Sur les polynômes à coefficients entiers et de discriminant donné, II.

A M. le Professeur A. Rapcsák pour son 60e anniversaire

Par K. GYŐRY (Debrecen)

1. Introduction

Désignons par $\|f\| = \max_{0 \leqq i \leqq k} |a_i|$ la hauteur d'un polynôme $f(x) = a_0 x^k + \dots + a_k \in \mathbf{Z}[x]$. Appelons les polynômes $f(x)$ et $f^*(x) \in \mathbf{Z}[x]$ équivalents si l'on a $f^*(x) = f(x+a)$ avec un $a \in \mathbf{Z}$. Dans ce cas pour leur discriminant on déduit $D(f^*) = D(f)$. S'il existe donc un polynôme $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ de discriminant D, alors il y en a une infinité. Inversement, soit $D \geqq 1$ une constante et soit $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ un polynôme unitaire arbitraire tel que

$$0 < |D(f)| \leqq D \qquad (a_0 = 1). \tag{1}$$

Dans la partie I. (voir [7]) nous avons démontré qu'il existe des constantes $c'(D)$, $c''(D)$, calculables explicitement et dépendant seulement de D, telles que $\deg f \leqq c'(D)$ et $\|f^*\| \leqq c''(D)$ pour un f^* équivalent à f. Par conséquent, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes unitaires $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ de discriminant $D \neq 0$, non équivalents deux à deux, et on peut, par un nombre fini d'opérations, déterminer un tel système des polynômes $f(x)$. Dans [6] et [7] nous avons obtenu plusieurs corollaires et applications de ce théorème, en généralisant quelques résultats antérieurs.

Dans notre travail nous donnons, entre autres, des formules explicites pour les constantes $c'(D)$ et $c''(D)$, et ainsi nous pouvons explicitement donner aussi les constantes qui se trouvent dans les corollaires de notre théorème. Les constantes obtenues ici sont meilleures que celles que l'on obtiendrait dans [7] au cours de leurs calculs effectifs. Nous déterminons la meilleure valeur possible de c' aussi dans le cas où $f(x)$ n'est pas nécessairement unitaire, d'où s'obtient une application aussi pour des formes binaires. Avec nos théorèmes nous généralisons de certains résultats de D. HILBERT [10] et de T. NAGELL [13], [14], [15].

2. Théorèmes

Si $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ est irréductible et s'il satisfait à (1), de l'inégalité de Minkowski, concernant les discriminats des corps algébriques, on peut aisément déduire l'estimation $c'(D) \leqq c \log D$ avec une constante absolue c calculable explicitement. Dans la suite nous donnons d'abord la meilleure valuer possible de la constante $c'(D)$

aussi pour des polynômes $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ non nécessairement irréductibles et, en même temps, nous généralisons l'un des théorèmes de HILBERT [10].

Théorème 1. *Soit* $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ *un polynôme tel que* $D(f) \neq 0$.

a) *On a*

$$\deg f \leqq 3 + \frac{2}{\log 3} \log |D(f)|. \tag{2}$$

Dans (2) *l' égalité a lieu si et seulement si l'on a*

$$f = (a_0 x - b_0)(a_1 x - b_1)\big((a_0 + a_1) x - (b_0 + b_1)\big) = P(x),$$

ou

$$f = P(x)[(a_0 x - b_0)^2 + (a_0 x - b_0)(a_1 x - b_1) + (a_1 x - b_1)^2],$$

où $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbf{Z}$, $a_0 a_1 (a_0 + a_1) \neq 0$ *et* $a_0 b_1 - b_0 a_1 = \pm 1$.

b) *Si* $f(x)$ *n'a pas de racines rationnelles, alors on a*

$$\deg f \leqq \frac{2}{\log 3} \log |D(f)| \tag{3}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $\deg f = 2$ *et* $D(f) = -3$.

c) *Si* $f(x)$ *est unitaire*), alors*

$$\deg f \leqq 2\left(1 + \frac{\log |D(f)|}{\log 3}\right), \tag{4}$$

l' égalité n' étant vraie que si $f(x)$ *est équivalent à* $x(x-1)$ *ou* $x(x-1)(x^2 - x + 1)$.

Remarque 1.1. Dans [10] Hilbert a déterminé tous les polynômes $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ de discriminant $D(f) = \pm 1$. Ce théorème de Hilbert résulte de notre théorème de manière évidente.

Remarque 1.2. Comme nous le prouverons au cours de la démonstration, si $f(x)$ est irréductible sur le corps des nombres rationnels Q, (3) peut être remplacé par $\deg f < \log |D(f)|$, sauf les cas où $\deg f = 2$ et $D(f) = -3, -4, -7$ ou 5.

Soit $f(x) \in Z[x]$ et $D(f) \neq 0$.Soit $f(x) = f_1(x) \dots f_r(x) f^*(x)$ $(r \geqq 0)$ une décomposition de $f(x)$ dans $Z[x]$, telle que les f_i soient irréductibles sur Q et de degré $k_i \geqq 2$, et toutes les racines de $f^*(x)$ soient rationnelles et $0 \leqq \deg f^* = k^* \equiv m \pmod 3$ $(0 \leqq m < 3)$. Désignons par $2t$ le nombre des racines non réelles de $f(x)$. (9), (10), (11) et (12) implique immédiatement l'inégalité suivante concernant $D(f)$:

Proposition. *Avec les notations précédentes on a*

$$|D(f)| \geqq 2^{\frac{(k^* + m - 3)(k^* - m)}{3}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2t} \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\right)^2.$$

Dans le cas où $r = 0$, *il faut remplacer le troisième facteur par* 1.

Considérons ensuite un corollaire de notre théorème 1 qui concerne les formes binaires. Appelons les formes $F(x, y)$ et $F^*(x, y) \in \mathbf{Z}[x, y]$ unimodulairement équivalentes si l'on a $F^*(x, y) = F(ax + by, cx + dy)$ où $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ et $ad - bc = \pm 1$.

*) Un polynôme est dit unitaire (dans [6], [7] normé) si son coefficient dominant est égal à 1.

Pour leurs discriminants on obtient $D(F^*)=D(F)$. CH. HERMITE [9] a démontré qu'il n'existe qu'un nombre fini de formes binaires, non équivalentes deux à deux, de discriminant donné et de degré $n\leqq 3$ dans $\mathbf{Z}[x, y]$ [1]). Récemment, B. J. BIRCH et J. R. MERRIMAN [4] ont démontré ce théorème pour tout n fixé dans une forme plus générale (dans une forme p-adique et pour des corps algébriques arbitraires). Si nous nous bornons aux formes de $\mathbf{Z}[x, y]$, d'après le théorème de Birch et Merriman et d'après notre théorème 1, le théorème cité reste vrai aussi sans fixer les degrés des formes. En effet, dans toutes les classes d'équivalence il y a une forme $F(x, y)$ telle que $F(1, 0)\neq 0$. Dans ce cas, d'après $F(x, 1)=f(x)$, deg $F=\deg f$ et $D(F)=D(f)$, de (2) on déduit $\deg F \leqq 3+2.(\log 3)^{-1}.\log|D(F)|$. [2]) Donc, il en résulte ce qui suit:

Corollaire 1. *Il n'existe qu'un nombre fini de formes* $F(x, y)\in\mathbf{Z}[x, y]$ *non équivalentes deux à deux, de discriminant donné* $D(F)=D\neq 0$.

La valeur absolue du discriminant $D(f)$ d'un polynôme unitaire $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$ peut être arbitrairement grand par rapport à son degré k. Par conséquent, si $|D(f)|/k$ est relativement grand, l'estimation suivante est meilleure que celle qui se trouve dans notre théorème 3 (et qui ne dépend que de D).

Théorème 2. *Soit* $D\geqq 2$ *une constante et soit* $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$ *un polynôme unitaire de degré* $k\geqq 3$ *et de discriminant* $0<|D(f)|\leqq D$. *Alors, pour un polynôme* f^* *équivalent à* f *on a*

$$\|f^*\| \leqq \exp\{[(3k)^{12}D(\log D)^{4/n}]^{n^2(n^2-1/2)}\} \tag{5}$$

avec $n=6\binom{k}{3}$ *et où, en supposant que* $f(x)$ *est réductible sur* Q *et* $k\geqq 4$, *on peut prendre* $n=6\binom{k-1}{3}$. [3])

Par conséquent, d'après nos théorèmes 1- et 2, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes unitaires $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$ de discriminant donné $D\neq 0$ et non équivalents deux à deux, et on peut, par un nombre fini d'opérations, déterminer un tel système des polynômes $f(x)$.

Remarque 2.1. Si $\deg f=k=2$, on a $\|f^*\|\leqq D^2+1$ pour un f^* équivalent à f (voir la démonsration).

Remarque 2.2. Soient donnés deux polynômes $f(x)=x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k$ et $f^*(x)=x^k+a_1'x^{k-1}+\ldots+a_k'$. Pour qu'ils soient équivalents il faut et il suffit qu'on ait $a_1\equiv a_1' \pmod k$ et que, en prenant $a_1'=ka+a_1$, on ait $f^*(x)=f(x+a)$. Donc, on peut aisément reconnaître si ceux-ci sont équivalents ou non.

