

Die Konstruktionen in der projektiven Geometrie der Quaternionengeraden

Von L. GYARMATHI (Debrecen)

Herrn Professor A. Rapcsák zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Die projektive Geometrie der Quaternionengeraden

L. PONTRJAGIN stellte in 1932 ([13], 164)* folgenden Satz auf: „Jeder stetige lokalbikompakte, zusammenhängende Körper K ist dem Körper der reellen oder dem Körper der komplexen Zahlen, oder dem Quaternionenkörper isomorph.“

Zu gleicher Zeit tat A. KOLMOGOROFF [6] unter Berufung auf denselben Satz die folgende Feststellung:

I. Wenn das System von Punkten, Geraden, Ebenen einen topologischen, zusammenhängenden, bikompakten Raum bildet,

II. wenn die Punkte, die Geraden und die Ebenen den Verknüpfungsaxiomen der gewöhnlichen projektiven Geometrie Genüge leisten,

III. wenn die Verknüpfungsrelationen kontinuierlich sind,
dann sind die diesen Forderungen genügenden projektiven Geometrien die folgenden:

Die gewöhnliche reelle projektive Geometrie — die komplexe projektive Geometrie, — und die projektive Quaternionengeometrie.

Die Wichtigkeit der projektiven Quaternionengeometrie wird auch durch den Umstand erhöht, daß sie die klassischen projektiven Geometrien als Spezialfälle umfaßt und die einzige stetige, bezüglich der Multiplikation nichtkommutative Geometrie darstellt. Ebendarum dürften auch Untersuchungen über die projektive Quaternionengeometrie ([1], [11]) Interesse verdienen. In erster Linie wurde bisher die projektive Geometrie der Quaternionengeraden behandelt ([3], [4], [8]).

Die projektive Geometrie der Quaternionengerade nennen wir Q -Geometrie und die Quaternionengerade bezeichnen wir mit q .

Den axiomatischen Ausbau der Q -Geometrie gab J. BILO ([3]) und er hat bewiesen, daß *die Q -Geometrie die Invariantentheorie derjenigen gemischten Gruppe ist, welche zu den Transformationengleichungen*

$$(1) \quad z' = (zc + d)^{-1}(za + b)$$

*) Nummern in eckigen Klammern verweisen jeweils auf die entsprechende Stelle des Literaturverzeichnisses.

und

$$(2) \quad z' = (\bar{z}c + d)^{-1}(\bar{z}a + b)$$

gehört, wo die reelle Quaternion¹⁾ $z = \xi_0 + \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k$ die inhomogene Koordinate eines Punktes der Q -Geraden ist, \bar{z} die Konjugierte von z bedeutet, ferner

$$\nabla = \begin{Bmatrix} a & c \\ b & d \end{Bmatrix} = a\bar{a}d\bar{d} - a\bar{b}d\bar{c} - c\bar{d}b\bar{a} + b\bar{b}c\bar{c} \neq 0$$

ist.

Die mit den obigen Gleichungen erklärten Abbildungen werden dann für jeden Punkt von q definiert sein, wenn wir noch postulieren,²⁾ daß in dem Fall $c \neq 0$ der Entsprechende des Punktes $z = -dc^{-1}$ der Punkt $z' = \infty$, und der Entsprechende des Punktes $z = \infty$ der Punkt $z' = c^{-1}a$ sei. Wenn aber $c = 0$ gilt, dann ist $z = \infty$ Doppelpunkt.

Wir nennen die durch die Gleichung (1) bestimmte Abbildung Projektivität, die Abbildung (2) aber Antiprojektivität.³⁾

In der Q -Geometrie treten — wie die Untersuchungen zeigen — sämtliche projektive Begriffe auf, aber einige Grundsätze der klassischen projektiven Geometrie sind hier nicht gültig. Z. B. ist in der Q -Geometrie nach S. WACHS ([11], 84) das Doppelverhältnis

$$(3) \quad d = (p_1 p_2 p_3 p_4) = (p_1 - p_4)^{-1} (p_2 - p_3) (p_4 - p_3)^{-1} (p_1 - p_4)$$

nicht invariant, wo p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Koordinaten eines Punktes der Quaternionengeraden sind. (1) und (2) führen, in ein äquivalentes Doppelverhältnis⁴⁾ über.

Aus (1) folgt einfach

Satz 1.1. *In der Q -Geometrie existiert mindestens eine solche Projektivität, welche beliebige drei, voneinander verschiedene Punkte der q in beliebige drei, voneinander verschiedene Punkte der q überführt.*

Bemerkung. Ein ähnlicher Satz gilt in der projektiven Geometrie der reellen und der komplexen Geraden. Die Abweichung in der Q -Geometrie ist die, daß es nicht nur eine Projektivität gibt, welche drei gegebene Punkte in drei gegebene Punkte überträgt, sondern es existieren ∞^3 solche Projektivitäten. (In (1) treten 15 unabhängige Parameter auf, drei entsprechende Punktpaare bestimmen aber nur 12 Parameter.)

¹⁾ Hier und im folgenden bedeuten lateinische Buchstaben reelle Quaternionen, gotische Buchstaben gewöhnliche Komplexe Zahlen, $1, i, j, k$ sind die Quaternioneneinheiten und $\bar{z} = \xi_0 - \xi_1 i - \xi_2 j - \xi_3 k$.

