Einiges über Gruppoid-Verbände mit Anwendungen auf Gruppen, Ringe, Halbgruppen

Von LÁSZLÓ RÉDEI und OTTÓ STEINFELD (Budapest)

Einleitung

Im § 1 zeigen wir, daß für Gruppen der bekannte Begriff der Zentralketten sich einfacher definieren läßt, als das bisher geschah, ferner machen wir eine damit eng zusammenhängende Feststellung über Normalteiler einer Gruppe. Das alles verallgemeinern wir im § 3 auf Gruppoid-Verbände. Im § 4 zeigen wir, daß sich § 1 (in der Tat) als Beispiel aus § 3 gewinnen läßt auch arbeiten wir weitere Anwendungen aus.[1])

§ 1

Bezeichnungen 1.1. Im Zusammenhang mit Gruppen werden die Symbole $\leqq, \trianglelefteq, [\ldots, \ldots]$ wie bei HUPPERT [1] gedeutet.

Hilfssatz 1.2. *Für Gruppen* $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{G}$ *gilt die Äquivalenz*

$$[\mathfrak{H}, \mathfrak{G}] \leqq \mathfrak{H} \Leftrightarrow \mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{G}.$$

Das ist bekannt (s. HUPPERT [1] S. 255), aber wir führen den Beweis bequemlichkeitshalber aus. Die linke Seite der zu beweisenden Äquivalenz ist gleichbedeutend mit dem Bestehen aller Bedingungen

$$[H, G] \in \mathfrak{H} \quad (H \in \mathfrak{H},\ G \in \mathfrak{G}).$$

Hierfür läßt sich wegen

$$[H, G] (= H^{-1} G^{-1} H G) = H^{-1} H^G$$

$H^G \in (H\mathfrak{H} =) \mathfrak{H}$ schreiben. Das beweist Hilfssatz 1.2.

Definition 1.3. Eine (endliche) *Zentralkette* einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine Untergruppenkette

$$(\mathfrak{G} \geqq)\, \mathfrak{N}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{N}_k \qquad (k \geqq 2) \tag{1.1}$$

mit

$$[\mathfrak{N}_i, \mathfrak{G}] \leqq \mathfrak{N}_{i+1} \qquad (i = 1, \ldots, k-1). \tag{1.2}$$

[1]) Herr Professor A. KERTÉSZ hat uns das Problem aufgeworfen, ob die Ergebnisse der Paragraphen 1 und 4 für die Gruppoid-Verbände verallgemeinern lassen.

Bemerkung 1.4. Bisher hatte man (vgl. HUPPERT [1] S. 259) in die Definition der Zentralketten neben (1.1) und (1.2) auch die Eigenschaft

$$\mathfrak{N}_k \trianglelefteq \mathfrak{G}$$

aufgenommen. Jedoch ist das — worauf wir oben angespielt haben — überflüssig, denn Definition 1.3 führt zu

Satz 1.5. *Für alle Glieder einer Zentralkette*

$$\mathfrak{N}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{N}_k \qquad (k \geqq 2)$$

einer Gruppe $\mathfrak{G}$ *gilt*

$$\mathfrak{N}_i \trianglelefteq \mathfrak{G} \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Da nämlich nach (1.1) $\mathfrak{N}_{i+1} \leqq \mathfrak{N}_i$ ist, läßt sich (1.2) [nach links und rechts hin] zu

$$[\mathfrak{N}_{i+1}, \mathfrak{G}] \leqq [\mathfrak{N}_i, \mathfrak{G}] \leqq \mathfrak{N}_{i+1} \leqq \mathfrak{N}_i \qquad (i = 1, \ldots, k-1)$$

verlängern. Um so mehr ist

$$[\mathfrak{N}_i, \mathfrak{G}] \leqq \mathfrak{N}_i \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

also ist Satz 1.5 wegen Hilfssatz 1.2 bewiesen.