[1]) Hermite (Oeuvres, Tome I, pp. 84—93; 164—192, Gauthier-Villars, Paris, 1905) a démontré ce théorème pour chaque $n\geqq 4$ fixé avec une notion de discriminant différente, avec un déterminant convenablement choisi au lieu du discriminant.

[2]) Nous avons obtenu le corollaire 1 originairement dans cette forme. A la fin de mai 1973 M. le Professeur A. SCHINZEL a bien voulu appeler mon attention sur le travail [4].

[3]) Voir la note à la fin de ce travail.

Remarque 2.3. A l'aide d'un analogue p-adique du lemme 2 (voir [5] et [18]) on peut formuler et démontrer notre théorème 2 dans une forme p-adique. Il fera l'objet d'une publication ultérieure.

Ensuite nous donnons une formule explicite pour $c''(D)$.

Théorème 3. *Soit $D \geqq 3$ une constante et soit $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ un polynôme unitaire tel que $0 < |D(f)| \leqq D$. Alors, pour un polynôme f^* équivalent à f on a*

$$\|f^*\| \leqq \exp\exp\{4(\log D)^{13}\} \tag{6}$$

et, si $f(x)$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$, on obtient

$$\|f^*\| \leqq \exp\exp\{2(\log D)^{13}\}. \tag{6'}$$

Nous remarquons que du corollaire 1 (c'est-à-dire du théorème cité de Birch et Merriman et de notre théorème 1) on peut déduire le théorème 3 sans calculabilité effective des constantes de (6) et (6').

Considérons ensuite les corollaires de nos théorèmes (qui se trouvent déjà aussi dans [7] avec des constantes calculables explicitement), avec des constantes explicites. Dans la suite soient $c_1 = c_1(D) = 2\left(1+\dfrac{\log D}{\log 3}\right)$ et $c_2 = c_2(D) = \exp\exp\{4(\log D)^{13}.\}$

Corollaire 2. *Soient donnés les nombres $D \geqq 3$ et $N \geqq 1$ et soit $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ un polynôme unitaire tel que $0 < |D(f)| \leqq D$ et $|f(0)| \leqq N$. Alors on a*

$$\|f\| \leqq c_2\{\max(c_1 c_2 + 1, N)\}^{c_1}. \tag{7}$$

Par conséquent, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes unitaires $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ tels que $0 < |D(f)| \leqq D$ et $|f(0)| \leqq N$, et on peut déterminer tous ces polynômes. Ce corollaire reste vrai aussi dans le cas où nous fixons un autre coefficient des polynômes $f(x)$ au lieu de $f(0)$ (naturellement, dans ce cas, il faut prendre autres constantes dans (7)). Cette proposition est une généralisation effective des théorèmes analogues de T. Nagell [13], [15] qui concernent les polynômes unitaires à coefficients entiers de degré $\leqq 4$, et les nombres algébriques entiers de degré $\leqq 4$. Spécialement, de notre corollaire résulte que le nombre des unités de même discriminant est fini dans l'anneau des nombres algébriques entiers, et elles peuvent être effectivement déterminées.*)

Soit désigné par

$$\Delta(f) = \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j|$$

la distance minimale entre les racines d'un polynôme $f(x) = \prod_{i=1}^{k} (x-\alpha_i)$. Si $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ est un polynôme unitaire, alors $|D(f)| \geqq \Delta(f)$. Inversement, on obtient la proposition suivante:

Corollaire 3. *Soit $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ un polynôme unitaire de discriminant $|D(f)| > 1$. Alors*

$$\Delta(f) > |D(f)|\left\{c_2(|D(f)|)\right\}^{-c_1(|D(f)|)} > 0. \tag{8}$$

*) *Note ajoutée aux épreuves.* Notre résultat fournit la solution effective d'un problème qui se trouve dans le livre de W. Narkiewicz, Elementary and analytic theory of algebraic numbers, *Warszawa*, 1974 (p. 130 et 468).

Dans le corollaire 3 il y a une seule exception pour laquelle $|D(f)|=1$, notamment le polynôme $f(x) = x(x-1)$.

Dans [7], en corollaire de notre théorème cité dans l'introduction, nous avons donné la démonstration constructive d'un problème de T. NAGELL [14], concernant les nombres algébriques entiers de discriminant donné. Dans le corollaire suivant cette proposition sera formulée avec des constantes explicites.

Désignons par $D(\alpha)$ le discriminant d'un entier algébrique α (dans le corps $Q(\alpha)$). Si $f(x)$ est le polynôme minimal de α, alors pour la hauteur de α on obtient $H(\alpha)=\|f\|$ et pour son discriminant on a $D(\alpha)=D(f)$. Appelons les nombres algébriques entiers α et α' équivalents si le polynôme minimal f^* de α' est équivalent à f, c'est-à-dire si l'on a $\alpha'-\alpha\in\mathbf{Z}$. Des Théorèmes 1 et 3 on obtient immédiatement la proposition suivante:

Corollaire 4. *Soit $D\geqq 3$ une constante et considérons un entier algébrique α tel que $|D(\alpha)|\leqq D$. Alors*

$$\deg(\alpha) \leqq \frac{2}{\log 3}\log D$$

et, pour un certain α' équivalent à α on a

$$H(\alpha') \leqq \exp\exp\{2(\log D)^{13}\}.$$

Pour les nombres algébriques entiers de degré $\leqq 4$, ce théorème (dans une forme non effective) a été démontré antérieurement par T. NAGELL [13], [14], [15]. Dans un récent travail de B. J. BIRCH et J. R. MERRIMAN [4] se trouve également démontré ce corollaire sauf la calculabilité effective de la seconde constante.

L'inégalité concernant les degrés des α peut être remplacée par $\deg\alpha<\log D$, sauf dans les cas où α est équivalent à $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $\pm i$, $\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$ ou $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (voir la remarque 1.2.).

Antérieurement, dans [6] nous avons donné aussi une autre application (voir le théorème 2a et 2b), concernant l'irréductibilité des polynômes de la forme $g(f(x))$, de notre théorème qui se trouve dans la partie I (voir [7]). En remplaçant le lemme 20 dans [6] par notre théorème 2, on peut évidemment formuler les théorèmes 2a et 2b de [6] avec des constantes explicites. Notamment, dans le théorème 2a (pour des nombres premiers $p\geqq 5$) on peut prendre

$$c_1(G,p) = \exp\{[(4p)^{12}(2G)^{p(p-1)}(\log 2G)^{4/n}]^{n^2(n^2-1/2)}\},$$

où $n=6\binom{p}{3}$. En même temps nous remarquons que, en remplaçant le lemme 16 de [6] par le lemme 4 de ce travail, on peut obtenir, de façon simple, une constante meilleure et explicite $c=c(n_k, D_k, G)$ aussi dans le théorème 1a de [6], notamment

$$c(n_k, D_k, G) = \exp\left[c_4\{4^{n(n+2)}n^{3n}[\log G+c_4]\}^{(2n+1)^2}\right]$$

avec $n=\max(n_k, 4)$ et avec la constante explicite c_4 qui se trouve dans notre lemme 4.

La démonstration du théorème 2 et 3 est basée sur les résultats de A. BAKER [1], [2] concernant les formes linéaires des logarithmes des nombres algébriques, et sur notre méthode de graphe appliquée antérieurement dans [6] et [7].

3. Démonstrations

Pour la démonstration du théorème 1 nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 1. (P. TURÁN.) *Si un graphe simple ayant t sommets et e arêtes ne contient aucun sous-graphe complet de sommets $k+1$ et si $t = hk+m$ $(0 \leqq m < k)$, alors on a*

$$e \leqq \frac{1}{2}(t^2-m^2)\frac{k-1}{k}+\binom{m}{2}.$$

DÉMONSTRATION: voir [19].

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Tout d'abord nous allons démontrer l'inégalité (3) pour des polynômes irréductibles $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ de degré $\geqq 2$.

Soit α l'une des racines de $f(x)=0$ dans le corps des nombres complexes, et désignons par D_k le discriminant du corps algébrique $K=Q(\alpha)$. D'après un théorème connu (voir par ex. [10]) on a $D_k | D(f)$ et ainsi

$$|D_k| \leqq |D(f)|. \tag{9}$$

Si l'on désigne par n le degré de α, c'est-à-dire $[K:Q]=n$, et par $2t$ le nombre des couples complexes conjuguées de α, alors, d'après l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$|D_k| > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2t}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 \geqq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n\left(\frac{n^n}{n!}\right)^2. \tag{10}$$

Nous allons prouver que, dans le cas $n \geqq 3$, on peut prendre aussi $n < \log |D(f)|$ au lieu de (3). En effet, dans le cas $n=3$ on obtient $|D_k| \geqq 23$, dans le cas $n=4$ on obtient $|D_k| \geqq 117$ et, pour $n=5$, en conséquence de l'inégalité de Minkowski, on a $|D_k| \geqq 260$ (voir [8], p. 592.). Par conséquent, d'après (9), l'inégalité considérée est vraie pour $3 \leqq n \leqq 5$. Considérons ensuite le cas $n \geqq 6$. Alors, en conséquence de la formule de Stirling

$$(n!)^2 < 2\pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}} e^{1/6n},$$

et ainsi, de (10) on déduit

$$|D_k| > \left(\frac{\pi e^2}{4}\right)^n \frac{1}{2\pi n e^{1/6n}}.$$

D'après $n \geqq 6$ il en résulte

$$\frac{\log |D_k|}{n} > \log \frac{\pi e^2}{4} - \frac{\log 2\pi n e^{1/6n}}{n} \geqq 1,$$

c'est-à-dire

$$\log |D(f)| \geqq \log |D_k| > n.$$

Si $n=2$ et $|D(f)| \geqq 8$, cette inégalité est également vraie. Enfin, si $n=2$ et $7 \geqq |D(f)| \geqq |D_k|$, alors on a nécessairement $D_k = -3, -4, -7$ ou 5 lorsque $D(f) = -3, -4, -7$ ou 5. Mais, dans ces cas il résulte également l'inégalité (3), et dans (3) on trouve une égalité si et seulement si l'on a $D(f) = -3$.