²⁾ q hat nur einen einzigen unendlichen Punkt und diesen bezeichnet man mit ∞ .

³⁾ Die Q -Geometrie kann man noch durch die Transformationsgleichungen

$$(1^*) \quad z' = (az + b)(cz + d)^{-1}$$

usw. definieren. Wir bestimmen die Q -Geometrie durch (1) und (2).

⁴⁾ Zwei Quaternionen sind äquivalent, wenn für sie Skalarteil und Norm ($N(z) = \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$) übereinstimmen.

Diese Arbeit befaßt sich in erster Linie mit der Bestimmung der Projektivitäten, der Antiprojektivitäten und der Doppelpunkten der Q -Geometrie, die Konstruktion derselben mit inbegriffen.

Die erwähnten theoretischen Untersuchungen und Konstruktionen werden sehr erleichtert, wenn wir folgende zwei Sätze von E. Study ([9], 60 u. 79) in Betracht nehmen.

Satz 1.2. *Die Q -Geometrie ist mit der Möbius-Geometrie des vierdimensionalen Möbius-Raumes M_4 äquivalent.*

Satz 1.2*. *Die Q -Geometrie ist mit den Homographien einer Hyperkugel des fünfdimensionalen euklidischen Raumes R_5 äquivalent.*

Zu der M_4 und zu der Verbindung desselben mit der q -Geraden gelangen wir auf folgende Weise:

Nehmen wir in einem vierdimensionalen reellen euklidischen Raum R_4 ein Descartes'sches Koordinatensystem $O(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ auf. (Die auf den Achsen angenommen Einheiten seien gleich).

Dem Punkt P mit $z = \xi_0 + \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k$ der q ordnen wir denjenigen Punkt P^* des R_4 zu, dessen Descartes'sche Koordinaten $P^*(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ sind. (Die *-Zeichen können wir auch weglassen.) Auf Grund unseres Übereinkommens ordnen wir — abgesehen vom Punkt ∞ der q — jedem Punkt derselben einen Punkt des R_4 zu, und umgekehrt.

Falls wir den R_4 mit einem einzigen unendlichfernen Punkt erweitern und diesen dem Punkt $z = \infty$ zuordnen, wird jeder Punkt der q einen Entsprechenden haben. Den mit einem einzigen unendlichfernen Punkt erweiterten R_4 nennen wir M_4 . (Den M_4 können wir, als einem vierdimensionalen linearen projektiven Raum ansehen, in welchem wir jeder Hyperebene, jeder Ebene und jeder Geraden je einen einzigen unendlichfernen Punkt zuordnen, und diese Punkte mit dem einzigen unendlichfernen Punkt unseres neuen Raumes identisch sind.)

Im der Q -Geometrie spielen die sogenannten Ketten ersten, zweiten und dritten Grades eine wichtige Rolle.

Definition. Unter Kette ersten, zweiten bzw. dritten Grades verstehen wir solche Punktgruppen, für welche die entsprechenden Bildmengen in M_4 Kreise, Kugel bzw. Hyperkugel sind, wobei wir auch die Geraden als Kreise, die Ebenen als Kugeln und die Hyperebenen als Hyperkugeln gelten lassen.⁵⁾

Definition. Unter der Projektivtransformierten einer Projektivität Π neben der Projektivität T verstehen wir die Projektivität $\Pi' = T^{-1}\Pi T$.

Aus der Definition folgt der

Satz 1.3. *Wenn wir eine Projektivität transformieren, dann geht Doppelpunkt in Doppelpunkt, vertauschbares Punktpaar in vertauschbares Punktpaar über. Ferner*

⁵⁾ Auch unabhängig von M_4 können wir Ketten definieren, z. B. unter Benützung des Satzes von S. WACHS. *Definition:* Kette ersten Grades ist die Menge derjenigen Punkte, denen entnommenes beliebiges Punktquadrupel ein reelles Doppelverhältnis hat. — Eine Kette ersten Grades führen (1) und (2) in eine Kette ersten Grades über.

können nur diejenigen Punkte der transformierten Projektivität Doppelpunkte bzw. vertauschbare Punktpaare sein, deren Urbilder in der ursprünglichen Projektivität Doppelpunkte bzw. vertauschbare Punktpaare waren.

Definition. Die durch Projektivtransformation ineinander übertragbaren Projektivitäten nennen wir äquivalent.

Aus Satz 1.1 und aus der hinzugefügten Bemerkung folgt, daß wir alle Ketten ersten Grades, zweiten Grades bzw. dritten Grades in je eine beliebig gegebene Kette ersten, zweiten bzw. dritten Grades transformieren können.

Dies berücksichtigend nennen wir die durch die Punkten $0, 1, \infty$ gehende Kette ersten Grades $\mathcal{K}^1(0, 1, \infty)$ die Grundposition der Ketten ersten Grades, die Kette $\mathcal{K}^2(0, 1, \infty, i)$ die Grundposition der Ketten zweiten Grades, die Kette $\mathcal{K}^3(0, 1, \infty, i, j)$ die Grundposition der Ketten dritten Grades.

Bei unseren Untersuchungen wird es vorteilhaft sein, auch noch die folgende Sätze zu berücksichtigen:

Satz 1.4. Eine beliebige zur Q -Geometrie gehörige Projektivität (Antiprojektivität) involviert an jeder ihrer Doppelketten ersten Grades eine solche Verwandtschaft, die identisch mit der gewöhnlichen projektiven Geometrie der Geraden ist.

