahlen lösbar ist, d. h. die Folge $\{0, 1^n; 2^n; \dots\}$ ist eine Basisfolge der natürlichen Zahlen. In diesem Zusammenhang hat E. KAMKE das folgende Problem aufgeworfen: welchen Bedingungen muß eine streng wachsende Folge $A\{=0; 1; a_3; a_4; \dots\}$ von ganzen Zahlen genügen damit die Folge $A^n = \{0; 1; a_3^n; a_4^n \dots\}$ eine Basisfolge ist.

Bis jetzt ist es nicht gelungen, eine allgemeine Antwort zu geben. Gegenwärtig sind zwei diesbezügliche Ergebnisse bekannt. L. K. HUA bewies in [2], daß die Folge der n-ten Potenzen der Primzahlen eine Basisfolge ist. G. J. RIEGER zeigte in [6], daß A^n eine Basisfolge ist, falls die Snirelman-Dichte von A positiv ist.

Als eine Verallgemeinerung des Waring-Problems kann das sogenannte Hilbert—Kamke-Problem aufgefaßt werden, d. h. die Frage der Lösbarkeit des diophantischen Gleichungssystems

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1^n + x_2^n + \dots + x_s^n = N_n \\ x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_s^{n-1} = N_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_s = N_1 \end{cases}$$

in rationalen ganzen Zahlen $x_i \geqq 0$. Zur Lösbarkeit von (1) ist es notwendig, daß dieses System in nichtnegativen reellen Zahlen lösbar sei, was zwischen den N_k gewisse Größenordnungsbeziehungen bedingt. Nehmen wir an, daß reelle Zahlen $l_k > 1$ und $0 < i_k < 1$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ derart existieren, daß

$$(2) \qquad l_k N_n^{k/n} \leqq N_k \leqq i_k s^{1-k/n} N_n^{k/n} \qquad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

gilt. K. K. MARDŽANIŠVILI zeigte in [5], daß zur Lösbarkeit von (1) die Bedingungen

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} N_n & (n-1)^n & \dots 1^n \\ N_{n-1} & (n-1)^{n-1} & \dots 1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_1 & (n-1) & \dots 1 \end{vmatrix}; \dots; \begin{vmatrix} n^n & (n-1)^n & \dots N_n \\ n^{n-1} & (n-1)^{n-1} & \dots N_{n-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ n & (n-1) & \dots N_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod R$$

notwendig sind, wobei

$$R = \begin{vmatrix} n^n & (n-1)^n & \dots 1^n \\ n^{n-1} & (n-1)^{n-1} & \dots 1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & (n-1) & \dots 1 \end{vmatrix}.$$

G. V. EMELJANOV (vgl. [1] oder [2]) entwickelte die Methode von Linnik weiter und zeigte auf elementarem Wege, daß bei den Bedingungen (2) und (3) das System (1) im Bereich der Zahlen $\{0; 1; 2; \dots\}$ lösbar ist, falls $s=s(n)$ genügend groß ist. L. K. Hua bewies in [2], daß (1) auch im Bereich der Zahlen $\{0; P_1; P_2; \dots\}$ lösbar ist, wobei p_i die i-te Primzahl bezeichnet. Das Analogon der Behauptung von Rieger ist für das Hilbert—Kamke-Problem nicht bekannt. In dieser Arbeit beweisen wir diese entsprechende Behauptung, d. h. wir zeigen den folgenden

Satz. *Es sei $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl und $A=\{0; 1; a_3; \dots\}$ eine streng monoton wachsende Folge ganzer Zahlen von positiver Dichte. Es existiert eine nur von n und A abhängige Konstante $s=s(n; A)$ derart, daß* (1) *eine zu A gehörige Lösung hat, falls die natürlichen Zahlen $N_1; \dots; N_n$ die Bedingungen* (2) *und* (3) *erfüllen.*

2. Bezeichnungen und vorbereitende Bemerkungen

Wir bezeichnen mit $\{\overline{M}\}$ die Menge der Vektoren mit nichtnegativen rationalen ganzen Koordinaten von E^n. Bezeichne weiter $\{\overline{N}\}$ die Menge derjenigen Vektoren $\overline{N}=(N_1; N_2; \dots; N_n)$ von $\{\overline{M}\}$ für deren Koordinaten $N_1; N_2; \dots; N_n$ (2) und (3) erfüllt sind. Falls $\bar{a}; \bar{b} \in \{\overline{M}\}$ und falls für alle Koordinaten von $\bar{a}$; $\bar{b}$ die Beziehung $a_k \leqq b_k (1 \leqq k \leqq n)$ gilt, so wollen wir die Bezeichnung $\bar{a} \leqq \bar{b}$ einführen und sagen, daß $\bar{a}$ *durch $\bar{b}$ beschränkt ist* (s. [2]).

