Zur Zerlegung artinscher Ringe

Von ALFRED WIDIGER (Halle)

1. Ist ein artinscher Ring R, d.h. ein assoziativer Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale, die direkte Summe zweier Ideale R_1 und R_2, so sind natürlich R_1 uns R_2 selbst artinsche Ringe. Die vorliegende kurze Arbeit befaßt sich mit der folgenden Fragestellung: Inwieweit ist die Eigenschaft eines Ideales I eines artinschen Ringes R, artinsch zu sein, hinreichend dafür, daß I selbst oder wenigstens ein „nur wenig größeres" Ideal ein direkter Summand von R ist.

Das Hauptergebnis von [3], nämlich der Satz 3, zeigt, daß ein solches „wenig größeres" Ideal direkter Summand von R ist, wenn I das Radikal von R bedeutet.

Wir stellen die in der Arbeit benutzten Bezeichnungen kurz zusammen. $\oplus$ und $\sum^{\oplus}$ bezeichnen gruppentheoretische, $\boxplus$ und $\sum^{\boxplus}$ ringtheoretische direkte Summen. Für einen beliebigen Ring R ist $(R, +)$ die additive Gruppe von R und R_n der Ring aller n-reihigen quadratischen Matrizen über R. $J(R)$ sei das Jacobson-Radikal von R.

Ein Ring heißt primär, wenn er ein Einselement besitzt, und wenn $R/J(R)$ ein voller Matrizenring über einem Schiefkörper ist. Der Ring R mit Einselement wird vollständig primär genannt, falls $R/J(R)$ ein Schiefkörper ist.

2. Den folgenden einfachen Sachverhalt formulieren wir als

Satz 1. *Es sei R ein artinscher Ring. Ist I ein Ideal von R, und ist I selbst artinscher Ring mit $I \cap J(R) = (O)$, so ist I direkter Summand von R.*

BEWEIS. Wegen $J(I) = I \cap J(R) = (O)$ ist I radikalfrei und artinsch. Also kann man schreiben:

$$I = e_1 I e_1 \boxplus \dots \boxplus e_k I e_k = e_1 R e_1 \boxplus \dots \boxplus e_k R e_k,$$

wobei die e_i orthogonale Idempotente von I (und damit von R) sind und die $e_i R e_i$ einfache Ringe. $\bar{I}$, das Bild von I bei $R \to \bar{R} = R/J(R)$ ist direkter Summand von $\bar{R}$, so daß man schreiben kann:

$$\bar{R} = \bar{e}_1 \overline{Re_1} \boxplus \dots \boxplus \bar{e}_k \overline{Re_k} \boxplus \bar{u}_{k+1} \overline{Ru_{k+1}} \boxplus \dots \boxplus \bar{u}_n \overline{Ru_n},$$

wobei die $\bar{e}_i$, $\bar{u}_j$ $(i=1, \dots, k;\ j=k+1, \dots, n)$ orthogonale Idempotente von $\bar{R}$ sind, und die $\bar{u}_j \overline{Ru_j}$ $(j=k+1, \dots, n)$ ebenfalls einfach sind. Dann gibt es entsprechend dem Beweis von Prop. 5 auf Seite 54 von [1] die orthogonalen Idempotente $e_1, \dots, e_k$, $e_{k+1}, \dots, e_n$ von R, so daß $\bar{e}_j = \bar{u}_j$ für $j=k+1, \dots, n$.

Die zweiseitige Peircesche Zerlegung von R bezüglich der orthogonalen Idempotente e_i, $i=1, \dots, n$, liefert nach [1], Seite 56 eine Zerlegung von R:

$$R = e_1 Re_1 \oplus \dots \oplus e_n Re_n \oplus N,$$

mit $N \subseteqq J(R)$. Das heißt

$$R = I \oplus e_{k+1} Re_{k+1} \oplus \dots \oplus e_n Re_n \oplus N.$$

Da NI, $IN \subseteqq I \cap J(R) = (O)$, genügt es nun zu zeigen, daß $e_{k+1} Re_{k+1} \oplus \dots \oplus e_n Re_n \oplus N$ ein Unterring von R ist. Hiervon überzeugt man sich durch Nachrechnen sofort, wenn beachtet, daß $J(R) \cap I = (O)$ ist.

