Über eine Verallgemeinerung der Schwarzschen Ungleichung

Von ST. GOŁĄB (Kraków)

Herrn Professor Dr. A, Rapcsák zum 60-ten Geburtstag freundlich zugeeignet

Den Gegenstand dieses Artikels bilden Vektorräume $\mathbf{V}$ über den Körper $\mathscr{R}$ der reellen Zahlen.

Die Vektoren werden mit kleinen lateinischen Buchstaben, die Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.

Der Vektorraum $\mathbf{V}$ kann mit einer metrischen Struktur ausgestattet werden etwa mit Hilfe des Begriffes des Skalarproduktes

$$\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathscr{R}.$$

Es ist wohl bekannt, daß falls das Produkt φ die folgenden Bedingungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(x, x) \geqq 0 \\ \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \emptyset \\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x) \\ \varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z) \end{cases}$$

erfüllt, so besteht die so genannte Schwarz'sche Ungleichung

$$(2) \qquad \varphi(x, x) \cdot \varphi(y, y) - \varphi^2(x, y) \geqq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann besteht, wenn x, y linear abhängig sind. Es ist auch wohl bekannt, daß man dann die Norm $|x|$ mit Hilfe der Formel

$$(3) \qquad |x| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\varphi(x, x)}$$

definieren kann und daß dann die Norm $|x|$ u. a. den folgenden Bedingungen genügt:

$$(4) \qquad |x| \geqq 0$$

$$(5) \qquad |x| = 0 \Rightarrow x = \emptyset$$

$$(6) \qquad |\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$$

$$(7) \qquad |x + y| \leqq |x| + |y|.$$

Die Bedingung (6) wird Homogeneität der Norm und die Bedingung (7) die Konvexität der Norm genannt. Im Falle wo $\mathbf{V}$ eine endliche Dimension n besitzt, stellt die Ungleichung (7) eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die so genannte Indicatrix (der geometrische Ort im affinen Raum A_n der Endpunkte der Einheitsvektoren x die in einem fixierten Punkte angehängt sind) eine (schwach) konvexe Hyperfläche darstellt.

Eine Metrik $|x|$ kann aber in $\mathbf{V}$ unabhängig von der Struktur die von φ herkommt oder sogar ohne der Existenz von φ definiert werden.

Wir setzen in dieser Arbeit die Bedingungen (4) und (5) voraus und außerdem, statt der stärkeren Voraussetzung der Homogenität (6), setzen wir nur die schwächere Voraussetzung der positiven Homogenität voraus:

$$|\alpha x| = \alpha \cdot |x| \quad \text{für jedes} \quad \alpha \geqq 0. \tag{8}$$

Die Voraussetzung (8) impliziert nicht die Symmetrie

$$|-x| = |x|, \tag{9}$$

welche eine Folge von (6) ist. Die Konvexität (7) wird auch nicht angenommen.

Die Vektorräume $\mathbf{V}$, die mit einer Norm $|x|$ versehen sind die den Bedingungen (4), (5), (8) genügt, nennen wir *schwach normierte* Räume.

Ist der Vektorraum $\mathbf{V}$ nicht mit einer Norm $|x|$, sondern mit einem Skalarprodukt $\varphi(x, y)$ normiert, so kann man auch über einen schwach normierten (oder verallgemeinerten) Vektorraum sprechen indem man die klassischen Axiome (1) abschwächen läßt.

Die interessanten Ergebnisse, was die Verallgemeinerung auf Vektorräume über einen beliebigen Körper K mit der Charakteristik $\neq 2$ betrifft, enthält die Arbeit von J. Rätz [1].

Da wir über das Skalarprodukt $\varphi(x, y)$ a priori nicht verfügen, so kann man über die Schwarzsche Ungleichung im klassischen Sinne nicht sprechen. Wir können jedoch mit Hilfe der Norm $|x|$ ein Analogon dieser Ungleichung bilden und zwar auf Grund der folgenden Definition:

$$\{|x|^2 + |y|^2 - |y-x| \cdot |x-y|\}^2 \leqq 4|x|^2 \cdot |y|^2. \tag{10}$$

Es entsteht die Frage ob die Ungleichung (10) unter den Voraussetzungen (4), (5), (8) besteht, und — wenn nicht — unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen (10) gefolgert werden kann. Die Antwort auf diese Frage ist eben das Ziel dieser Arbeit. Gleichzeitig wird auch eine geometrische Deutung der Schwarzschen Ungleichung erzielt.

Satz 1. *Wenn die Norm* $|x|$ *die Bedingungen* (4), (5), (8) *erfüllt und außerdem der Ungleichung* (10) *genügt, so ist sie symmetrisch, d.h. es besteht die Relation* (9).

Beweis. Setzen wir in (10) $y=\theta$ ein und nützen (5) aus, so erhalten wir

$$\{|x|^2 - |-x| \cdot |x|\}^2 \leqq 0,$$

was der Gleichung

$$|x|^2 - |-x| \cdot |x| = 0$$

äquivalent ist. Für $x \neq \theta$ erhalten wir daraus

$$|x| = |-x|.$$

Die letzte Gleichung ist aber auch für $x=\theta$ erfüllt und somit ist der Satz bewiesen.

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen* (4), (5), (8) *ist die Ungleichung* (10) *äquivalent dem System der Bedingungen* (9) *und* (7).