Satz 1.5. Eine beliebige zur Q -Geometrie gehörige Projektivität (Antiprojektivität) involviert an jeder ihrer Doppelketten zweiten Grades eine solche Verwandtschaft, die identisch mit der projektiven Geometrie der Komplexen Gerade ist.

Endlich weisen wir auf den konformen Charakter der Q -Geometrie hin.

Nach 1, 2 können wir die durch die Ketten ersten Grades von q eingeschlossenen Winkel deuten.

Definition. Der Winkel zweier durch einen Punkt P gehenden Ketten ersten Grades von q ist gleich dem Winkel unter welchem in M_4 die entsprechenden Kreise der beiden Ketten einander in dem P entsprechenden Punkt schneiden.

Die konforme Eigenschaft der Möbius-Geometrie des M_4 ist bekannt, und auf Grund des Übertragungsprinzips zwischen Q -Geometrie und Möbius-Geometrie gilt der

Satz 1.6. Seien \mathcal{K}_1^1 und \mathcal{K}_2^1 zwei durch einen Punkt P gehende Ketten ersten Grades von q , und es seien $\mathcal{K}_1^{1'}$ und $\mathcal{K}_2^{1'}$ die Entsprechenden der zwei Ketten für (1) bzw. für (2), und diese sollen P in P' überführen, dann ist der neben P liegende Winkel von \mathcal{K}_1^1 und \mathcal{K}_2^1 dem neben P' liegenden Winkel von $\mathcal{K}_1^{1'}$ und $\mathcal{K}_2^{1'}$ gleich.

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil beschäftigen wir uns mit den involutorischen Abbildungen der Q -Geometrie, im zweiten Teil aber mit den allgemeinen Projektivitäten und Antiprojektivitäten der Q -Geometrie.

2. Die zur Q -Geometrie gehörenden involutorischen Abbildungen

Nehmen wir von den Projektivitäten Π von (1), bzw. von den Antiprojektivitäten $\bar{\Pi}$ von (2) diejenigen, für welche

$$\Pi^2 = I \quad \text{bzw.} \quad \bar{\Pi}^2 = I \quad \text{gilt,}$$

wo I die Identität bedeutet, dann gelangen wir zu einer involutorischen Abbildung von q auf sich selbst. Wir nennen die aus den Projektivitäten gewonnenen involutorischen Abbildungen *Involutionen*, die aus den Antiprojektivitäten gewonnenen *Antiinversionen*.

Die Klassifizierung der involutorischen Abbildungen auf Grund der Zahl der Doppelpunkte.

a) Inversionen

1) Inversion mit zwei Doppelpunkten, *die harmonische Verwandtschaft*. Seine kanonische Gleichung ist $z' = -z$. Die zwei Doppelpunkte⁶⁾ sind jetzt 0 und ∞ . Zeichen: H .

Die entsprechenden Elemente von H trennen die Doppelpunkte harmonisch.

2) Inversion mit einer punktwisen Doppelkette. *Spiegelung auf eine Kette zweiten Grades*. Kanonische Gleichung $z' = -izi$. (Die Spiegelfläche ist jetzt $\mathcal{K}^2(0, 1, \infty, i)$.) Zeichen: $S_{\mathcal{K}^2}$.

b) Antiinversionen.

1) Antiinversion ohne Doppelpunkt, oder *elliptische Antiinversion*. Kanonische Gleichung: $z' = -\bar{z}^{-1}$. Zeichen: A_e .

2) Antiinversion mit einer punktwisen Doppelkette ersten Grades. *Spiegelung auf eine Kette ersten Grades oder Antiinversion erster Art*. Kanonische Gleichung $z' = \bar{z}$. (Der Spiegelkreis ist jetzt $\mathcal{K}^1(0, 1, \infty)$.) Zeichen: A_1 .

3) Antiinversion mit einer punktwisen Doppelkette dritten Grades. *Spiegelung auf eine Kette dritten Grades, oder Antiinversion zweiter Art*. Kanonische Gleichung: $z' = \bar{z}$. (Die Spiegelfläche ist jetzt $\mathcal{K}^3(0, 1, \infty, i, j)$.) Zeichen: A_{II} .

Die Darstellung der Quaternionengerade in vierdimensionalen euklidischen Räume R_4

Im Folgenden werden in erster Linie die nachstehenden Aufgaben in Verbindung mit dem involutorischen Abbildungen gelöst:

a) Die Konstruktion der entsprechenden Elemente von I_q , wenn die Doppelpunkte gegeben sind.

b) Die Konstruktion der Doppelpunkte, wenn I_q in allgemeiner Form gegeben ist, bzw. die Darstellung der entsprechenden Elementpaare in dem selben Fall.

Hier werden wir im allgemeinen konstruktive Lösungen angeben. Außer den theoretischen Lösungen werden in den meisten Fällen die Konstruktionen gezeigt.

Unsere Konstruktionen werden mit Hilfe der Darstellung des R_4 , welcher den M_4 aufspannt (S. 1. Abschnitt) durchführen. Hier wird die Maurinsche Abbildung benützt ([7]).

⁶⁾ Bei der Klassifizierung müssen wir beachten, daß wenn eine involutorische Abbildung von q einen Doppelpunkt hat, dann hat sie deren mindestens zwei. (S. Satz 1.4).