Satz 2. *Es sei R ein artinscher Ring und I ein Ideal von R mit der Eigenschaft, daß I selbst artinscher Ring ist und daß $I \supseteqq J(R)$. Dann gibt es ein Ideal I^* von R, so daß*

$$R = \sum_{k=1}^{t} {}^{\oplus} S_{n_k}^{(k)} \oplus I^*.$$

wobei $I^* \supseteqq I$, I^*/I endlich, $S_{n_k}^{(k)} S_{n_l}^{(l)} = (O)$ für alle $k, l = 1, \dots, t$ und $k \neq l$ und $I^* S_{n_k}^{(k)} = (O)$ für alle $k = 1, \dots, t$. Dabei sind die $S^{(k)}$ Schiefkörper.

Beweis. Nach [1] (S. 56, Theorem 2) existiert für R eine gruppentheoretische direkte Zerlegung:

$$R = e_1 Re_1 \oplus \dots \oplus e_n Re_n \oplus N,$$

wobei $e_1, \dots, e_n$ orthogonale Idempotente von R, $e_i Re_i$ $(i=1, \dots, n)$ primäre Ringe sind, und N eine Untergruppe von $(J(R), +)$ ist. Die $e_i Re_i$ sind artinsche Ringe. Es gilt $J(e_i Re_i) = e_i J(R) e_i$ (siehe [2], S. 157). $e_i Ie_i$ ist Ideal von $e_i Re_i$ und aus $I \supseteqq J(R)$ folgt $e_i Ie_i \supseteqq J(e_i Re_i)$. Da $e_i Re_i / J(e_i Re_i)$ einfach ist, folgt $e_i Ie_i = e_i Re_i$, d.h. $e_i Re_i \subseteqq I$, oder $e_i Ie_i = e_i J(R) e_i$. Wir schreiben

$$R = e_1 Re_1 \oplus \dots \oplus e_t Re_t \oplus I^*, \tag{1}$$

wobei wir so numeriert haben, daß $e_i Re_i \subsetneqq I$ und die Faktorringe $e_i Re_i / J(e_i Re_i)$ unendlich sind für $i=1, \dots, t$. Dann gilt

$$e_i Re_i \cap I = e_i Ie_i = J(e_i Re_i) \subseteqq J(R) \tag{2}$$

für $i=1, \dots, t$.

Wir zeigen $J(R) e_i Re_i = (O)$: Es sei m der Nilpotenzgrad von $J(R)$. Wir nehmen an $b \in J(R)^{m-k}$ und beweisen $be_i Re_i = (O)$ durch Induktion nach k.

Für $k=0$ ist die Behauptung richtig. Die Induktionsvoraussetzung besagt $J^{m-k} R^{(i)} = (O)$, wobei mit $R^{(i)}$ der Ring $e_i Re_i$ gemeint ist. Weiter sei $J(R^{(i)}) = J^{(i)}$ gesetzt. $R^{(i)}/J^{(i)}$ ist voller Matrizenring über einem Schiefkörper $\bar{S}^{(i)}$ mit dem Einselement $\bar{e}_i$. Der Ring $R^{(i)}/J^{(i)}$ besitzt einen zu $\bar{S}^{(i)}$ isomorphen Unterschiefkörper $\bar{K}^{(i)}$, der unendlich ist und dessen Einselement genau $\bar{e}_i$ ist. In $(\bar{K}^{(i)}, +)$ gibt es eine streng absteigende unendliche Kette von Untergruppen

$$\bar{U}_1 \supset \bar{U}_2 \supset \dots .$$

Die vollständigen Urbilder von $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots$ seien $U_1, U_2, \dots$. Nun wählen wir $b \in J^{m-k-1}$. Angenommen, es gälte $bR^{(i)} \neq (O)$. Dann folgte, daß

