Über ein Integral

Von S. GOŁĄB (Kraków) und L. TAMÁSSY (Debrecen)

Herrn Professor A. Rapcsák zum 60. Geburtstag zugeeignet

In [1] ist ein Lemma bewiesen, wonach für eine in $[0, \pi]$ stetige Funktion $\varphi(\alpha)$ aus

$$(*) \qquad \int_0^\pi \varphi(\alpha)|\sin(\alpha-\beta)|\,d\alpha = 0 \quad \text{für jede} \quad \beta\in[0,\pi]$$

das Verschwinden von $\varphi(\alpha)$ folgt. Dieses Lemma scheint auch ein selbständiges Interesse zu haben. Wir fanden, das man für Riemann integrierbare Funktionen $\varphi(\alpha)$ aus $(*)$ ein ähnliches Ergebnis, nämlich das fast überall Verschwinden von $\varphi(\alpha)$ folgern kann. Der Beweis des erwähnten Lemmas nützt die Stetigkeit von $\varphi(\alpha)$ wesentlich aus. So mußten wir hier eine völlig andersartige Beweismethode anwenden. Gleichzeitig dehnen wir das Ergebnis auf Funktionen von mehreren Variabeln aus.

Wir wollen den folgenden *Satz* beweisen:

Die einzige R-integrierbare Funktion $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ für welche

$$(1) \qquad \int_{x_1=0}^{\pi} \dots \int_{x_n=0}^{\pi} \varphi(x_1, \dots, x_n)|\sin(x_1+y_1)| \dots |\sin(x_n+y_n)|\,dx_1 \dots dx_n = 0$$

für jede $y_1, \dots, y_n$; $0\leqq y_i\leqq\pi$ $(i=1, 2, \dots, n)$ gilt, ist die Funktion $\varphi(x_1, \dots, x_n)=0$ fast überall in $0\leqq x_i\leqq\pi$.

Wir möchten diesen Satz erstens für $n=1$ beweisen. Unsere Annahme lautet in diesem Fall

$$(2) \qquad \int_0^\pi \varphi(x)|\sin(x+y)|\,dx = 0 \quad (\forall y: y\in[0,\pi]).$$

Setzen wir in (2) an die Stelle von y den Wert $y\pm\frac{\pi}{2}$, so erhalten wir

$$(3) \qquad \int_0^\pi \varphi(x)|\cos(x+y)|\,dx = 0 \quad (\forall y: y\in[0,\pi]).$$

Das Integrand von (2) als Funktion des Parameters y ist differenzierbar in Bezug auf y (abgesehen vom Wert $y=-x+\pi$). Wir zeigen, daß man das Differenzieren von

$$\int_0^\pi \varphi(x)|\sin(x+y)|\,dx = \int_0^{\pi-y} \varphi(x)|\sin(x+y)|\,dx + \int_{\pi-y}^{\pi} \varphi(x)|\sin(x+y)|\,dx = 0$$

nach y unter dem Integralzeichen durchführen kann. Da $|\sin(x+y)| = \pm\sin(x+y)$, so genügt es unsere Behauptung bezüglich des Differenzierens unter dem Integralzeichen für

$$\psi(y) = \int_a^b \Phi(x)\sin(x+y)\,dx, \quad y \notin (a, b) \tag{4}$$

zu beweisen, wo $\Phi(x)$ eine in (a, b) R-integrierbare (und daher beschränkte Funktion) ist. Aus (4) erhalten wir

$$\frac{\psi(y+h)-\psi(y)}{h} = \int_a^b \Phi(x)\frac{\sin(x+y+h)-\sin(x+y)}{h}\,dx = \tag{5}$$

$$= \int_a^b \Phi(x)\cos(x+y+\Theta h)\,dx \qquad (\Theta(x+y, h): 0 \leqq \Theta \leqq 1).$$

$\Phi(x)\cos(x+y+\Theta h)$ konvergiert aber wegen der Beschränktheit von $\Phi(x)$ für $h\to 0$ gleichmäßig in Bezug auf x gegen $\Phi(x)\cos(x+y)$, was für die Umkehrung der Reihenfolge des Grenzüberganges und der Integration in (5) genügt:

$$\frac{d}{dy}\int_a^b \Phi(x)\sin(x+y)\,dx = \int_a^b \Phi(x)\frac{d}{dy}\sin(x+y)\,dx.$$

Ähnlicherweise kann man auch das Differenzieren von (3) nach y unter dem Integralzeichen durchführen.