Maurin hat seiner Abbildung ein Descartes'sches orthogonales Koordinatensystem $O(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ verwendet und die drei durch ξ_0 gehenden Koordinatenebenen $K_i = [\xi_0, \xi_i]$ ($i=1, 2, 3$) als Bildebenen angewandt.

Die Darstellung eines Punktes A , dessen Descartes'sche Koordinaten $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sind, geschieht so, daß wir die senkrechte Projektion von A auf die Bildebenen bestimmen und so A drei Bilder A', A'', A''' zuordnen. (Vom Punkte A stellen wir auf die Bildebenen vollständig senkrechte Projektionsebenen und diese werden die entsprechenden Bilder des Punktes aus den Bildebenen ausscheiden.) Nach der Projektion drehen wir die drei Bildebenen um die Achse ξ_0 (kurz ξ) in irgendeine Bildebene hinein (die positiven Halbbildebenen werden immer auf die in Figur 1. gezeigte Seite der ξ geraten), dadurch werden die drei Bilder von A auf einer zur Achse ξ senkrechten Geraden Platz nehmen und die Ordner der Bilder werden $\varrho_1 = \alpha_1, \varrho_2 = \alpha_2, \varrho_3 = \alpha_3$ sein.

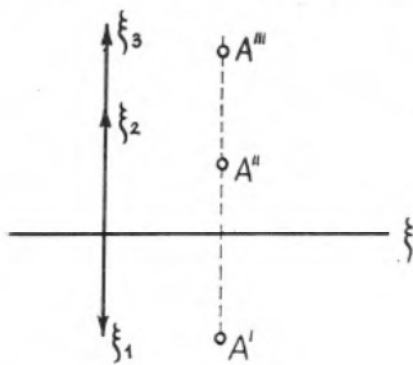


Fig. 1

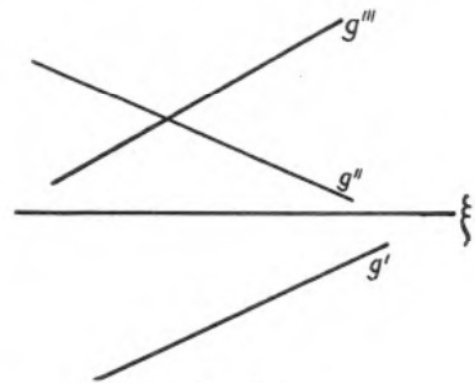


Fig. 2

Eine Gerade können wir mit drei perspektiven affinen Punktreihen g', g'', g''' abbilden (Fig. 2), eine Ebene mit ihren drei Spurpunkten auf den drei Bildebenen S_1, S_2, S_3 (Fig. 3, oder mit zwei schneidenden Geraden). Eine Hyperebene können wir unter anderem mit ihren drei einander in der Achse schneidenden Spurlinien s_1, s_2, s_3 darstellen. (Fig. 4.) (Wir werden die Bezeichnungen $||$ für Gerade, $[\]$ für Ebene und $\{ \}$ für Hyperebene anwenden.)

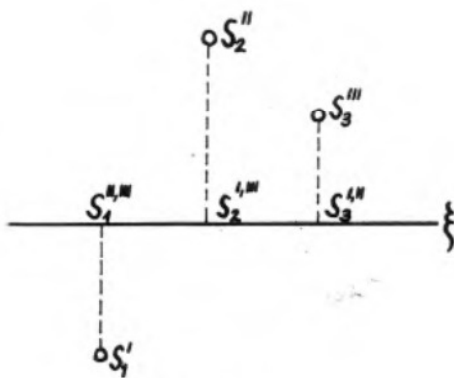


Fig. 3

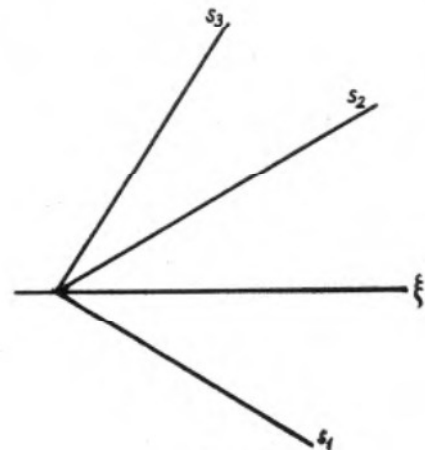


Fig. 4

Aus drei Bildebenen bestimmen je zwei eine Hilfshyperebene (einen dreidimensionalen Raum).

$$S_{12} = \{K_1 K_2\}, \quad S_{23} = \{K_2 K_3\}, \quad S_{13} = \{K_1 K_3\}$$

darin ist jede Konstruktion genau so durchführbar, wie in der Mongeschen Projektion. Deshalb werden die mit der Geraden q verbundenen Konstruktionen einfach sein, wenn wir sie in einer Hilfshyperebene ausführen können. Andererseits macht es die in diesem Abbildungssystem anwendbare Transformation und Relation ([5]) möglich, daß wir die Raumelemente von allgemeiner Lage in irgendwelche Hilfshyperebene tragen.

1) *Transformation.* Wir erhalten die auf die neue Achse ξ bezogenen Bilder eines Punktes, (Fig. 5) wenn wir aus dem verbleibenden Bild (die neue positive Hälfte der verbleibenden Bildebene zeigen wir mit ihrem neben die neue Achse geschriebenen Namen und daraus können wir auch das verbleibende Bild feststellen) auf die neue Achse eine Senkrechte stellen und darauf die zwei wegzulassenden Ordner abmessen, mit Rücksicht auf das Vorzeichen. Die neue Achse kann man z. B. auch durch A'' führen, dann wird A in die neue ${}_1S_{13}$ transformiert.