Wenn $\{A\} \subseteqq \{B\} \subseteqq \{M\}$ so verstehen wir unter der *Dichte der Vektorfolge* $\{\overline{A}\}$ *in bezug auf* $\{B\}$ *die Zahl.*

$$D_{\{B\}}\{A\} = \inf \frac{r_{\overline{m}}\{A\}}{r_{\overline{m}}\{B\}},$$

wobei $\overline{m}$ alle Vektoren von $\{B\}$ durchläuft, während $r_{\overline{m}}\{A\}$ bzw. $r_{\overline{m}}\{B\}$ die Anzahl derjenigen Vektoren der Folge $\{A\}$ bzw. $\{B\}$ bezeichnet, die durch $\overline{m}$ beschränkt sind (s. [2], S. 55). Wenn nun $A=\{0; 1; a_3; \dots\}$ eine streng monoton wachsende Folge von rationalen ganzen Zahlen ist und $N=\{0; 1; 2; \dots\}$ sowie $\{\overline{A}^n\}$ die Folgen derjenigen Vektoren $\bar{a}_i \in \{\overline{M}\}$ sind, deren Koordinaten die Gestalt $(a_i^n; a_i^{n-1}; \dots; a_i)$ haben, dann ist die Behauptung unseres Satzes folgendermaßen formulierbar: Ist $\{\overline{A}^n\}$ eine Teilfolge positiver Dichte von $\{\overline{N}^n\}$, so ist $\{\overline{A}^n\}$ eine Basisfolge von $\{\overline{N}\}$.

3. Beweis des Satzes

Zum Beweis des Satzes brauchen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. (G. V. EMELJANOV [1], oder [2].) *Sei* $\overline{m} \leqq \overline{N}$; $\overline{m}$; $\overline{N} \in \{\overline{N}\}$. *Betrachten wir die Menge der Vektoren der Gestalt*

$$\overline{N} = (N_1; N_2; \dots; N_n); \quad \{\overline{F(x)}\} = \{(f_n(x); f_{n-1}(x); \dots; f_1(x))\} \tag{4}$$

wo

$$f_j(x) = a_{0j}x^j + a_{1j}x^{j-1} + \dots + a_{jj} \in Z[x],$$

und $a_{0j} \neq 0$ *nur von* j *abhängt,* x *alle nicht negativen rationalen ganzen Zahlen durchläuft und*

$$a_{ij} = a_{ij}(j; N_j) \quad (i > 1); \quad |a_{ij}| < B_n p \tag{5}$$

gilt. Dann existieren $K = K(n)$ *derart, daß die Zahl der ganzzahligen Lösungen* $0 \leqq x_i \leqq p$ *der Gleichung*

$$\overline{F(x_1)} + \dots + \overline{F(x_K)} = \overline{m} \tag{6}$$

$\leqq B_n \dfrac{p^K}{p^{n^2}}$ *ist, wo* B_n *nur von* n *abhängt.*

Sei nun $A = \{0; 1; a_3; \dots\}$ eine den Bedingungen des Satzes genügende Folge der Dichte $\alpha > 0$ und betrachten wir speziell die Vektorfolgen

$$\overline{F(a_i)} = (a_i^n, a_i^{n-1}, \dots, a_i) \qquad (i = 0, 1, \dots). \tag{7}$$

Sei $\overline{N} = (N_n; \dots; N_1) \in \{\overline{N}\}$ und wir ordnen diejenigen Elemente der Vektorfolge $\{K \cdot \overline{F(a_i)}\}$, die durch $\{N\}$ beschränkt sind, in eine Folge an. Dann kann ein so erhaltener Vektor auch das Ergebnis einer mehrfachen Darstellung sein. Nehmen wir an, daß der j-te Vektor die Multiplizität $r(j)$ hat, d.h. so oft in der Summe der betrachteten Gestalt darstellbar ist. Dann gilt der folgende

Hilfssatz 2. *Bei den obigen Bezeichnungen und Bedingungen gilt*

$$\sum_{j=1}^{R} r(j) \geqq B_n' N_n^{K/n}, \quad R = r_{\overline{N}}\{K \cdot \overline{F(a_i)}\},$$

Wo $B_n' > 0$ *eine nur von* n *und von* α *abhängige Konstante ist.*

BEWEIS. Wir betrachten die Zahl derjenigen Vektoren $\overline{F(a_i)}$ der Gestalt (7), die durch den Vektor $\dfrac{1}{K}\overline{N}$ beschränkt sind. Die Zahl dieser ist $= \alpha c_n \left(\dfrac{N_n}{K}\right)^{1/K}$. Nun bilden wir mit den Vektoren $\overline{F(a_i)}$ die Vektoren $\overline{F(a_{i_1})} + \dots + \overline{F(a_{i_K})}$. Diese sind offenbar durch N beschränkt und ihre Zahl ist, zusammen mit der Multiplizität

$$= \frac{\alpha^K}{K^{K/n}} c_n^{K/n} N_n^{K/n} = B_n' N_n^{K/n}$$

wo

$$B_n' = \frac{\alpha^K c_n^K}{K^{K/n}}, \quad \text{qu.e.d.}$$

Sei nun $\{\bar{A}\} \subseteqq \{\bar{B}\} \subseteqq \{\bar{M}\}$ wo für die Koordinaten von

$$\bar{a} = (a_n; \ldots; a_1) \in \{\bar{A}\} \quad \text{bzw.} \quad \bar{b} = (b_n; \ldots; b_1) \in \{\bar{B}\}$$

die Beziehungen $a_1 \leqq \ldots \leqq a_n$ bzw. $b_1 \leqq \ldots \leqq b_n$ gelten.