Beweis. A) Setzen wir (10) voraus. Auf Grund des Satzes 1 ist dann die Bedingung (9) erfüllt. Es genügt also nur (7) zu beweisen. Zu diesem Zweck werden wir zunächst die Ungleichung (10) umformen. Durch Umgruppierung erhalten wir die äquivalente Ungleichung

$$\{|x|^2-|y|^2\}^2+|y-x|^4-2\{|x|^2+|y|^2\}\cdot|y-x|^2\leqq 0 \tag{11}$$

oder, nach Einführung der kürzeren Bezeichnungen

$$W\overset{\text{def}}{=}|y-x|^2 \tag{12}$$

$$H\overset{\text{def}}{=}\{|x|^2-|y|^2\}^2 \tag{13}$$

die quadratische (in bezug auf W) Ungleichung

$$W^2-2\{|x|^2+|y|^2\}\cdot W+H\leqq 0. \tag{14}$$

Bezeichnen wir noch ferner kurz

$$W_1\overset{\text{def}}{=}\{|x|-|y|\}^2 \tag{15}$$

$$W_2\overset{\text{def}}{=}\{|x|+|y|\}^2, \tag{16}$$

so können wir (14) folgendermaßen umschreiben

$$(W-W_1)(W-W_2)\leqq 0 \tag{17}$$

woraus folgt $W_1\leqq W\leqq W_2$ oder

$$\{|x|-|y|\}^2\leqq|y-x|^2\leqq\{|x|+|y|\}^2. \tag{18}$$

Nehmen wir nun augenblicklich an, daß es zwei Vektoren x_0, y_0 gibt mit der Eigenschaft

$$|x_0+y_0|>|x_0|+|y_0|,$$

was in der folgenden gleichwertigen Form geschrieben werden kann

$$|y_0-(-x_0)|^2>[|y_0|+|-x_0|]^2,$$

was aber der rechten Seite der Ungleichung (18) widerspricht. Der eine Teil des Satzes ist bewiesen.

B) Um auch den zweiten zu beweisen, setzen wir (9) und (7) voraus. Aus (7) erhalten wir

$$|y|-|x|\leqq|y-x|. \tag{19}$$

Ist $|y|\geqq|x|$, so erhalten wir daraus

$$\{|y|-|x|\}^2\leqq|y-x|^2,$$

d. h. die linke Seite der Ungleichung (18). Ist dagegen $|y| < |x|$, so tauschen wir in (19) die Variablen x, y um und bekommen

$$|x| - |y| \leqq |x - y|,$$

was auf Grund von (9) folgendermaßen umgeschrieben werden kann

$$|x| - |y| \leqq |y - x|.$$

Daraus erhalten wir

$$[|x| - |y|]^2 \leqq |y - x|^2,$$

also die linke Seite von (18). Um auch die rechte Seite zu beweisen, schreiben wir (auf Grund von (7))

$$|y - x| \leqq |y| + |-x|$$

oder

$$|y - x| \leqq |y| + |x|.$$

Daraus bekommen wir sofort die rechte Seite von (18) und damit ist der Satz bewiesen. Aus dem Satz 2 folgt sofort der folgende

Satz 3. *Wenn die Norm* $|x|$ *die Bedingungen* (4), (5), (6) *erfüllt, so ist die Ungleichung* (10) *der Ungleichung* (7) *äquivalent.*

Damit wir die geometrische Interpretation der Schwarz'schen Ungleichung errungen.

Bemerkung. Falls x und y von Null verschiedene Vektoren sind, so ist (10) äquivalent mit

$$0 \leqq \Phi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\{|x|^2 + |y|^2 - |y - x| \cdot |x - y|\}^2}{4|x|^2|y|^2} \leqq 1. \tag{20}$$

Die skalare Funktion $\Phi(x, y)$, konstruiert für eine schwache Norm, die außerdem auch (7), aber nicht (9) erfüllt, genügt im allgemeinen nicht der Ungleichung $\Phi \leqq 1$, also der verallgemeinerten Schwarzschen Ungleichung. Es zeigt sich sogar, daß Φ vom oben nicht beschränkt zu sein braucht. In der Tat, nehmen wir in einem schwach normierten Raum einen Vektor x_0 mit der Eigenschaft $|-x_0| \neq |x_0|$ und lassen wir y gegen Nullvektor $\emptyset$ streben. Dann wird

$$\Phi(x_0, y) = \frac{\{|x_0|^2 + |y|^2 - |y - x_0| \cdot |x_0 - y|\}^2}{4|x_0|^2|y|^2}$$

unendlich wachsen. Tatsächlich, da $|y| \to 0$, $|y - x_0| \to |-x_0|$, $|x_0 - y| \to |x_0|$, was aus der Konvexität der Metrik folgt, so strebt der Zähler gegen $[|x_0|^2 - |x_0||-x_0|]^2 = |x_0|^2\{|x_0| - |-x_0|\}^2 > 0$, während der Nenner gegen Null, und folglich $\Phi(x_0, y) \to +\infty$.

Literatur

[1] J. Rätz, On isometries of generalized inner product spaces. *SIAM J. Appl. Math.* **18** (1970), 6—9.

(Eingegangen am 8. Mai 1973.)