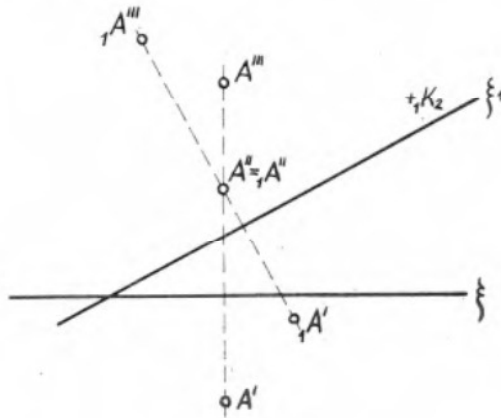


Fig. 5

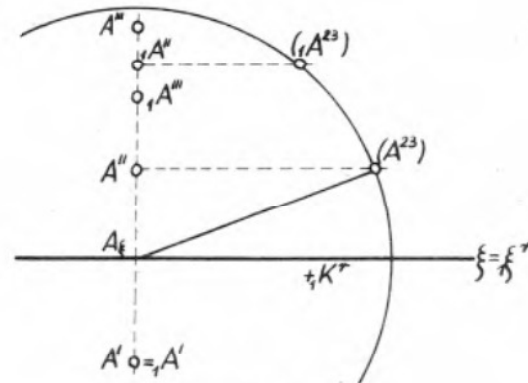


Fig. 6

2) *Rotation.* Bei einer Rotation bleibt die Achse und das eine Bild stehen, das Aufzeigen derselben geschieht ähnlich der Transformation (Fig. 6). Die Projektion des räumlichen Punktes auf der durch die nicht verbleibenden zwei Bildebenen bestimmten Hilfshyperebene bewegt sich während der Rotation auf einem Kreis. Der Radius dieses Kreises ist die Hypotenuse jenes rechtwinkligen Dreiecks, dessen zwei Katheten die zwei veränderlichen alten Ordner sind. Mit Hilfe dieses Kreises können wir die neuen zu einer beliebigen Lage des verdrehten Punktes gehörenden Ordner des Punktes feststellen. Die Ebene des die Drehung aufzeigenden Kreises ist eine Projektionsebene im Mongeschen Sinn und diese können wir in die Ebene der Zeichnung eindrehen.⁷⁾

⁷⁾ Diese Transformation und Rotation sind nichts anderes als das Drehen des R_1 um eine Ebene. Z. B. geschah das Drehen in Fig. 5 um die Ebene $[\xi_1 \xi_3]$ und in Fig. 6 um die $[\xi_0 \xi_1]$. Wie wir später sehen werden sind diese Drehungen in der Möbiusschen Kugeltransformation des M_4 und so auch in der Q -Geometrie erlaubte Transformationen, deshalb sind sie bei Ausführung der mit diesen Geometrien verbundenen Konstruktionen anwendbar.

Führen wir die Rotation so durch, daß einer der neuen Ordner des Punktes Null ist, so wird der Punkt in irgendeine Hilfsperebene geraten. Durch die Anwendung einer oder mehrerer Transformationen bzw. Rotationen können wir die Gerade, die Ebene, die Hyperebene auch in die Hilfsperebene führen.

Wir erwähnen noch, daß die Projektion einer auf die Hyperebene senkrechter Geraden auf eine beliebige Bildebene auf die entsprechende Spurlinie der Hyperebene senkrecht ist (Fig. 7. [5]).

Darstellung der Kette dritten Grades \mathcal{K}^3 . Entsprechende der \mathcal{K}^3 in dem M_4 ist die Hyperkugel \mathcal{K}^{3*} oder Hyperebene (von der Darstellung der Hyperebene haben wir schon gesprochen). Eine Hyperkugel können wir mit ihrem Mittelpunkt und mit ihrem Radius angeben: $\mathcal{K}^3(0, \varrho)$ (das *-Zeichen wird weggelassen). Die auf der Fig. 8 dargestellten Kreise mit Radius ϱ sind die scheinbaren Umrisse der $\mathcal{K}^{3,*}$)