Considérons ensuite le cas où $f(x)$ est réductible sur Q et soit

$$f(x) = f_1(x) \dots f_r(x)$$

sa décomposition irréductible dans $\mathbf{Z}[x]$. Si $f_i(x)$ est linéaire pour un i, soit supposé que $D(f_i)=1$, et désignons par $R(f_i, f_j)$ le résultant des polynômes f_i et f_j. Alors on obtient

$$D(f) = \prod_{i=1}^{r} D(f_i) \prod_{i>j} R^2(f_i, f_j). \tag{11}$$

Supposons d'abord que $f(x)$ n'a pas de racines rationnelles, c'est-à-dire que $\deg f_i \geqq 2$ pour chaque i. Alors, comme nous l'avons démontré,

$$\deg f_i \leqq \frac{2}{\log 3} \log |D(f_i)|,$$

d'où, d'après (11), on obtient

$$\frac{2}{\log 3} \log |D(f)| = \sum_{i=1}^{r} \frac{2}{\log 3} \log |D(f_i)| + \sum_{i>j} \frac{2}{\log 3} \log R^2(f_i, f_j) \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{r} \frac{2}{\log 3} \log |D(f_i)| \geqq \sum_{i=1}^{r} \deg f_i = \deg f,$$

ce qui prouve l'inégalité (3). Nous obtenons une égalité si et seulement si $\deg f_i = \frac{2}{\log 3} \log |D(f_i)|$, c'est-à-dire si $D(f_i) = -3$, $\deg f_i = 2$ et $R^2(f_i, f_j) = 1$ pour chaque i et j. Soient

$$f_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = a_1(x-\alpha_1)(x-\alpha_2);$$

$$f_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = a_2(x-\beta_1)(x-\beta_2),$$

où $a_1 a_2 \neq 0$ et

$$R(f_1, f_2) = a_1^2 a_2^2 (\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_1) = \pm 1.$$

Mais $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in Q(\sqrt{-3})$, par conséquent $a_1 a_2(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)$ et

$$a_1 a_2 (\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_1)$$

sont des entiers algébriques et des nombres rationnels à la fois. On en déduit

$$a_1 a_2(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2) = \pm 1 \quad \text{et} \quad a_1 a_2(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_1) = \pm 1.$$

Vu que

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{-3}}{2a_1}, \quad \beta_{1,2} = \frac{-b_2 \pm \sqrt{-3}}{2a_2},$$

on obtient

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + 3(a_2 - a_1)^2 = \pm 4 a_1 a_2$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + 3(a_2 + a_1)^2 = \pm 4 a_1 a_2,$$

d'où $a_1 a_2 = 0$ qui est impossible. Donc, dans (3) on trouve une égalité si et seulement si l'on a $r=1$, $\deg f_1 = 2$ et $D(f_1) = -3$.

Ensuite nous allons démontrer l'inégalité (2). En conséquence de l'inégalité (3) il suffit de considérer seulement le cas où $f(x)$ a au mois une racine rationnelle. D'abord, considérons le cas où toutes les racines de $f(x)$ sont rationnelles, c'est-à-dire

$$f(x) = (a_1x-b_1)\dots(a_tx-b_t); \qquad a_i, b_i \in \mathbf{Z}.$$

Avec la notation $a_ib_j-a_jb_i = D_{ij}$ on peut écrire

$$D(f) = \prod_{i>j} D_{ij}^2.$$

Désignons par $G(f)$ le graphe de telles couples (a_ix-b_i, a_jx-b_j) pour lesquelles $D_{ij} \neq \pm 1$. Si e est le nombre des arêtes, et si

$$|D(f)|^{1/2} = \prod_{i>j} |D_{ij}| = p_1^{\alpha_1}\dots p_u^{\alpha_u}$$

est une décomposition en nombres premiers, alors

$$e \leqq \alpha_1+\dots+\alpha_u \leqq \frac{1}{\log 2}(\alpha_1\log p_1+\dots+\alpha_u\log p_u) \leqq \frac{1}{\log 2}\log|D(f)|^{1/2}.$$

Considérons maintenant le graphe complémentaire $\overline{G(f)}$. D'après le théorème cité de Hilbert [10], si $f^*\in\mathbf{Z}[x]$ et $|D(f^*)|=1$, il en résulte que $\deg f^*\leqq 3$ (voir l'inégalité (2) pour $D(f)=\pm 1$). Par conséquent, $f(x)$ n'a pas de diviseurs de degré >3 et de discriminant ± 1, c'est-à-dire $\overline{G(f)}$ ne contient pas de quadrilatères complets. Donc, en appliquant le lemme 1 dans le cas $k=3$ (où $0\leqq m<3$), pour le nombre $\binom{t}{2}-e$ des arêtes de $\overline{G(f)}$ on obtient

$$\binom{t}{2}-\frac{\log|D(f)|}{2\log 2} \leqq \binom{t}{2}-e \leqq \frac{1}{3}(t^2-m^2)+\binom{m}{2},$$

d'où on déduit

$$\text{(12)} \qquad \frac{2}{\log 3}\log|D(f)| \geqq \frac{2\log 2}{3\log 3}(t+m-3)(t-m) > t = \deg f,$$

en supposant que $t\geqq 5$. Il suffit donc de considérer le cas $4\geqq t\geqq 2$. Mais, sauf le cas où $t=3, 4$ et $|D(f)|=1$, il résulte aisément (2) avec une inégalité stricte. D'après le théorème cité de Hilbert [10], dans le cas où $t=4$, $|D(f)|=1$ n'est pas possible, et dans le cas où $t=3$, $|D(f)|=1$ si et seulement si $a_1b_2-a_2b_1=\pm 1$ et $a_3=a_1+a_2$, $b_3=b_1+b_2$, lorsque dans (2) on obtient une égalité.

Dans la suite il suffit de démontrer l'inégalité (2) dans le cas où $f(x)$ peut être écrit sous la forme

$$f(x) = f_1(x)f_2(x),$$

où tous les facteurs de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont respectivement non linéaires et linéaires. Alors on a

$$\frac{2}{\log 3}\log|D(f)|+3 = \frac{2}{\log 3}\log|D(f_1)|+\left(\frac{2}{\log 3}\log|D(f_2)|+3\right)+$$

$$+\frac{4}{\log 3}\log|R(f_1,f_2)| \geqq \deg f_1+\deg f_2 = \deg f$$

et (2) est démontré. De plus, pour que dans (2) soit une égalité, il faut et il suffit qu'on ait $\deg f_1=2$, $D(f_1)=-3$, $\deg f_2=3$, $D(f_2)=\pm 1$ (lorsque f_2 est nécessairement de la forme précédente) et $|R(f_1,f_2)|=1$. Écrivons les polynômes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sous les formes

$$f_1(x)=ax^2+bx+c,\quad f_2(x)=P(x)=(a_0x-b_0)(a_1x-b_1)[(a_0+a_1)x-(b_0+b_1)],$$

où $aa_0a_1(a_0+a_1)\neq 0$ et $a_0b_1-b_0a_1=\pm 1$. Considérons la forme $F(x,y)=y^5f\left(\frac{x}{y}\right)$ pour laquelle $D(F)=D(f)$. Substituons ici

$$x'=a_0x-b_0y,\quad y'=a_1x-b_1y$$

et puis

$$x'=u,\quad y'=u-v$$

à $F(x,y)$. Alors $F(x,y)$ est unimodulairement équivalent à la forme

$$H(u,v)=G(u,v)u(u-v)(2u-v),$$

où $G(u,v)=a'u^2+b'uv+c'v^2$ et $D\big(G(u,1)\big)=-3$, $D\big(H(u,1)\big)=\pm 3$. On peut supposer que $a'>0$. Alors il en résulte que

$$c'=1,\quad a'+b'+c'=1,\quad a'+2b'+4c'=1,$$

d'où $a'=3$, $b'=-3$. Enfin, on en déduit

$$f(x)=[(a_0x-b_0)^2+(a_0x-b_0)(a_1x-b_1)+(a_1x-b_1)^2]P(x),$$

lorsque dans (2) se trouve une égalité.