Wir erhalten durch Differentiation von (3) nach y

$$\int_0^\pi \varphi(x)|\sin(x+y)|\operatorname{sgn} B\,dx = 0, \tag{6}$$

wo

$$B \equiv \{-\sin(x+y)\}\left\{\frac{\pi}{2}-(x+y)+\left[\frac{x+y+\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right]_e 2\pi\right\}$$

und $[g]_e$ den ganzen Teil von g bedeutet. Die Substraktion der Gleichung (2) von (6) ergibt

$$\int_0^\pi \varphi(x)|\sin(x+y)|\{-1+\operatorname{sgn} B\}\,dx = 0. \tag{7}$$

$-1+\operatorname{sgn} B$ hat den Wert -2 für $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}-y\right)$ und für $x\in(\pi-y, \pi)$, und den

Wert 0 für $x \in \left(\frac{\pi}{2}-y,\ \pi-y\right)$, falls y zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ fällt. Wir wollen jetzt $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ annehmen. Infolgedessen nimmt (7) die Form

$$-2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}-y} \varphi(x)|\sin(x+y)|\,dx + \int_{\pi-y}^{\pi} \varphi(x)|\sin(x+y)|\,dx\right\} = 0$$

an, oder wenn das Vorzeichen von $\sin(x+y)$ berücksichtigt wird

$$\text{(8)} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}-y} \varphi(x)\sin(x+y)\,dx - \int_{\pi-y}^{\pi} \varphi(x)\sin(x+y)\,dx = 0.$$

Anderseits erhalten wir durch Differentiation von (2) nach y und durch nachfolgende Addition von (3)

$$\text{(9)} \qquad \int_0^{\pi} \varphi(x)|\cos(x+y)|\{1+\operatorname{sgn} A\}\,dx = 0,$$

wo

$$A \equiv \cos(x+y)\left\{\pi-(x+y)+\left[\frac{x+y}{2\pi}\right]_e 2\pi\right\}.$$

$1+\operatorname{sgn} A$ hat den Wert 2 für $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und für $x \in (\pi-y, \pi)$, und den Wert 0 für $x \in \left(\frac{\pi}{2}-y,\ \pi-y\right)$ $\left(\text{falls } 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$. So folgt aus (9)

$$2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}-y} \varphi(x)|\cos(x+y)|\,dx + \int_{\pi-y}^{\pi} \varphi(x)|\cos(x+y)|\,dx\right\} = 0,$$

und daraus wegen

$$\cos(x+y)\begin{cases} > 0 & \text{für} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}-y\right), \\ < 0 & \text{für} \quad x \in (\pi-y, \pi): \end{cases}$$

$$\text{(10)} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}-y} \varphi(x)\cos(x+y)\,dx - \int_{\pi-y}^{\pi} \varphi(x)\cos(x+y)\,dx = 0.$$

$\varphi(x)$ ist voraussetzungsgemäß R-integrierbar in $(0, \pi)$ und daher ist sie fast überall stetig. So ist die Menge $\mathfrak{U}$ derjenigen Punkte $x,\ x+\frac{\pi}{2}$ $\left(0<x<x+\frac{\pi}{2}<\pi\right)$, für welche $\varphi(x)$ zumindest an einer der beiden Stellen $x,\ x+\frac{\pi}{2}$ unstetig ist, abzählbar. Ist also $x \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{U}$, so ist φ für x stetig.

Wir betrachten nun (8) für $y+h$ statt y und wir nehmen an, daß $\frac{\pi}{2}-y\in(0,\pi)\setminus\mathfrak{U}$ gilt. So erhalten wir die Relation

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-(y+h)} \varphi(x)\sin(x+y+h)\,dx - \int\limits_{\pi-(y+h)}^{\pi} \varphi(x)\sin(x+y+h)\,dx = 0$$

$$\left(0<y+h<\frac{\pi}{2}\right).$$

Daraus folgt

$$\cos h\Big[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-(y+h)} \varphi(x)\sin(x+y)\,dx - \int\limits_{\pi-(y+h)}^{\pi} \varphi(x)\sin(x+y)\,dx\Big] + \tag{11}$$

$$+\sin h\Big[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-(y+h)} \varphi(x)\cos(x+y)\,dx - \int\limits_{\pi-(y+h)}^{\pi} \varphi(x)\cos(x+y)\,dx\Big] = 0.$$

Der erste eckige Klammerausdruck läßt sich folgendermassen umändern:

$$\Big[\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-y} - \int\limits_{\pi-y}^{\pi}\Big) - \Big(\int\limits_{\frac{\pi}{2}-(y+h)}^{\frac{\pi}{2}-y} + \int\limits_{\pi-(y+h)}^{\pi-y}\Big)\Big].$$

Der erste runde Klammerausdruck verschwindet nach (8). Daher gilt

$$-\cos h\Big[\int\limits_{\frac{\pi}{2}-(y+h)}^{\frac{\pi}{2}-y} \varphi(x)\sin(x+y)\,dx + \int\limits_{\pi-(y+h)}^{\pi-y} \varphi(x)\sin(x+y)\,dx\Big] +$$

$$+\sin h\Big[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-(y+h)} \varphi(x)\cos(x+y)\,dx - \int\limits_{\pi-(y+h)}^{\pi} \varphi(x)\cos(x+y)\,dx\Big] = 0.$$