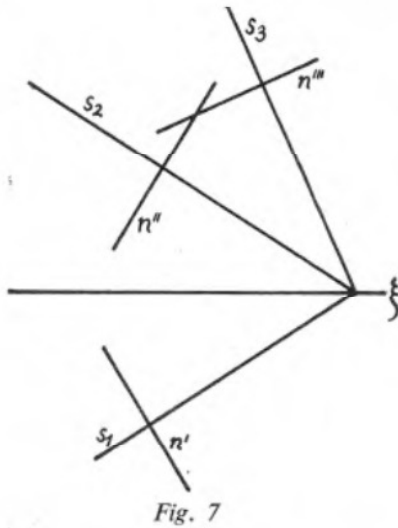


Fig. 7

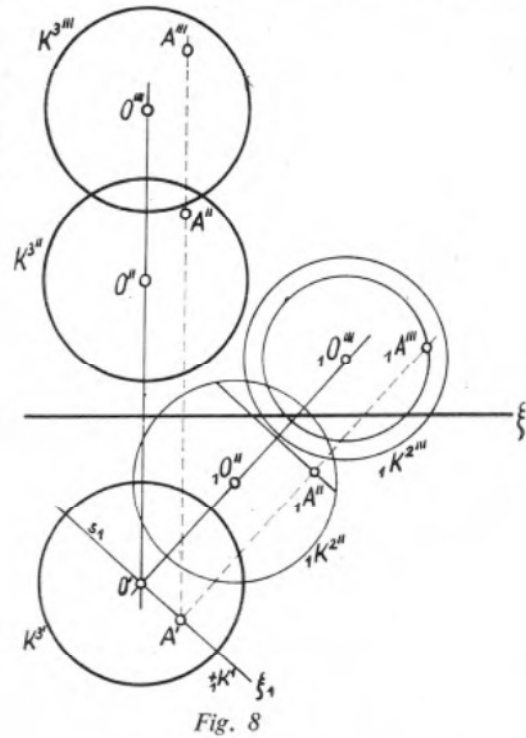


Fig. 8

Die Fig. 8 zeigt auch noch die Darstellung eines Punktes von \mathcal{K}^3 . Diese Konstruktion ist die Erweiterung der Darstellung des auf der Kugel liegenden Punktes auf die Hyperkugel. Die zwei Bilder des Punktes (z. B. A' und A'') können wir innerhalb der entsprechenden Umrisse nach Belieben annehmen. Die Konstruktion von A'' kann durch Transformation geschehen. Zuerst führen wir durch den Mittelpunkt von \mathcal{K}^3 und durch die zu den einen bekannten Bild von A , z. B. zu A' gehörende erste Projektionsebene eine Hyperebene. Wir wählen die erste Spurlinie s_1 dieser Hyperebene zur Transformationsachse ${}_1\xi$. Dann ist unsere Hyperebene weil auf K_1 senkrecht, im neuen Bildebenen-System die Hilfsperebene $\{{}_1S_{23}\}$. Diese schneidet aus \mathcal{K}^3 eine Kugel \mathcal{K}^2 aus, welche wir mit ihren zwei Umrisßen dargestellt haben. Der Mittelpunkt derselben ist ${}_1O''$ bzw. ${}_1O'''$ und ihr Radius ist $\varrho_1 = \varrho$. Unser gesuchter Punkt A liegt auf \mathcal{K}^2 und seine Darstellung kann mit dem Mongenschen Verfahren geschehen. Durch Zurücktransformation erhalten wir das Bild.

*) Statt \mathcal{K} schreibt man K in den Figuren.

Konstruktion bezüglich von Ketten symmetrischer Punkte

Definition. Wir verstehen unter dem symmetrischen Punkt oder Spiegelbild von P bezüglich Ketten verschiedener Dimension denjenigen Punkt \hat{P} im welchen die durch P gehenden und die spiegelnden Ketten im zwei Punkten senkrecht schneidenden Ketten ersten Grades außer P sich schneiden.

Man kann die Eindeutigkeit von \hat{P} leicht einsehen. Die Konstruktion der symmetrischen Punkte bezüglich durch den Punkt ∞ gehenden Ketten ist nicht schwer, deshalb werden wir uns damit nicht beschäftigen.

a) *Spiegelung bezüglich einer Kette ersten Grades.* In diesem Fall soll man im Wesentlichen zu einem Punkt P das Spiegelbild \hat{P} bezüglich eines Kreises konstruieren. Dies geschieht — wie bekannt so — daß wir durch P und \mathcal{K}^1 eine Kugel \mathcal{K}^2 führen⁸⁾ und den Pol P_p der Ebene von \mathcal{K}^1 , bezüglich \mathcal{K}^2 herstellen. Dann

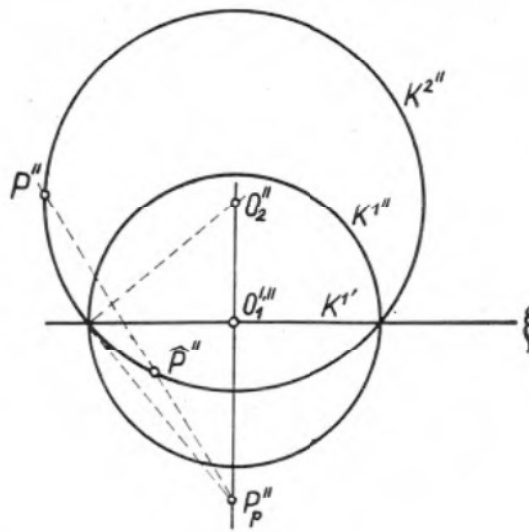


Fig. 9

wird den gesuchten \hat{P} , die Gerade $|PP_p|$ aus \mathcal{K}^2 schneiden. Die Konstruktion haben wir für den Fall durchgeführt in welchem \mathcal{K}^1 auf K_1 , ihr Mittelpunkt O_1 auf ξ und P auf \mathcal{K}_2 liegt (Fig. 9).

b) *Spiegelung bezüglich einer Kette zweiten Grades.* Hier wird im Wesentlichen das Spiegelbild \hat{P} des P bezüglich einer Kugel zu konstruieren sein, und des geschieht ähnlich dem vorangehenden so, daß wir durch P und \mathcal{K}^2 eine Hyperkugel \mathcal{K}^3 führen und den auf \mathcal{K}^3 bezogenen Pol P_p der Hyperebene der \mathcal{K}^2 bestimmen. Dann wird $|PP_p|$ aus \mathcal{K}^3 den \hat{P} ausschneiden. Die Konstruktion haben wir für den Fall ausgeführt in welchem \mathcal{K}^2 in der Hilfsperebene $\{S_{12}\}$ ist und ihr Mittelpunkt O_2 auf ξ , P aber auf K_3 liegt. Die $\mathcal{K}^{3''}$ und der $|PP_p|$ sind in K_3 und so kann $\hat{P} = \hat{P}''$ nach Fig. 10. unmittelbar bestimmt werden.