Enfin soit supposé que $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$ est unitaire. Si $f(x)$ n'a pas de racines rationnelles, l'inégalité (3) implique (4). Si toutes les racines de $f(x)$ sont rationnelles (et ainsi nécessairement entières rationnelles), $f(x)=(x-b_1)\dots(x-b_t)$ et $t\geqq 5$, alors, comme nous l'avons démontré précédemment, on déduit (3) qui implique également (4). Dans les cas où $4\geqq t\geqq 2$ et $|D(f)|>1$, on obtient également (4) avec une inégalité stricte. On peut aisément vérifier que pour $t=3,4$ on a $|D(f)|\neq 1$, et, dans le cas où $t=2$ et $|D(f)|=1$, le polynôme $f(x)$ est équivalent à $x(x-1)$. Dans ce cas se trouve une égalité dans (4).

Soit ensuite $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, où toutes les racines de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$ sont respectivement non rationnelles et entières rationnelles. Alors on a

$$2\left(1+\frac{\log|D(f)|}{\log 3}\right)=\frac{2}{\log 3}\log|D(f_1)|+2\left(1+\frac{\log|D(f_2)|}{\log 3}\right)+$$
$$+\frac{4}{\log 3}\log|R(f_1,f_2)|\geqq \deg f_1+\deg f_2=\deg f.$$

Pour que dans (4) soit une égalité il faut et il suffit qu'on ait $\deg f_1=2$, $D(f_1)=-3$, $R(f_1,f_2)=\pm 1$ et $f_2(x)$ soit équivalent à $x(x-1)$. Si nous écrivons $f_1(x)$ sous la forme $f_1(x)=x^2+bx+c$, alors on en déduit $c=\pm 1$, $1+b+c=\pm 1$, c'est-à-dire

$f_1(x) = x^2 - x + 1$ et on a finalement $f(x) = (x^2 - x + 1)x(x-1)$, ce qui démontre notre théorème.

Pour la démonstration du théorème 2 nous aurons besoin de quelques lemmes. D'abord nous formulerons et démontrerons ces lemmes.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(k \geqq 2)$ des nombres algébriques, différents de zéro, de degré $\leqq n$ et de hauteur $\leqq A$, où $n, A \geqq 4$. De plus, soit $0 < \delta \leqq 1$ une constante arbitraire et désignons par $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_k$ les valeurs principales des logarithmes. Alors il est vrai ce qui suit:

Lemme 2. (A. BAKER, [1].) *S'il existe des nombres entiers rationnels $b_1, \ldots, b_k$ tels que $|b_i| \leqq H$ $(i = 1, \ldots, k)$ et*

$$(13) \qquad 0 < |b_1 \log \alpha_1 + \ldots + b_k \log \alpha_k| < e^{-\delta H},$$

alors on a

$$(14) \qquad H < (4^{k^2} \delta^{-1} n^{2k} \log A)^{(2k+1)^2}.$$

Au cours de la démonstration du théorème 2 nous utiliserons le corollaire suivant de ce théorème (pour la déduction voir [2], p. 176.): Si pour les α_i précédents et pour les nombres entiers rationnels $b_1, \ldots, b_{k-1}$ de valeur absolue $\leqq H$ on a

$$(15) \qquad 0 < |\alpha_1^{b_1} \ldots \alpha_{k-1}^{b_{k-1}} - \alpha_k| < e^{-\delta H},$$

alors on obtient également (14), où maintenant $0 < \delta \leqq 1/2k$. De plus, si ici les α_i ne sont pas tous réels, alors dans (14) il faut remplacer k par $k+1$.

Dans la suite soit K un corps algébrique de degré $n_k \geqq 2$ et désignons par D_k la valeur absolue de son discriminant. Si $K = Q(\alpha)$, désignons par $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n_k)}$ les conjugués de α arrangés de telle manière que $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r_1)}$ soient tous réels et $\alpha^{(r_1+1)}, \overline{\alpha^{(r_1+1)}}, \ldots, \alpha^{(r_1+r_2)}, \overline{\alpha^{(r_1+r_2)}}$ soient les couples conjugués complexes de α. $\beta \in K$ étant un nombre arbitraire, désignons par $\beta^{(i)}$ le conjugué de β correspondant à $\alpha^{(i)}$. Enfin, soit $r = r_1 + r_2 - 1$, soit $e_k = 1$ pour $k \leqq r_1$, et soit $e_k = 2$ pour $r_1 < k \leqq$ $\leqq r_1 + r_2$.

Lemme 3. (C. SIEGEL.) *Si $r \geqq 1$, dans K il existe des unités indépendantes $\eta_1, \ldots, \eta_r$ telles que*

$$(16) \qquad e_k \left|\log |\eta_l^{(k)}|\right| < c_3 \qquad (k, l = 1, \ldots, r),$$

où $c_3 = 3\left(\dfrac{5 \log D_k}{2n_k - 2}\right)^{n_k - 1} \sqrt{D_k}$. La valeur absolue des éléments de la matrice inverse de la matrice $\|e_k \log |\eta_l^{(k)}|\,\|$ est $\leqq 10^{r^2} r^{(r-1)/2}$).*

DÉMONSTRATION: voir [17], p. 80—83.

Considérons les solutions $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ de l'équation

$$(17) \qquad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0, \qquad \beta_1 \beta_2 \beta_3 \neq 0$$

en entiers de K. Appelons les solutions $(\beta_1', \beta_2', \beta_3')$ et $(\beta_1'', \beta_2'', \beta_3'')$ associées entre eux, si $(\beta_1'', \beta_2'', \beta_3'') = (\varepsilon\beta_1', \varepsilon\beta_2', \varepsilon\beta_3')$ avec une unité ε de K. Soit $n \geqq \max(n_k, 4)$ un

*) Si $r > 1$, on peut prendre $10^{r^2}(r-1)^{(r-1)/2}$ (voir [17]).

nombre naturel et désignons par $h(\alpha)$ le maximum des valeurs absolues des conjugués d'un nombre arbitraire $\alpha \in K$.

Lemme 4. *Soit* $G \geqq 1$ *une constante et soit* $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *une solution de* (17), *en entiers de K, telle que*

$$(18) \qquad |N_{K/Q}(\beta_i)| \leqq G \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Alors il existe une solution $(\beta_1', \beta_2', \beta_3')$ *de* (17), *associée à* $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, *telle que*

$$(19) \qquad h(\beta_i') \leqq \exp\left[c_4\{4^{n(n+1)} n^{3n}[\log G + c_4]\}^{(2n+1)^2}\right] \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où $c_4 = (\log D_k)^{n-1}\sqrt{D_k}$.

Ce lemme se trouve aussi dans notre travail [6] (voir le lemme 16), dans lequel la constante, sans être calculé explicitement, est calculable explicitement. Comme nous l'avons mentionné, à l'aide de ce lemme, les constantes, qui se trouvent dans [6], peuvent être données dans une forme explicite et on peut, en même temps, les améliorer.

Nous remarquons que si α et β sont des nombres algébriques de degré n_1 et n_2 respectivement, et si $H(\alpha), H(\beta) \leqq H$, alors le degré de $\alpha \pm \beta$, $\alpha \cdot \beta$ et α/β $(\beta \neq 0)$ est $\leqq n_1 n_2$, la hauteur de ces nombres est $\leqq (4n_1 n_2 H^4)^{n_1 n_2}$ et $h(\alpha) \leqq n_1 H(\alpha)$ (voir [2], p. 177. et 205.). De plus, on peut aisément vérifier que $H(\alpha) \leqq 2^{n_1} a \max(1, h^{n_1}(\alpha))$, étant a le coefficient dominant du polynôme minimal de α dans $\mathbf{Z}[x]$ et, si α est entier, on a $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leqq h^{n_1 - 1}(\alpha)$.

Démonstration du Lemme 4. Il suffit de considérer le cas où $r > 0$. Soit $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ une solution de (17) satisfaisant à (18). Considérons un système des unités $\eta_1, \ldots, \eta_r$ satisfaisant à l'assertion du lemme 3. Alors on peut démontrer (voir [2], p. 188. et 205.) que, pour des nombres $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \in \mathbf{Z}$ convenablement choisis, on a

$$(20) \qquad \beta_i = \gamma_i \eta_1^{a_{i_1}} \ldots \eta_r^{a_{i_r}} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où

$$|N_{K/Q}(\beta_i)| = |N_{K/Q}(\gamma_i)| = m_i \leqq G \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et

$$(21) \qquad \left|\log m_i^{-1/n_k} |\gamma_i^{(j)}|\right| \leqq n_k^2 c_3 \leqq n^2 c_3 \qquad (1 \leqq i \leqq 3,\ 1 \leqq j \leqq n_k)$$

avec la constante c_3 qui se trouve dans le lemme 3. Ainsi, de (17) il résulte

$$(22) \qquad \gamma_1 \eta_1^{x_1} \ldots \eta_r^{x_r} + \gamma_2 \eta_1^{y_1} \ldots \eta_r^{y_r} + \gamma_3 = 0$$

avec des entiers rationnels x_i, y_i $(i = 1, \ldots, r)$ convenablement choisis. Nous allons démontrer que la solution $\beta_1' = \gamma_1 \eta_1^{x_1} \ldots \eta_r^{x_r}$, $\beta_2' = \gamma_2 \eta_1^{y_1} \ldots \eta_r^{y_r}$, $\beta_3' = \gamma_3$ satisfait à (19).