Durch Anwendung des Mittelwertsatzes folgt

$$(-\cos h)h[M_1+M_2] + \tag{12}$$

$$+\sin h\Big[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-(y+h)} \varphi(x)\cos(x+y)\,dx - \int\limits_{\pi-(y+h)}^{\pi} \varphi(x)\cos(x+y)\,dx\Big] = 0,$$

wo M_1 ein Wert mit der Eigenschaft

$$\inf_{x\in\sigma}\varphi(x)\cos(x+y) \leqq M_1 \leqq \sup_{x\in\sigma}\varphi(x)\cos(x+y),$$

$$\sigma=\left(\frac{\pi}{2}-(y+h),\ \frac{\pi}{2}-y\right),$$

und M_2 ein ähnlicher Wert bezüglich des Intervalls $(\pi-(y+h), \pi)$ ist. Wir dividieren (12) beiderseits durch h und lassen h gegen Null streben. Dann bekommen wir wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$ für $x=\frac{\pi}{2}-y$ und $x=\pi-y$ die Relation

$$-\left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\sin\frac{\pi}{2}+\varphi(\pi-y)\sin\pi\right]+ \tag{13}$$

$$+\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-y}\varphi(x)\cos(x+y)\,dx-\int_{\pi-y}^{\pi}\varphi(x)\cos(x+y)\,dx\right]=0.$$

Der zweite eckige Klammerausdruck von (13) verschwindet aber nach (10). So erhalten wir

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=0 \quad \text{fast überall in} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \tag{14}$$

d.h. $\varphi(x)$ verschwindet in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fast überall.

Wir zeigen nun, daß $\varphi(x)$ auch in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ fast überall verschwindet. Es sei y wieder ein Wert, wofür $\varphi(x)$ sowohl in $x=\frac{\pi}{2}-y$ als auch in $x=\pi-y$ $\left(0<y<\frac{\pi}{2}\right)$ stetig ist. Wenn wir das obige Verfahren statt (8) aus (10) ausgehend durchführen, so bekommen wir

$$\varphi(\pi-y)=0 \quad \text{fast überall in} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dies und (14) bedeutet aber, daß $\varphi(x)=0$ fast überall in $(0, \pi)$, w. z. b. w.

Der allgemeine Fall läßt sich jetzt einfach auf den bewiesenen Spezialfall zurückführen. Wir setzen

$$\int_{x_2=0}^{\pi}\dots\int_{x_n=0}^{\pi}\varphi(x_1, \dots, x_n)|\sin(x_2+y_2)|\cdot\ldots\cdot|\sin(x_n+y_n)|\,dx_2\dots dx_n=$$

$$=:\Phi_1(x_1; y_2, \dots, y_n)\equiv\Phi_1(x_1, \mathfrak{Y}_1),$$

wo

$$\mathfrak{Y}_1:=(y_2, y_3, \dots, y_n).$$

So nimmt (1) die Form

$$\int_0^{\pi}\Phi_1(x_1; \mathfrak{Y}_1)|\sin(x_1+y_1)|\,dx_1=0 \quad (\forall y_1\colon 0\leqq y_1\leqq\pi)$$

an. Hieraus folgt nach dem bewiesenen Spezialfall $n=1$

$$\Phi_1(x_1; \mathfrak{Y}_1)=0 \quad \text{für alle} \quad x_1\in(0, \pi)\setminus\mathfrak{M}_1,$$

wo $\mathfrak{M}_1 \subset (0, \pi)$ eine abzählbare Menge ist. Daher ist

$$\int_0^\pi \Phi_2(x_1, x_2; \mathfrak{Y}_2)|\sin(x_2+y_2)|\,dx_2 = 0 \quad (\forall y_2\colon 0 \leqq y_2 \leqq \pi) \tag{15}$$

für jedes $x_1 \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{M}_1$, wo $\mathfrak{Y}_2 := (y_3, y_4, \dots, y_n)$ und

$$\Phi_2(x_1, x_2; \mathfrak{Y}_2) :=$$

$$= \int_{x_3=0}^{\pi} \dots \int_{x_n=0}^{\pi} \varphi(x_1, \dots, x_n)|\sin(x_3+y_3)| \cdot \ldots \cdot |\sin(x_n+y_n)|\,dx_3 \dots dx_n.$$

Aus (15) folgt wieder nach dem bewiesenen Spezialfall $n=1$:

$$\Phi_2(x_1, x_2; \mathfrak{Y}_2) = 0 \quad \text{für} \quad x_1 \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{M}_1, \quad x_2 \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{M}_2,$$

wo $\mathfrak{M}_2$ eine abzählbare Menge ist. Dieses Verfahren fortsetzend erhalten wir endlich

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \mathfrak{Y}_n) = 0$$

für

$$x_i \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{M}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo die $\mathfrak{M}_i$ abzählbare Mengen sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

[1] L. Tamássy, A characteristic property of the sphere. *Pacific J. Math.* **29** (1969), 439—446.

(Eingegangen am 16. September, 1973.)