⁸⁾ Hier und weiterhin zeigen wir zumeist wegen der besseren Übersicht nur solche Bilder von Punkten welche nicht auf ξ liegen, und wir stellen nur einen der Umriße einer Kugel dar.

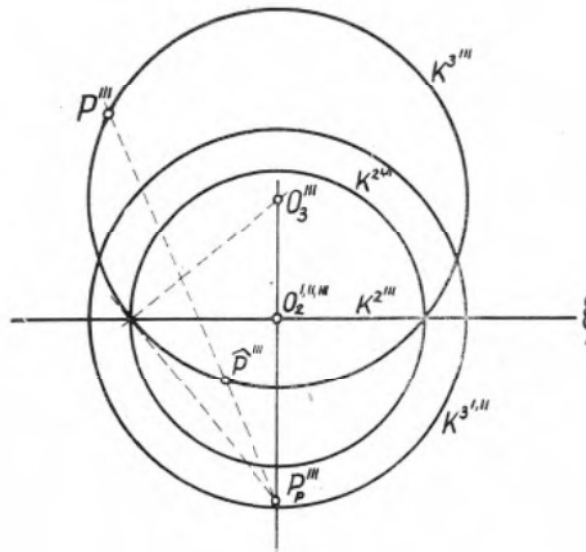


Fig. 10

c) *Spiegelung bezüglich einer Kette dritten Grades.* Konstruieren wir den symmetrischen Punkt \hat{P} des P bezüglich der Kugel \mathcal{K}^3 . Bei der Lösung nehmen wir in Betracht, daß die durch P, \hat{P} gehenden und die \mathcal{K}^3 senkrecht schneidenden Ketten ersten Grades die \mathcal{K}^3 in solchen Punkten A und B schneiden, für welche $(P\hat{P}AB) = -1$ ist. Demzufolge ist die Konstruktion sehr einfach. Die Konstruktion

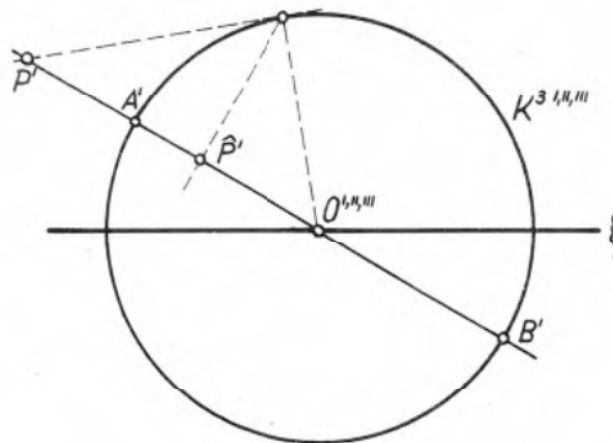


Fig. 11

haben wir für den Fall ausgeführt in welchem der Mittelpunkt O der \mathcal{K}^3 auf ξ und der Punkt P auf K_1 liegt. (Die $|PO|$ schneidet die \mathcal{K}^3 senkrecht, Fig. 11.).

Wir bemerken, daß man in allen drei Fällen auch die allgemeinste Lage in die obige spezielle Lage überführen kann.

Vollständig senkrechte Ketten.

Die Konstruktion vollständig senkrechter Ketten ist auf die Konstruktion der vollständig senkrechten Kugeln zurückführbar. Die Deutung derselben ist die folgende:

Definition. Im M_4 sind die zwei Kugeln \mathcal{K}^2 und $\hat{\mathcal{K}}^2$ dann aufeinander vollständig senkrecht, wenn sie nur zwei verschiedene Schnittpunkte P_1 und P_2 haben, und wenn ein beliebiger durch die Punkte P_1 und P_2 gehender Kreis der einen auf jeden durch diese Punkte gehenden Kreis der anderen senkrecht ist und umgekehrt.

Aus der Definition folgt, daß die vollständige Orthogonalität der Kugeln ein gegenseitiger Begriff ist und, daß insofern die Kugeln nicht speziell sind, ihre Hyperebenen verschieden sind, weil sie nur zwei gemeinsame Punkte haben.

Im Laufe der Konstruktion wird die Anwendung der folgenden beiden einfachen Sätze notwendig sein.