D'après (21) on a $h(\gamma_i) \leqq G^{1/n_k} e^{n^2 c_3}$ et

$$h\left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\right) \leqq \left(\frac{m_i}{m_j}\right)^{1/n_k} e^{2n^2 c_3} \leqq G^{1/n_k} e^{2n^2 c_3} \qquad (1 \leqq i,\ j \leqq 3).$$

Vu que la valeur absolue du coefficient dominant du polynôme minimal de γ_i/γ_j dans $\mathbf{Z}[x]$ est $\leqq |N_{K/Q}(\gamma_j)| \leqq G$, nous obtenons

$$H\left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\right) \leqq 2^n G^2 e^{2n^3 c_3} = c_5 \qquad (1 \leqq i,\ j \leqq 3).$$

Du lemme 3, on déduit également $H(\eta_j) \leqq c_5$ $(j=1, \dots, r)$.

Supposons que dans (22) $X = \max_{1 \leqq i \leqq r} |x_i|$, $Y = \max_{1 \leqq i \leqq r} |y_i|$ et

$$X \geqq Y > c_6 = (4^{n^2} \delta^{-1} n^{2\varkappa} \log c_5)^{(2n+1)^2}; \quad \varkappa = \begin{cases} r+1 & \text{pour} \quad r_2 = 0 \\ r+2 & \text{pour} \quad r_2 > 0, \end{cases}$$

avec une constante $0 < \delta \leqq \dfrac{1}{2n}$ déterminée ultérieurement.

Soit c' déterminé de telle manière que

$$c'X = \left|\log |\gamma_1^{(J)}/\beta_1'^{(J)}|\right| = \max_{1 \leqq j \leqq r} \left|\log |\gamma_1^{(j)}/\beta_1'^{(j)}|\right|.$$

D'après le lemme 3, du système d'équations

$$x_1 \log |\eta_1^{(j)}| + \dots + x_r \log |\eta_r^{(j)}| = \log |\beta_1'^{(j)}/\gamma_1^{(j)}| \qquad (1 \leqq j \leqq r)$$

pour les inconnues $x_1, \dots, x_r$ on obtient

$$X \leqq 2r^{(r+1)/2} 10^{r_2} c' X,$$

d'où $c' \geqq [2r^{(r+1)/2} 10^{r_2}]^{-1}$. De plus, de (21) on déduit (voir [2], p. 189.)

$$\left|\log (m_1^{-1/n_k} |\beta_1'^{(J)}|)\right| = \left|\log |\beta_1'^{(J)}/\gamma_1^{(J)}| + \log (m_1^{-1/n_k} |\gamma_1^{(J)}|)\right| \geqq c'X - n^2 c_3 > 0.$$

Par conséquent, d'après $\sum_{j=1}^{n_k} \log (m_1^{-1/n_k} |\beta_1^{(j)}|) = 0$, pour un indice l, on a

$$\log (m_1^{-1/n_k} |\beta_1'^{(l)}|) \leqq -\frac{c'X - n^2 c_3}{n_k - 1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{|\beta_1'^{(l)}|}{|\gamma_2^{(l)}|} \leqq h^{n_k - 1}(\gamma_2) G^{1/n_k} e^{-\frac{c'X - n^2 c_3}{n_k - 1}} \leqq e^{\log G + n^3 c_3 - \frac{c'X}{n}}. \tag{23}$$

D'autre part, si $K^{(l)}$ et ainsi K est totalement réel, alors $r+1 = n_k \leqq n$, dans le cas contraire $r+2 \leqq n_k \leqq n$. Donc, d'après $Y > c_6$ et le corollaire du lemme 2, (22) entraîne

$$\frac{|\beta_1'^{(l)}|}{|\gamma_2^{(l)}|} = \left|\frac{\gamma_1^{(l)}}{\gamma_2^{(l)}} \eta_1^{(l) x_1} \dots \eta_r^{(l) x_r}\right| = \left|\eta_1^{(l) y_1} \dots \eta_r^{(l) y_r} + \frac{\gamma_3^{(l)}}{\gamma_2^{(l)}}\right| \geqq e^{-\delta Y} \geqq e^{-\delta X}. \tag{24}$$

Par conséquent, de (23) et (24) il résulte

$$\left(\frac{c'}{n} - \delta\right) X \leqq \log G + n^3 c_3,$$

et ainsi, en choisissant $\delta=(2nr^{(r+1)/2}10^{r_2}+1)^{-1}$, en conséquence de $X>c_6$ nous obtenons une contradiction.

Considérons ensuite le cas où X ou $Y\leqq c_6$ avec le δ précédent. Soit par exemple $X\leqq c_6$. Alors, d'après le lemme 3 on déduit $h(\eta_j)\leqq e^{rc_3}$, et, pour β_2' on a

$$h(\beta_2') \leqq h(\beta_3')+h(\beta_1') \leqq h(\gamma_3)+h(\gamma_1)\left(\prod_{j=1}^{r} h(\eta_j)^{n_k-1}\right)^X \leqq$$

$$\leqq G^{1/n_k}e^{n^2c_3}+G^{1/n_k}e^{n^2c_3+r^2(n_k-1)c_3c_6} \leqq G^{1/n_k}\exp\{n^2c_3+r^2nc_3c_6\} \leqq \exp\{rn^2c_3c_6\}.$$

Vu que $\delta=(2nr^{(r+1)/2}10^{r_2}+1)^{-1}$, $c_3\leqq 2c_4$ et $n\geqq 4$, pour l'exposant on obtient

$$rn^2c_3c_6 \leqq 2rn^2c_4c_6 \leqq 2^{(1/4)(2n+1)^2}c_4c_6 \leqq c_4\{4^{n^2}n^{2\varkappa}2^{1/4}\delta^{-1}\log c_5\}^{(2n+1)^2} \leqq$$

$$\leqq c_4\{4^{n(n+1)}n^{3n}(\log G+c_4)\}^{(2n+1)^2}.$$

Il en résulte que

$$h(\beta_2') \leqq \exp[c_4\{4^{n(n+1)}n^{3n}(\log G+c_4)\}^{(2n+1)^2}],$$

qui est valable, de manière évidente, aussi pour $h(\beta_1')$, $h(\beta_3')$.

Démonstration du Théorème 2. Nous allons démontrer d'abord l'inégalité (5) pour des polynômes unitaires irréductibles $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$. Soit $f(x)$ un tel polynôme avec le discriminant $0<|D(f)|\leqq D$ et soit α l'une des racines de $f(x)$ dans le corps des nombres complexes. Soit $f(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha^{(i)})$, où $\alpha^{(1)}=\alpha$. Il suffit de prouver que $H(\alpha')\leqq\exp\{[(3k)^{12}D(\log D)^{4/n}]^{n^2(n^2-1/2)}\}$ pour un certain α' équivalent à α, où $|D(\alpha)|=|D(f)|\leqq D$.

Désignons par D_L le discriminant du corps algébrique $L=Q(\alpha)$. Alors, d'après $D_L|D(\alpha)$, on a $|D_L|\leqq D$.

Si $k=2$ et $\alpha=x+y\sqrt{D_L}$ $(x, y\in Q)$, alors en conséquence de $D\geqq|D(\alpha)|=4y^2|D_L|\geqq y^2$ on a $|y|\leqq\sqrt{D}$. En choisissant $a=[x]$, pour $\alpha'=\alpha-a$ on obtient $H(\alpha')\leqq D^2+1$.

Considérons ensuite le cas $k\geqq 3$. Il existe dans L un élément entier primitif δ tel que $h(\delta)\leqq|D_L|^{1/2}\leqq D^{1/2}$ (voir, par ex. [16], p. 22.). Désignons par $\delta^{(1)}=\delta, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(k)}$ les conjugués de δ, correspondant aux conjugués $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}$ de α. Alors le degré de $K_{ijl}=Q(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)}, \alpha^{(l)})=Q(\delta^{(i)}, \delta^{(j)}, \delta^{(l)})$ est $n_{ijl}\leqq k(k-1)(k-2)$. Si $n=6\binom{k}{3}$ on a

$$\max_{i,j,l}(n_{ijl}, 4) \leqq n = k(k-1)(k-2), \tag{25}$$

et, en conséquence de la remarque 1.2, on obtient

$$k < \log D. \tag{26}$$

Prenons les nombres $l\delta^{(1)}+\delta^{(2)}$ $(l=0, \dots, k^4)$ et remplaçons $\delta^{(1)}$ et $\delta^{(2)}$ par leurs conjugués $\delta^{(1)}, \dots, \delta^{(k)}$ indépendamment l'un de l'autre. Il y a au moins un nombre $\sigma_1=l\delta^{(1)}+\delta^{(2)}$ $(0\leqq l\leqq k^4)$ tel que les nombres $l\delta^{(i)}+\delta^{(j)}$ $(1\leqq i, j\leqq k)$ soient différents deux à deux. Alors σ_1 est un élément entier primitif du corps $Q(\delta^{(1)}, \delta^{(2)})$ (voir [11], Satz 709.) et

$$h(\sigma_1) \leqq k^4 h(\delta^{(1)}) + h(\delta^{(2)}) \leqq (k^4+1)\sqrt{D}.$$