Bezeichnungen 1.6. Für Untergruppen $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ sei $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ das („geschlossene") *Intervall* von Untergruppen (mit den „Endpunkten" $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$) definiert durch

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \{\mathfrak{X} | \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{X} \leqq \mathfrak{B}\}.$$

Wir nennen dieses Intervall *normal*, wenn es aus Normalteilern von $\mathfrak{G}$ besteht

Bemerkung 1.7. Hilfssatz 1.2 läßt sich auch in der Form aussprechen: Für $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{G}$ existiert das Intervall

$$([\mathfrak{H}, \mathfrak{G}], \mathfrak{H})$$

dann und nur dann, wenn $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ ist.

Den Teil „dann" verschärfen wir zu:

Satz 1.8. *Für jeden Normalteiler* $\mathfrak{N}$ *einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist das Intervall* $([\mathfrak{N}, \mathfrak{G}], \mathfrak{N})$ *normal.*

Es genügt die Inklusion

$$[\mathfrak{N}, \mathfrak{G}] \leqq \mathfrak{X} \leqq \mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{X} \trianglelefteq \mathfrak{G}$$

zu beweisen. Aus dem linken Teil dieser Inklusion folgt nach Definition 1.3, daß $\mathfrak{N} \geqq \mathfrak{X}$ eine (zweigliedrige) Zentralkette von $\mathfrak{G}$ ist, also folgt aus Satz 1.5 $\mathfrak{X} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ in der Tat.

§ 2

Bemerkung 2.1. Wir möchten jetzt die im § 1 gewonnenen Ergebnisse für die Elemente gewisser teilweise geordneter Gruppoide verallgemeinern.

Beispiel 2.2. Es ist bekannt, daß die Menge V_1 aller Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ein vollständiger Verband bezüglich der mengentheoretischen Inklusion $\leqq$ ist. Definiert man das „Produkt" von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_1)$ als den Kommutator $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, so bildet V_1 ein teilweise geordnetes Gruppoid bezüglich dieser kommutativen „Multiplikation" und der Relation $\leqq$, in dem auch

$$[\mathfrak{X}, \mathfrak{X}] \leqq \mathfrak{X} \qquad (\text{für jedes } \mathfrak{X} \in V_1) \tag{2.1}$$

gültig ist. Die Einsuntergruppe von $\mathfrak{G}$ sei durch $\mathfrak{E}$ bezeichnet. Dann besitzt V_1 auch die Eigenschaft

$$[\mathfrak{E}, \mathfrak{X}] = [\mathfrak{X}, \mathfrak{E}] = \mathfrak{E} \qquad (\text{für jedes } \mathfrak{X} \in V_1) \tag{2.2}$$

d. h. die Einsgruppe $\mathfrak{E}$ ist das Nullelement des Gruppoids V_1.

Diese Verhältnisse vor Augen haltend, kam einer von uns schon früher (s. [2]) zu folgenden allgemeinen

Definitionen 2.3. Unter einem *Gruppoid-Verband* verstehen wir ein teilweise geordnetes Gruppoid V mit den speziellen Eigenschaften

(2.3) V ist ein vollständiger Verband bezüglich der partiellen Ordnung $\leqq$ (in dem das kleinste und größte Element durch 0 bzw. e, ferner die beiden Verbandsoperationen durch $\wedge$ und $\vee$ bezeichnet werden);

(2.4) es gilt $a^2 \leqq a$ für jedes $a \in V$;

(2.5) es gilt $0e = e0 = 0$.

Stets bezeichnen wir durch V einen Gruppoid-Verband wie oben und bemerken gleich, daß offenbar

$$0a = a0 = 0 \quad \text{für jedes} \quad a \in V \tag{2.6}$$

gilt.