$$bU_1 + J^{m-k} \supset bU_2 + J^{m-k} \supset \dots$$

eine streng absteigende Kette von Untergruppen wäre. Denn wäre etwa $bu_1 = bu_2 + r$ ($u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $r \in J^{m-k}$) für solche u_1, u_2 mit $u_1 - u_2 \notin J^{(i)}$, so folgte wegen der Existenz eines $(u_1-u_2)^*$ mit $(u_1-u_2)(u_1-u_2)^* = e_i + a$ mit $a \in J^{(i)}$

$$be_i + ba = r(u_1-u_2)^*.$$

Die rechte Seite ist gleich Null, da nach Induktionsvoraussetzung $J^{m-k}R^{(i)} = (O)$ ist. Weiter ist $ba \in J^{m-k-1}J^{(i)} \subseteqq J^{m-k}$. Da $a \in J^{(i)}$, ist $bae_i = ba \in J^{m-k}e_i = (O)$ wieder nach Induktionsvoraussetzung. Also folgte $be_i = 0$, im Widerspruch zur Annahme. Die $bU_l + J^{m-k}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ sind aber sogar Rechtsideale von I, weil

$$(bU_l + J^{m-k})I \subseteqq J^{m-k} \subseteqq bU_l + J^{m-k}$$

wegen (2) richtig ist. Das wäre ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß I artinsch ist. Damit ist gezeigt:

$$JR^{(i)} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, t.$$

Das bedeutet insbesondere $e_iJe_iR^{(i)} = e_iJe_i = (O)$, das heißt, die Ringe e_iRe_i, $i = 1, \ldots, t$, sind radikalfrei, also volle Matrizenringe über Schiefkörpern $S^{(i)}$. Also gilt auch $I^* \supseteqq I$, I^*/I endlich. Der Beweis von Satz 2 ist erbracht, wenn gezeigt wird, daß I^* ein Ideal von R ist. Es seien

$$I^* \ni s = s_{t+1} + \ldots + s_n + b_s$$
$$R \ni u = u_1 + \ldots + u_n + b_u$$

in der Darstellung (1).

$$us = (u_{t+1}s_{t+1} + \ldots + u_ns_n) + (ub_s + b_us - b_ub_s).$$

Das Element in der ersten Klammer gehört zu I^*, das in der zweiten zu $J \subseteqq I^*$. Der gleiche Schluß für su liefert die Behauptung.

Satz 3. *Es sei R ein artinscher Ring und I ein Ideal von R mit der Eigenschaft, daß I rechts- und linksartinscher Ring sei und daß $I \supseteqq J(R)$. Dann gibt es ein Ideal I^* von R, so daß*

$$R = \sum_{k=1}^{t}{}^{\boxplus} S_{n_k}^{(k)} \boxplus I^*,$$

wobei $I^* \supseteqq I$, I^*/I endlich ist, und die $S^{(k)}$ Schiefkörper sind.

Wegen Satz 2 gibt es nichts zu beweisen.

Die Bedingung, daß I rechts- und linksartinsch ist, ist nicht überflüssig. Zum Beispiel ist der Ring

$$R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

mit einem unendlichen Körper K artinsch. Das Ideal

$$I = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

ist artinsch, aber nicht linksartinsch, und der Ring R zerfällt nicht entsprechend Satz 3.

Wird das Radikal $J(R)$ eines artinschen Ringes R als artinsch vorausgesetzt, so folgt schon aus der Nilpotenz von $J(R)$, daß $J(R)$ auch linksartinsch ist $\big((J(R), +)$ genügt sogar der Minimalbedingung für Untergruppen$\big)$, so daß Satz 3 gilt. Dieser Fall liefert also in der Tat das Hauptergebnis von [3].

Literatur

[1] N. Jacobson, Structure of rings. *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications,* **37**, Providence 1956.

[2] A. Kertész, Vorlesungen über artinsche Ringe. Akadémiai Kiadó, *Budapest Leipzig* 1968.

[3] A. Kertész, und A. Widiger, Artinsche Ringe mit artinschem Radikal. *J. Reine Angew. Math.* **242** (1970), 8—15.

(Eingegangen am 19. Mai 1973.)