En répétant ce procédé (s'il est nécessaire), nous obtenons un nombre entier primitif $\sigma = \sigma_1 + l \cdot \delta^{(3)}$ $\left(0 \leqq l \leqq \left(k^2(k-1)\right)^2\right)$ dans K_{123} tel que

$$h(\sigma) \leqq k^6 \sqrt{D}.$$

On peut, d'une manière analogue, obtenir un élément primitif σ avec cette propriété dans tous les corps K_{ijl}. Soit fixé un tel σ. Il en résulte pour chaque conjugué $\sigma^{(s)}$ et $\sigma^{(r)}$ de σ

$$h(\sigma^{(s)} - \sigma^{(r)}) \leqq 2h(\sigma) \leqq 2k^6 \sqrt{D} = c_8, \tag{27}$$

d'où, pour le discriminant $D_{K_{ijl}}$ de K_{ijl} on déduit

$$|D_{K_{ijl}}| \leqq |D(\sigma)| \leqq c_8^{n(n-1)} = c_9 \tag{28}$$

pour tout i, j, l. Si $K = Q(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)})$, de l'égalité

$$D(\alpha) = \prod_{1 \leqq i < j \leqq k} (\alpha^{(j)} - \alpha^{(i)})^2 \tag{29}$$

il résulte que

$$\prod_{1 \leqq i < j \leqq k} N_{K/Q}^2(\alpha^{(j)} - \alpha^{(i)}) = |D(\alpha)|^{[K:Q]} \leqq D^{[K:Q]},$$

d'où

$$0 < |N_{K_{ijl}/Q}(\alpha^{(j)} - \alpha^{(i)})| \leqq D^{[K_{ijl}:Q]/2} \leqq D^{n/2} = c_{10},$$

pour chaque couple i, j $(i \neq j)$ et pour tout l.

Employons le lemme 4 avec $G = c_{10}$. Pour des indices arbitraires i, j, l différents deux à deux on a

$$(\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}) + (\alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}) + (\alpha^{(l)} - \alpha^{(i)}) = 0,$$

c'est-à-dire les nombres entiers $(\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}, \alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}, \alpha^{(l)} - \alpha^{(i)})$ différents de zéro satisfont à la fois à l'équation (17) et à l'inégalité (18). D'après le lemme 4 il existe donc une solution $(\beta_1^{(ijl)}, \beta_2^{(ijl)}, \beta_3^{(ijl)})$ de (17) en entiers de K_{ijl}, associée à la solution $(\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}, \alpha^{(j)} - \alpha^{(l)}, \alpha^{(l)} - \alpha^{(i)})$, telle que

$$\max_{1 \leqq s \leqq 3} h(\beta_s^{(ijl)}) \leqq \exp\left[c_{11}\{4^{n(n+1)} n^{3n} [\log c_{10} + c_{11}]\}^{(2n+1)^2}\right] = c_{12}$$

indépendamment de i, j, l, où $c_{11} = (\log c_9)^{n-1}\sqrt{c_9}$. Donc, avec une unité $\varepsilon \in K_{123}$ on a

$$\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} = \varepsilon\beta_1^{(123)}, \quad \alpha^{(2)} - \alpha^{(3)} = \varepsilon\beta_2^{(123)}, \quad \alpha^{(3)} - \alpha^{(1)} = \varepsilon\beta_3^{(123)}.$$

Si $k > 3$, on obtient pour chaque $k \geqq i > 3$

$$\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} = \varepsilon'\beta_1^{(12i)}, \quad \alpha^{(2)} - \alpha^{(i)} = \varepsilon'\beta_2^{(12i)}, \quad \alpha^{(i)} - \alpha^{(1)} = \varepsilon'\beta_3^{(12i)}$$

avec une unité $\varepsilon' \in K_{12i}$ et avec des entiers $\beta_s^{(12i)} \in K_{12i}$ tels que $h(\beta_s^{(12i)}) \leqq c_{12}$. Il en résulte $\varepsilon'=\varepsilon\beta_1^{(123)}/\beta_1^{(12i)}$, c'est-à-dire avec $\varrho_i=\beta_2^{(12i)}\beta_1^{(123)}/\beta_1^{(12i)}$ on a $\alpha^{(2)}-\alpha^{(i)}=\varepsilon\varrho_i$. De plus, pour chaque $j\neq 2, i$ on obtient

$$\alpha^{(2)}-\alpha^{(i)}=\varepsilon''\beta_1^{(2ij)},\quad \alpha^{(i)}-\alpha^{(j)}=\varepsilon''\beta_2^{(2ij)},\quad \alpha^{(j)}-\alpha^{(2)}=\varepsilon''\beta_3^{(2ij)}$$

avec une unité $\varepsilon''\in K_{2ij}$ et avec des nombres entiers $\beta_s^{(2ij)}\in K_{2ij}$ tels que $h(\beta_s^{(2ij)})\leqq c_{12}$. On en déduit $\varepsilon''=\varepsilon\varrho_i/\beta_1^{(2ij)}$, c'est-à-dire

$$\alpha^{(i)}-\alpha^{(j)}=\varepsilon\varrho_i\beta_2^{(2ij)}/\beta_1^{(2ij)}=\varepsilon\varrho_{ij}$$

où

$$h(\varrho_{ij})\leqq c_{12}^3c_{12}^{2(n-1)}=c_{12}^{2n+1}=c_{13}\quad\text{et}\quad h\left(\frac{1}{\varrho_{ij}}\right)\leqq c_{12}^{2+3(n-1)}=c_{12}^{3n-1}.$$

L'estimation obtenue est évidemment valable pour chaque couple i, j $(i\neq j)$ et aussi dans le cas $k=3$.

De (29) on déduit

$$\varepsilon^{k(k-1)}=D(\alpha)\Big(\prod_{1\leqq i<j\leqq k}\varrho_{ij}^2\Big)^{-1},$$

d'où l'on obtient

$$h(\varepsilon^{k(k-1)})\leqq Dc_{12}^{k(k-1)(3n-1)}=c_{14}$$

et

$$h(\varepsilon)\leqq c_{14}^{\frac{1}{k(k-1)}}=D^{\frac{1}{k(k-1)}}c_{12}^{3n-1}=c_{15}.$$

Enfin, si $\alpha^{(i)}-\alpha^{(j)}=\sigma_{ij}$, alors pour chaque couple d'indices i, j $(i\neq j)$ on a

$$h(\sigma_{ij})\leqq h(\varepsilon)h(\varrho_{ij})\leqq c_{15}\cdot c_{13}\leqq D^{\frac{1}{k(k-1)}}c_{12}^{5n}=c_{16}.$$

Considérons de nouveau le nombre entier primitif δ dans L, utilisé déjà précédemment. Vu que $h(\delta)\leqq\sqrt{D}$, en conséquence de l'inégalité $h(\delta^{(i)}-\delta^{(j)})\leqq 2\sqrt{D}$ on déduit

$$\Delta(\delta)=|D(\delta)|\leqq\big(2\sqrt{D}\big)^{k(k-1)}=c_{17}.$$

Dans L il y a une base d' entiers de la forme

$$(1, w_1, \dots, w_{k-1})=\left(1, \frac{\psi_1(\delta)}{\Delta_1}, \dots, \frac{\psi_{k-1}(\delta)}{\Delta_{k-1}}\right),$$

où $\psi_s(\delta)=\delta^s+a_{s1}\delta^{s-1}+\dots+a_{ss}$; $\Delta_s, a_{sr}\in\mathbf{Z}$ et $\Delta_s|\Delta(\delta)$, $|a_{sr}|\leqq\Delta(\delta)$ pour chaque $1\leqq s$, $r\leqq k-1$ (voir [3], p. 11.). Ici on a

$$h\big(\psi_s(\delta)\big)\leqq k\Delta(\delta)h(\delta)^{k-1}\leqq kc_{17}D^{\frac{k-1}{2}}\qquad(1\leqq s\leqq k-1)$$

et

$$h(w_s)\leqq kc_{17}D^{\frac{k-1}{2}}=k2^{k(k-1)}D^{\frac{k^2-1}{2}}=c_{18},$$

d'où

$$h(w_s^{(i)}-w_s^{(k)})\leqq 2c_{18}\qquad(1\leqq s,\ i\leqq k-1).$$

Considérons ensuite la représentation

$$\alpha=\alpha^{(1)}=x_0+x_1w_1+\dots+x_{k-1}w_{k-1}\qquad(x_i\in\mathbf{Z},\ 1\leqq i\leqq k-1)$$

de α et prenons le nombre

$$\alpha' = x_1 w_1 + \ldots + x_{k-1} w_{k-1}$$

équivalent à α. Alors pour les conjugués de α' on conclut

$$\alpha'^{(i)} - \alpha'^{(j)} = \alpha^{(i)} - \alpha^{(j)} = \sigma_{ij}.$$

Désignons par $w_s^{(1)} = w_s, \ldots, w_s^{(k)}$ $(1 \leqq s \leqq k-1)$ les conjugués de w_s correspondant à $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}$ et considérons le système d'équations

$$\sigma_{1k} = \alpha'^{(1)} - \alpha'^{(k)} = x_1(w_1^{(1)} - w_1^{(k)}) + \ldots + x_{k-1}(w_{k-1}^{(1)} - w_{k-1}^{(k)})$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{k-1,k} = \alpha'^{(k-1)} - \alpha'^{(k)} = x_1(w_1^{(k-1)} - w_1^{(k)}) + \ldots + x_{k-1}(w_{k-1}^{(k-1)} - w_{k-1}^{(k)})$$

en $x_1, \ldots, x_{k-1}$. La valeur absolue du déterminant de ce système d'équations est $|D_L|^{1/2} > 1$. En éliminant les inconnues x_i, nous obtenons

$$|x_i| \leqq (k-1) c_{16} (k-2)! (2c_{18})^{k-2} = c_{19},$$

d'où

$$h(\alpha') \leqq k c_{18} c_{19} \leqq k! 2^{k-2} c_{16} \cdot c_{18}^{k-1},$$

et finalement

$$H(\alpha') \leqq \left(2h(\alpha')\right)^k \leqq (k!)^k 2^{k(k-1)} c_{16}^k c_{18}^{k(k-1)}.$$