Ferner nennen wir ein Element $b\,(\in V)$ einen *Absorbenten* des Elementes $a\,(\in V)$, wenn

$$b \leqq a \tag{2.7}$$

und

$$ab \leqq b, \quad ba \leqq b \tag{2.8}$$

bestehen. b heißt ein *Linkabsorbent (Rechtsabsorbent)* von a, wenn (2.7) und (2.8_1) $[(2.7)$ und $(2.8_2)]$ gelten. Schließlich heißt ein Element k von V ein *Quasiabsorbent* des Elementes a von V, wenn

$$k \leqq a \quad \text{und} \quad ka \wedge ak \leqq k \tag{2.9}$$

bestehen.

Bemerkung 2.4. Aus (2.6) sieht man, daß das Element 0 ein Absorbent jedes Elementes von V ist. Wegen (2.3) ist jedes Element ein Absorbent von sich selbst.

Bemerkung 2.5. Aus dem Beispiel 2.2 und den Definitionen 2.3 sieht man, daß V_1 ein Gruppoid-Verband ist. Weiterhin implizieren Hilfssatz 1.2, Beispiel 2.2 und Definitionen 2.3, daß *eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ dann und nur dann ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, wenn $\mathfrak{H}$ ein Absorbent des Elementes $\mathfrak{G}$ des Gruppoid-Verbands V_1* ist.

Wir geben jetzt einige weitere Beispiele für die oben eingeführten Begriffe.

Beispiel 2.6. Es sei $\mathfrak{H}_0$ eine Halbgruppe mit Nullelement 0. Es bezeichne V_2 die Menge der 0 enthaltenden Unterhalbgruppen von $\mathfrak{H}_0$. Definiert man das Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_2$ als die durch alle Elemente $AB(A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B})$ erzeugte Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}_0$, so bildet V_2 einen Gruppoid-Verband bezüglich dieser Multiplikation und der mengentheoretischen Inklusion. $\{0\}$ bzw. $\mathfrak{H}_0$ ist das kleinste bzw. das größte Element des vollständigen Verbandes V_2.

Die Links-, Rechtsideale usw. von $\mathfrak{H}_0$ werden in V_2 die Links-, Rechtsabsorbenten usw. des Elementes $\mathfrak{H}_0$ von V_2.

Beispiel 2.7. Ähnlich zum Beispiel 2.6 kann man einsehen, daß die Menge V_3 aller Unterringe eines assoziativen Ringes $\mathfrak{R}$ einen Gruppoid-Verband bildet, wenn die folgenden Operationen in V_3 definiert sind:

a) $\mathfrak{S} \wedge \mathfrak{T}$ ist der mengentheoretische Durchschnitt der Unterringe $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} (\in V_3)$;

b) $\mathfrak{S} \vee \mathfrak{T}$ bezeichnet den durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ erzeugten Unterring von $\mathfrak{R}$;

c) das Produkt $\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{T}$ bezeichnet den durch alle Elemente $ST(S \in \mathfrak{S}, T \in \mathfrak{T})$ erzeugten Unterring von $\mathfrak{R}$.

Die Ideale, Links-, Rechts- und Quasiideale des Ringes $\mathfrak{R}$ gehen in die Absorbenten, Links-, Rechts- und Quasiabsorbenten des Elementes $\mathfrak{R}$ von V_3 über.

§ 3

Definitionen 3.1. Eine endliche Kette

$$e \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq a_k \qquad (k \geqq 2) \tag{3.1}$$

aus den Elementen $e, a_1, \ldots, a_k$ eines Gruppoid-Verbandes V heißt eine *Linkszentralkette (Rechtszentralkette)* von e, wenn

$$ea_i \leqq a_{i+1} \quad (a_i e \leqq a_{i+1}) \qquad (i = 1, \ldots, k-1) \tag{3.2}$$

gilt.

Die Kette (3.1) heißt eine *Zentralkette* von e, wenn sie gleichzeitig eine Links- und Rechtszentralkette von e ist.