Der folgende Hilfssatz stammt ursprünglich von SCHNIRELMANN. Die hier auftretende allgemeinere Form stammt von G. V. EMELJANOV.

Hilfssatz 3. *Bei der den obigen Eigenschaften gilt für die Vektorfolgen* $\{\bar{A}\}$ *und* $\{\bar{B}\}$

$$D_{\{B\}}(\{\bar{A}\} + \{\bar{A}\}) \geqq 2D_{\{B\}}\{\bar{A}\} - D^2_{\{B\}}\{A\}$$

Zum BEWEIS vgl. z. B. [2].

BEWEIS DES SATZES. Wir zeigen, daß mit der Konstanten K aus Hilfssatz 1 das K-fache der Vektorfolge mit der Gestalt (7) schon von positiver Dichte in bezug auf die Vektormenge $\{N\}$ ist. Hieraus ergibt sich nach wiederholter Anwendung von Hilfssatz 3, daß die Vektorfolge (7) für hinreichend große $s = s(n; A)$ eine Basisfolge s-ter Ordnung von $\{N\}$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen jetzt den Hilfssatz 1 anwenden. Betrachten wir die Vektoren $\bar{m}; \bar{N} \in \{\bar{N}\}$ wo $\bar{m} \leqq \bar{N}$; $p = N_n^{1/n}$ und $\overline{F(x)} = (x^n; \ldots; x)$. Wenn wir die ganzen Zahlen $x \geqq 0$ betrachten, so genügt die Vektorfolge $\{\overline{F(x)}\}$ bei obigen $\bar{m}$ und $\bar{N}$ den Bedingungen von Hilfssatz 1 bei geeignetem $K = K(n)$, und so ist die Zahl der Lösungen der Gleichung (6) $\leqq B_n \dfrac{p^k}{p^{n2}}$. Die so erhaltene Abschätzung ist erst recht dann richtig, wenn wir die Lösungen von (6) nur aus der Folge $A = \{0; 1; a_3; \ldots\}$ nehmen d.h. wenn wir uns auf Vektoren $\overline{F(a_i)}$ von der Form (7) beschränken. Wir betrachten jetzt die schon früher gegebene Anordnung der durch $\bar{N}$ nicht beschränkten Elemente der Vektorfolge $\{K\overline{F(a_i)}\}$. Wobei wir die Zahl der Darstellungen des j-ten Vektors wieder mit $r(j)$ bezeichnen. Dann gilt gemäß der obigen Ergebnisse

$$\sum_{j=1}^{R} r(j) \leqq B_n \frac{{}^{\prime}N_n^{K/n}}{N_n^n}, \quad R = r_{\bar{N}}\{K\overline{F(a_i)}\},$$

woraus auf Grund von Hilfssatz 2

$$r_{\bar{N}}\{K \cdot F(a_i)\} \geqq \frac{1}{B_n} N_n^{K/n} \sum_{j=1}^{r} r(j) \geqq c' N_n^n$$

gilt, wo $c' > 0$ nur von n und von α abhängt.

Hieraus ergibt sich

$$\frac{r_{\bar{N}}\{K\overline{F(a_i)}\}}{r_{\bar{N}}\{\bar{N}\}} \geqq c_n' \frac{N_n^n}{r_{\bar{N}}\{\bar{N}\}} \geqq c_n'' > 0,$$

womit wir unsere Behauptung bewiesen haben.

Literatur

[1] Г. В. Емелянов; Об одной системе диофантовых уравнений. Упен зал Л Г У; **19** (1950) 3—398.
[2] А. О. Гельфонд—Ю. Б. Линник; Элементарные методы в аналитической теории чисел, Москва, 1962
[3] D. Hilbert, Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen, *Math. Ann.* **67** (1909), 281—300.
[4] L. K. Hua, Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie. *Enzykl. Math. Wiss. Bd.* I_2 *Leipzig*, 1958.
[5] K. K. Mardžanišvili, Über die gleichzeitige Darstellung zweier Zahlen durch Summen ganzer $1; 2; \ldots; n$-ter Potenzen, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* **1** (1937), 609—631.
[6] G. J. Rieger, Über eine Verallgemeinerung des Waringschen Problems, *Math. Z.* **58** (1953), 281—283.

(Eingegangen am 17. Januar 1973.)