Après un petit calcul on obtient

$$(k!)^k 2^{k(k-1)} c_{16}^k c_{18}^{k(k-1)} \leqq c_{12}^{6kn}.$$

De plus, en considérant dans la constante c_{12} les estimations $\log c_{10} + c_{11} \leqq 1{,}5 c_{11}$ et $6kn \cdot 1{,}5^{(2n+1)^2} \leqq 2^{(2n+1)^2}$, on déduit

$$c_{12}^{6kn} \leqq \exp\{c_{11}^{4n^2+4n+2} (4^{n^2+n+1/2} n^{3n})^{(2n+1)^2}\}.$$

Vu que $c_{11} = (\log c_9)^{n-1} \sqrt{c_9}$ et $c_9 = \left(2k^6 \sqrt{D}\right)^{n(n-1)}$, en conséquence de $23 \leqq |D_L|$ et $\log 2 + 6 \log k + \frac{1}{2} \log D \leqq 2\,\frac{5}{6} \log D$ il en résulte

$$c_{11}^{4n^2+4n+2} (4^{n^2+n+1/2} n^{3n})^{(2n+1)^2} \leqq [(3k)^{12} D (\log D)^{4/n}]^{n(n^3-(1/2)n-1/2)}$$

et

$$H(\alpha') \leqq \exp\{[(3k)^{12} D (\log D)^{4/n}]^{n^2(n^2-1/2)}\}. \tag{30}$$

Enfin, on en déduit (5) pour $\| f^* \|$, où f^* est le polynôme minimal de α', équivalent à f.

Ensuite nous démontrons l'inégalité (5) pour des polynômes réductibles. Considérons un polynôme unitaire $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ réductible sur Q et soit

$$f(x) = f_1(x) \ldots f_r(x)$$

la décomposition de $f(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbf{Z}[x]$. Vu que $D(f) \neq 0$, les polynômes unitaires f_i sont différents deux à deux. De $0 < |D(f)| \leqq D$ et de (11) il résulte

$$0 < |D(f_i)| \leqq D \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{31}$$

Par conséquent, d'après (5), pour chaque i il y a un polynôme f_i^* équivalent à f_i tel que

$$\|f_i^*\| \leqq \exp\{[(3k_i)^{12} D(\log D)^{4/n_i}]^{n_i^2(n_i^2-1/2)}\} \qquad (i=1,\dots,r),$$

où $k_i = \deg f_i$, $n_i = 6\binom{k_i}{3}$ dans le cas $k_i \geqq 3$, et $n_i = 1$ dans le cas $k_i < 3$. Soit $n = 6\binom{k-1}{3}$ pour $k \geqq 4$ et soit $n=1$ pour $k=3$. Alors on a pour chaque i

$$\|f_i^*\| \leqq \exp\{[(3(k-1))^{12} D(\log D)^{4/n}]^{n^2(n^2-1/2)}\} = c_{20}. \tag{32}$$

Si f_i est linéaire, soit $f_i^*(x) = x$. De plus, si f_i et f_j sont équivalents, choisissons les polynômes f_i^* et f_j^* identiques et fixons un système des f_i^* qui possèdent une telle propriété. Alors on peut écrire $f_i(x) = f_i^*(x+a_i)$ avec des nombres entiers rationnels convenables a_i. Si $R(f_i, f_j)$ désigne le résultant de f_i et f_j, d'après (11) il résulte

$$0 < |R(f_i, f_j)| = |R(f_i^*(x+a_i),\ f_j^*(x+a_j))| \leqq \sqrt{D} \tag{33}$$

pour chaque i, j $(i \neq j)$.

Soit L_{ij} le corps de décomposition de $f_i^*(x) f_j^*(x)$. Alors $[L_{ij}:Q] \leqq k_i!\, k_j! \leqq k! = c_{21}$. Désignons par α_i et α_j une racine de f_i^* et f_j^* respectivement et soient

$$f_i^* = \prod_{u=1}^{k_i} (x - \alpha_i^{(u)}), \quad f_j^* = \prod_{v=1}^{k_j} (x - \alpha_j^{(v)}),$$

$(\alpha_i^{(1)} = \alpha_i,\ \alpha_j^{(1)} = \alpha_j)$. En conséquence de $H(\alpha_i) = \|f_i^*\|$, $H(\alpha_j) = \|f_j^*\|$ et de $k_i k_j \leqq k^2/4$, on obtient

$$H(\alpha_i - \alpha_j) \leqq (4k_i k_j c_{20}^4)^{k_i k_j} \leqq (k^{1/2} c_{20})^{k^2} = c_{22} \quad \text{et} \quad \deg(\alpha_i - \alpha_j) \leqq k_i k_j \leqq \frac{k^2}{4}.$$

Soit $F_{ij}(x) = x^N + b_1 x^{N-1} + \dots + b_N \in \mathbf{Z}[x]$ le polynôme minimal de $\alpha_j - \alpha_i$, où $N = \deg F_{ij} \leqq k^2/4$ et $\max\limits_{1 \leqq m \leqq N} |b_m| = \|F_{ij}\| \leqq c_{22}$. Alors

$$R(f_i^*(x+a_i),\ f_j^*(x+a_j)) = \prod_{\substack{1 \leqq u \leqq k_i \\ 1 \leqq v \leqq k_j}} ((\alpha_i^{(u)} - a_i) - (\alpha_j^{(v)} - a_j)).$$

Si $L_{ij} \neq Q$, prenons ici la norme des deux côtés dans L_{ij}. De (33) on déduit

$$\begin{aligned}(\sqrt{D})^{c_{21}} &\geqq |N_{L_{ij}/Q}((\alpha_i - a_i) - (\alpha_j - a_j))| = \\ &= |N_{L_{ij}/Q}((a_j - a_i) - (\alpha_j - \alpha_i))| \geqq |F_{ij}(a_j - a_i)|.\end{aligned}$$

On a $|a_j - a_i| \leqq (\sqrt{D})^{c_{21}} + \frac{k^2}{4} c_{22} = c_{23}$, parce que dans le cas contraire, on obtiendrait

$$\begin{aligned}|F_{ij}(a_j - a_i)| &= |(a_j - a_i)^N + b_1 (a_j - a_i)^{N-1} + \dots + b_N| \geqq \\ &\geqq |a_j - a_i|^{N-1}(|a_j - a_i| - \{|b_1| + \dots + |b_N|\}) \geqq |a_j - a_i| - \frac{k^2}{4} c_{22} > (\sqrt{D})^{c_{21}}.\end{aligned}$$

L'estimation concernant $|a_j - a_i|$ est évidemment vraie aussi dans le cas où $L_{ij} = Q$.

Enfin, prenons par exemple le polynôme $f^*(x)=f(x-a_1)$ équivalent à $f(x)$ et considérons la décomposition

$$f^*(x)=\bar{f}_1(x)\dots\bar{f}_r(x)=f_1(x-a_1)\dots f_r(x-a_1),$$

où

$$\bar{f}_i(x)=f_i(x-a_1)=f_i^*(x+(a_i-a_1)).$$

Ainsi, d'après

$$\bar{f}_i(x)=f_i^*(x+(a_i-a_1))=\sum_{s=0}^{k_i}\frac{f_i^{*(s)}(a_i-a_1)}{s!}x^s$$

et d'après $\|f_i^*\|\leqq c_{20}$ nous obtenons

$$\|\bar{f}_i\|\leqq\max_{0\leqq s\leqq k_i-1}\left\{\binom{k_i}{s}|a_i-a_1|^{k_i-s}+c_{20}|a_i-a_1|^{k_i-s-1}\left[\binom{k_i-1}{s}+\dots+\binom{s}{s}\right]\right\}\leqq c_{20}\cdot c_{23}^{k_i}$$

en supposant que $a_i\neq a_1$. Mais cette inégalité est vraie aussi dans le cas où $a_i=a_1$. Donc, on déduit

$$\|f^*\|\leqq\prod_{i=1}^{r}(c_{20}\cdot c_{23}^{k_i})\deg f_1\dots\deg f_r\leqq c_{20}^r c_{23}^k\left(\frac{k_1+\dots+k_r}{r}\right)^r=$$

$$=\left(\frac{c_{20}k}{r}\right)^r c_{23}^k\leqq\left(\frac{kc_{20}}{2}\right)^k c_{23}^k.$$

On peut aisément obtenir que

$$c_{23}=(\sqrt{D})^{c_{21}}+\frac{k^2}{4}c_{22}=(\sqrt{D})^{c_{21}}+\frac{k^{(1/2)k^2+2}}{4}c_{20}^{k^2}\leqq\frac{k^{(1/2)k^2+2}}{2}c_{20}^{k^2}.$$

En supposant que $k\geqq4$, on en déduit

$$\|f^*\|\leqq\left(\frac{kc_{20}}{2}\right)^k c_{23}^k\leqq k^{k^3}c_{20}^{k+k^3}\leqq c_{20}^{2k^3}=$$

$$=\exp\left\{2k^3\left[(3(k-1))^{12}D(\log D)^{4/n}\right]^{n^2(n^2-1/2)}\right\}\leqq$$

$$\leqq\exp\{[(3k)^{12}D(\log D)^{4/n}]^{n^2(n^2-1/2)}\},\qquad\left(n=6\binom{k-1}{3}\right)$$

ce qui prouve notre théorème pour $k\geqq4$. Pour $k=3$ on obtient (5) avec $n=6\binom{3}{3}=$ $=6$. Enfin, si $k=2$ et $f(x)$ est réductible on a $\|f^*\|\leqq\sqrt{D}$ pour un f^* équivalent à f.