Unter einer *Quasizentralkette* von e verstehen wir eine endliche Kette

$$e \geqq b_1 \geqq \ldots \geqq b_r \qquad (r \geqq 2; e, b_1, \ldots, b_r \in V) \tag{3.3}$$

mit

$$eb_i \wedge b_i e \leqq b'_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1). \tag{3.4}$$

Satz 3.2. *Es gilt für alle Glieder einer Zentralkette (Links-, Rechts-, Quasizentralkette)*

$$e \geqq c_1 \geqq \ldots \geqq c_s \qquad (s \geqq 2; e, c_1, \ldots, c_s \in V)$$

des Elementes e, daß c_i $(i=1, \ldots, s)$ ein Absorbent (Links-, Rechts-, Quasiabsorbent) von e ist.

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Definitionen 3.1 und 2.3.

Definitionen 3.3. Für die Elemente $a \leqq b$ des Gruppoid-Verbandes V besteht das (geschlossene) *Intervall* (a, b) aus allen Elementen x von V mit $a \leqq x \leqq b$. Wir nennen dieses Intervall (a, b) *normal (links-, rechts-, quasinormal)*, wenn jedes x aus (a, b) ein Absorbent (Links-, Rechts-, Quasiabsorbent) des Elements e von V ist.

Satz 3.4. *Das Element d des Gruppoid-Verbandes V ist dann und nur dann ein Absorbent [Links-, Rechts-, Quasiabsorbent] des Elementes e von V, wenn das Intervall*

$$(3.5) \qquad (ed \vee de, d), \quad [(ed, d), \ (de, d), \ (ed \wedge de, d)]$$

existiert und normal [links-, rechts-, quasinormal] ist.

Wenn d nämlich ein Absorbent [Links-, Rechts-, Quasiabsorbent] von e ist, dann existiert das Intervall (3.5_1) $[(3.5_2), (3.5_3), (3.5_4)]$ infolge der Definitionen 2.3. Ist x weiterhin ein beliebiges Element des Intervalls (3.5_1) $[3.5_2), (3.5_3), (3.5_4)]$, so ist

$$e \geqq d \geqq x \geqq ed \vee de, \quad [e \geqq d \geqq x \geqq ed, \ e \geqq d \geqq x \geqq de, \ e \geqq d \geqq x \geqq ed \wedge de]$$

eine Zentralkette [Links-, Rechts-, Quasizentralkette] von e. Aus dem Satz 3.2 und den Definitionen 3.3 bekommt man, daß das Intervall (3.5_1) $[(3.5_2), (3.5_3), (3.5_4)]$ in der Tat normal [links-, rechts-, quasinormal] ist.

Umgekehrt impliziert schon die Existenz des Intervalls (3.5_1) $[(3.5_2), (3.5_3), (3.5_4)]$, daß d ein Absorbent [Links-, Rechts-, Quasiabsorbent] von e ist.

Bemerkung 3.5. Ist die in V definierte Multiplikation *kommutativ*, so stimmen die vier Fälle des Satzes 3.2 bzw. des Satzes 3.4 überein. (Für jede Gruppe $\mathfrak{G}$ ist V ein kommutatives Gruppoid bezüglich der im Beispiel 2.2 definierten „Multiplikation".)

§ 4

Bemerkung 4.1. Aus den Bemerkungen 2.5 und 3.5 ferner aus dem Beispiel 2.2 sieht man, daß Satz 1.5 ein Spezialfall des Satzes 3.2 ist.

Definition 4.2. $\mathfrak{M}$ bezeichnet einen assoziativen Ring (eine Halbgruppe mit Nullelement). Eine (endliche) *Zentralkette* des Ringes (der Halbgruppe mit 0) $\mathfrak{M}$ ist eine Kette von Unterringen (Unterhalbgruppen mit 0) von $\mathfrak{M}$

$$(4.1) \qquad \mathfrak{M} \geqq \mathfrak{A}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{A}_k \qquad (k \geqq 2)$$

mit

$$(4.2) \qquad \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{A}_i \leqq \mathfrak{A}_{i+1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{M} \leqq \mathfrak{A}_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Eine Kette von Unterringen (Unterhalbgruppen mit 0) von $\mathfrak{M}$ (4.1) heißt eine *Linkszentralkette [Rechtszentralkette]* von $\mathfrak{M}$, wenn (4.2_1) $[(4.2_2)]$ gilt.