Démonstration du Théorème 3. Pour des polynômes du second degré l'assertion est évidente (voir le cas $k=2$ dans la démonstration du théorème 2). Si $f(x)$ est irréductible, de (5), (25) et de (26) on obtient immédiatement (6′) pour $k\geqq3$. Si $f(x)$ est réductible, d'après (31) on peut donc prendre dans (32)

$$\|f_i^*\|\leqq\exp\exp\{2(\log D)^{13}\}=c_{20}'\qquad(i=1,\dots,r)$$

et, comme nous l'avons prouvé au cours de la démonstration du théorème 2, on obtient $\|f^*\| \leqq c_{20}'^{2k^3}$, où $k = \deg f$. Mais d'après le théorème 1 on a $k \leqq 2\left(1+\dfrac{\log D}{\log 3}\right)$, d'où l'on déduit (6).

Démonstration du corollaire 2. Soit $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ un polynôme unitaire tel que $0 < |D(f)| \leqq D$ et $|f(0)| \leqq N$. En conséquence du théorème 3. il existe un polynôme f^* équivalent à f pour lequel $\|f^*\| \leqq c_2$. De plus, d'après le théorème 1 on a $\deg f^* = \deg f \leqq c_1$. Soit

$$f^*(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k,$$

où $|a_i| \leqq c_2$ et soit $f(x) = f^*(x+a)$ avec un certain $a \in \mathbf{Z}$. Nous allons démontrer que $|a| \leqq \max(c_1 c_2 + 1, N) = c(D, N)$. Dans le cas contraire on obtiendrait

$$|f(0)| = |f^*(a)| = |a^k + a_1 a^{k-1} + \dots + a_k| \geqq$$
$$\geqq |a|^k - (|a_1| + \dots + |a_k|)|a|^{k-1} \geqq |a|(|a| - c_1 c_2) > N,$$

ce qui est impossible. Par conséquent, en supposant que $a \neq 0$, on a

$$\|f(x)\| = \|f^*(x+a)\| \leqq \max_{0 \leqq s \leqq k-1} \left\{\binom{k}{s} |a|^{k-s} + c_2 |a|^{k-s-1} \left[\binom{k-1}{s} + \dots + \binom{s}{s}\right]\right\} \leqq$$
$$\leqq c_2 c(D, N)^{c_1},$$

et notre proposition est démontrée.

Démonstration du corollaire 3. Soit $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ un polynôme unitaire de degré $\geqq 2$ et de discriminant $|D(f)| > 1$ lorsque on a nécessairement $|D(f) \geqq 3$. Alors, d'après les théorèmes 1 et 3 on obtient $\deg f \leqq c_1(|D(f)|)$ et $\|f^*\| \leqq c_2(|D(f)|)$ pour un polynôme f^* équivalent à f. Soit

$$f^*(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

lorsque $k = \deg f^* \leqq c_1$ et $\Delta(f^*) = \Delta(f)$, $D(f^*) = D(f)$. Si $L(f^*) = 1 + |a_1| + \dots + |a_k|$, alors $L(f^*) \leqq (k+1)\|f^*\|$. Ainsi, d'après un théorème de K. Mahler [12]

$$\Delta(f^*) > 3k^{-(k+2)/2}|D(f^*)|L(f^*)^{-(k-1)} \geqq |D(f^*)|\{c_2(|D(f^*)|)\}^{-c_1(|D(f^*)|)},$$

d'où l' on obtient

$$\Delta(f) > |D(f)|\{c_2(|D(f)|)\}^{-c_1(|D(f)|)} > 0.$$

Note ajoutée aux épreuves 1. Dans la démonstration du théorème 2, la valeur de la constante c_9 peut être considérablement diminuée dans (28). Soient $K_i = Q(\alpha_i)$, $K_{ij} = K_i(\alpha_j)$, $K_{ijl} = K_{ij}(\alpha_l)$. Pour les discriminants relatifs on a $D_{K_{ij}/K_i}, D_{K_{ijl}/K_{ij}} \mid D(\alpha)$. A l'aide de l'application successive d'un théorème de Hilbert (voir [8], p. 430.) on peut obtenir l'estimation

$$(28') \qquad |D_{K_{ijl}}| \leqq |N_{K_{ij}/Q}(D(\alpha_l))| \cdot |N_{K_i/Q}(D(\alpha_j))|^{[K_{ijl}:K_{ij}]} \cdot |D_{K_i}|^{[K_{ijl}:K_i]} \leqq D^{3(k-1)^2} = c_9.$$

En calculant avec cet c_9 au cours de la démonstration, dans le théorème 2 on peut prendre

$$(5') \qquad \|f^*\| \leqq \exp\{[4^{(k-1)^4}(k-1)^{11(k-1)} D^{\frac{3}{2}} (\log D)^{k-1}]^{(k-1)^2(4n^2+4n+2)}\}; \quad \left(n = 6\binom{k}{3}\right)$$

au lieu de (5), d'où

$$\|f^*\| \leqq \exp\exp\{(\log D)^{\frac{3}{2}\delta} + (\log D)^{1+\delta} + (\log D)^{\frac{\delta}{8}} \log\log D\}, \tag{6}$$

en supposant que $\frac{3}{2}(k-1)^2(4n^2+4n+2) \leqq (\log D)^{\delta}$ avec une constante $\delta > 0$

2. Récemment H. M. Stark (Acta Arith. 24 (1973), 251—259) a amélioré les estimations qui se trouvent dans les lemmes 2 et 3. En utilisant ces estimations récentes et l'amélioration ci-dessus de la veleur de c_9, dans le théorème 2 on peut aisément obtenir l'estimation

$$\|f^*\| \leqq \exp\{c[(\log D)^{k-1} D^{\frac{3}{2}}]^{3(k-1)^2(1+\varepsilon)}\}, \quad (\varepsilon > 0 \quad \text{constante}) \tag{5''}$$

avec une constante $c = c(k, \varepsilon)$ calculable explicitement.

Bibliographie

[1] A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, IV., Mathematika **15** (1968), 204—216.

[2] A. Baker, Contributions to the theory of Diophantine equations, *Philos. Trans. Roy. Soc. London A,* **263** (1968), 173—208.

[3] W. E. H. Berwick, Integral bases, Cambridge Tracts, No. **22**, *New York and London,* 1964.

[4] B. J. Birch—J. R. Merriman, Finiteness theorems for binary forms with given discriminant, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1972), 385—394.

[5] J. Coates, An effective p-adic analogue of a theorem of Thue II., *Acta Arith.* **16** (1970), 399—412.

[6] K. Győry, Sur l'irréductibilité d'une classe des polynômes, II., *Publ. Math. (Debrecen)* **19** (1972), 293—326.

[7] K. Győry, Sur les polynômes à coefficients entiers et de discriminant donné, *Acta Arith.* **23** (1973), *sous presse.*

[8] H. Hasse, Zahlentheorie, *Berlin,* 1963.

[9] Ch. Hermite, Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres, *J. Reine Angew. Math.* **41** (1851), 191—216.

]10] D. Hilbert, Über diophantische Gleichungen, *Göttingen Nachr.* (1897), 48—54.

[11] E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, III., *Leipzig,* 1927.

[12] K. Mahler, An inequality for the discriminant of a polynomial, *Mich. Math. J.* **11** (1964), 257—262.

[13] T. Nagell, Contributions à la théorie des modules et des anneaux algébriques, *Arkiv för Mat.* **6** (1965), 161—178.

[14] T. Nagell, Sur les discriminants des nombres algébriques, *Ark. för Mat.* **7** (1967), 265—282.

[15] T. Nagell, Quelques propriétés des nombres algébriques du quatrième degré, *Arkiv för Mat,* **7** (1969), 517—525.

[16] O. Ore, Les corps algébriques et la théorie des idéaux, *Mémorial Sci. Math.,* **64** *Paris,* 1934.

[17] C. Siegel, Abschätzung von Einheiten, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. II,* No. **9** (1969), 71—86.

[18] В. Г. Спринджук, Об оценке решений уравнения Туэ, Известия АН СССР, сер. матем., **36** (1972), 712—741.

[19] P. Turán, Egy gráfelméleti szélsőérték-feladatról, *Mat. Fiz. Lapok,* **48** (1941), 436—452.

(Reçu le 1 mars 1973 et dans une forme modifiée le 9 août 1973.)