Unter einer *Quasizentralkette* von $\mathfrak{M}$ verstehen wir eine endliche Kette von Unterringen (Unterhalbgruppen mit 0) von $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{B}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{B}_r \qquad (r \geqq 2) \tag{4.3}$$

mit

$$\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{B}_i \wedge \mathfrak{B}_i \cdot \mathfrak{M} \leqq \mathfrak{B}_{i+1} \qquad (i = 1, \ldots, r-1). \tag{4.4}$$

Satz 4.3. *Alle Glieder $\mathfrak{L}_i$ $(i=1, \ldots, s)$ einer Zentralkette (Links-, Rechts-, Quasizentralkette)*

$$\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{L}_1 \geqq \ldots \geqq \mathfrak{L}_s \qquad (i = 1, \ldots, s-1)$$

des Ringes (der Halbgruppe mit 0) $\mathfrak{M}$ sind Ideale (Links-, Rechts-, Quasiideale) von $\mathfrak{M}$.

Satz 4.3 folgt unmittelbar aus dem Satz 3.2, den Definitionen 4.2 und den Beispielen 2.5 und 2.7.

Definitionen 4.4. $\mathfrak{M}$ bezeichnet wieder einen assoziativen Ring (eine Halbgruppe mit 0). Für die Unterringe (Unterhalbgruppen mit 0) $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{M}$ besteht das *(geschlossene) Intervall* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ aus allen Unterringen (Unterhalbgruppen mit 0) $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{X} \leqq \mathfrak{B}$. Dieses Intervall $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wird *normal [links-, rechts-, quasinormal]* genannt, je nachdem jedes $\mathfrak{X}$ aus $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ein *Ideal [Links-, Rechts-, Quasiideal]* von $\mathfrak{M}$ ist.

Satz 4.5. *Der Unterring (Unterhalbgruppe mit 0) $\mathfrak{D}$ des assoziativen Ringes (der Halbgruppe mit 0) $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann ein Ideal [Links-, Rechts-, Quasiideal] von $\mathfrak{M}$, wenn das Intervall*

$$(\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{D} \vee \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{M}, \mathfrak{D})[(\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{D}, \mathfrak{D}),\ (\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{M}, \mathfrak{D}),\ (\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{D} \wedge \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{M}, \mathfrak{D})] \tag{4.5}$$

existiert und normal [links-, rechts-, quasinormal] ist[2]).

Den Satz 4.5 bekommt man leicht aus dem Satz 3.4, den Definitionen 4.4 und den Beispielen 2.6 und 2.7.

Literaturverzeichnis

[1] B. Huppert, Endliche Gruppen I, *Berlin, Heidelberg, New York*, 1967.
[2] O. Steinfeld, Über Gruppoid-Verbände I, *Acta Sci. Math.* **31** (1970), 203—218.

(Eingegangen am 16. März 1973.)

[2]) Ein Teil des Satzes 4.5 läßt sich verschärfen: *Ist $\mathfrak{D}$ ein Ideal [Links-, Rechts-, Quasiideal] des assoziativen Ringes* (*der Halbgruppe mit* 0) $\mathfrak{M}$, *so ist jeder Untermodul* (*jede Untermenge mit* 0) $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{M}$ *mit* $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{D} \vee \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{M} \leqq \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{D}$ $[\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{D} \leqq \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{D},\ \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{M} \leqq \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{D},\ \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{D} \wedge \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{M} \leqq \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{D}]$ *ein Ideal [Links-, Rechts-, Quassiideal] von* $\mathfrak{M}$.