Satz 2.1. *Im M_4 werden die zwei nicht spezielle Kugeln \mathcal{K}^2 und $\hat{\mathcal{K}}^2$ einander in ihren zwei verschiedenen Punkten P_1 und P_2 dann und nur dann vollständig senkrecht schneiden, wenn ihre zu ihren zwei Schnittpunkten P_1 und P_2 gehörigen Tangentenebenen auf einander vollständig senkrecht sind.*

BEWEIS. Nehmen wir vorläufig an, daß es solche Kugeln gibt. Wenn \mathcal{K}^2 und $\hat{\mathcal{K}}^2$ in ihren Punkten P_1 und P_2 vollständig senkrecht sind, dann müssen wegen der Bedingung in der Definition bezüglich der durch diese Punkte gehenden Kreise, z. B. die Geraden, welche auf die zu ihrem Punkt P_1 gehörigen Tangente der \mathcal{K}^2 senkrecht sind und durch P_1 gehen, durch ihren Punkt P_1 gehende Tangenten der $\hat{\mathcal{K}}^2$ sein. Und diese sind Geraden derjenigen Ebene, welche auf die zu ihrem Punkte P_1 gehörigen Tangentenebene der \mathcal{K}^2 vollständig senkrecht ist; ferner sind die Rollen dieser beiden Ebenen vertauschbar. Dasselbe bezieht sich auf den Punkt P_2 , und so haben wir die Notwendigkeit des Satzes bewiesen. — Andererseits, wenn die im Satz enthaltenen Bedingungen gelten, dann ist leicht einzusehen, daß die beiden Kugeln in ihren Punkten P_1 und P_2 aufeinander vollständig senkrecht sind und so ist die Bedingung auch hinreichend.

Satz 2.2. *Auf eine nicht spezielle Kugel können wir in ihren zwei verschiedenen und nicht diametralen Punkten P_1 und P_2 eine und nur eine vollständig senkrechte Kugel $\hat{\mathcal{K}}^2$ stellen. Ferner sind in diesem Falle die Hyperebenen der vollständig senkrechten Kugeln aufeinander senkrecht und die zwei Mittelpunkte und die zwei Schnittpunkte der beiden Kugeln liegen auf einer Ebene.*

BEWEIS. Weil die zu P_1 und zu P_2 gehörigen Tangentenebenen der einen Kugel z. B. der \mathcal{K}^2 in einer Hyperebene liegen, deshalb liegen auch die zwei in diesen Punkten auf die entsprechenden Tangentenebenen senkrechten Ebenen in einer Hyperebene. Daraus und aus $\overline{OP_1} = \overline{OP_2}$ (wo O Mittelpunkt der \mathcal{K}^2 ist) folgt schon, daß es eine und nur eine solche $\hat{\mathcal{K}}^2$ gibt, welche die beiden auf diese Tangentenebenen senkrechten Ebenen in den Punkten P_1 und P_2 berührt. Damit haben wir die Existenz und die Eindeutigkeit der $\hat{\mathcal{K}}^2$ bewiesen. Aus der Orthogonalität der entsprechenden Tangentenebenen aufeinander folgt, daß auch die Hyperebenen der beiden Kugeln aufeinander senkrecht sind.

Nehmen wir noch in Betracht, daß die zum Punkt P_1 bzw. P_2 gehörigen Radii der \mathcal{K}^2 zu den in ihren Punkten P_1 bzw. P_2 befindlichen Tangentenebenen der $\hat{\mathcal{K}}^2$ gehören, und so dieselben Tangenten der $\hat{\mathcal{K}}^2$ sind. Dann aber ist die gemeinsame Ebene der Hyperebenen der Kugeln \mathcal{K}^2 und $\hat{\mathcal{K}}^2$ die Ebene $[OP_1P_2]$. Da die vollständige Orthogonalität der Kugeln eine gegenseitige Eigenschaft ist, liegt auch der Mittelpunkt \hat{O} der $\hat{\mathcal{K}}^2$ auf der Ebene $[OP_1P_2]$.

Bemerkung. Aus der Definition der vollständig senkrechten Kugeln folgt, daß wenn die eine Kugel z. B. \mathcal{K}^2 eine spezielle Ebene ist, und P_1 und P_2 zwei verschiedenen im Endlichen liegenden Punkte sind, dann ist die auf \mathcal{K}^2 vollständig senkrechte $\hat{\mathcal{K}}^2$ jene Kugel, welche die auf die Ebene der \mathcal{K}^2 in den Punkten P_1 und P_2 vollständig senkrechten Ebenen in den Punkten P_1 und P_2 berührt. Da in diesem Falle die senkrechten Ebenen parallel sind, sind die Punkte P_1 und P_2 diametrale Punkte der $\hat{\mathcal{K}}^2$. Damit haben wir auch den Fall der im Satz 2.2 ausgeschlossenen diametralen Punkte erledigt, weil die vollständig senkrechte Beziehung der Kugeln ein gegenseitiger Begriff ist.

Ist aber einer der zwei verschiedenen Punkten, z. B. P_2 , ein unendlichferner Punkt des M_4 , so ist $\hat{\mathcal{K}}^2$ die zu ihrem Punkte P_1 gehörige vollständig senkrechte Ebene der Ebene \mathcal{K}^2 .

Nunmehr lösen wir die folgende *Aufgabe*: Gegeben sind die Kugel \mathcal{K}^2 des M_4 und deren zwei verschiedene Punkten P_1 und P_2 . Stellen wir jene Kugel $\hat{\mathcal{K}}^2$ dar, welche die \mathcal{K}^2 in den Punkten P_1 und P_2 vollständig senkrecht schneidet.

Sei \mathcal{K}^2 eine nicht spezielle Kugel, ihre Hyperebene sei $\{S_{12}\}$, ihr Mittelpunkt O soll auf ξ , und ihre Punkte P_1 und P_2 sollen auf K_2 liegen. (Fig. 12. Dieses Spezial-

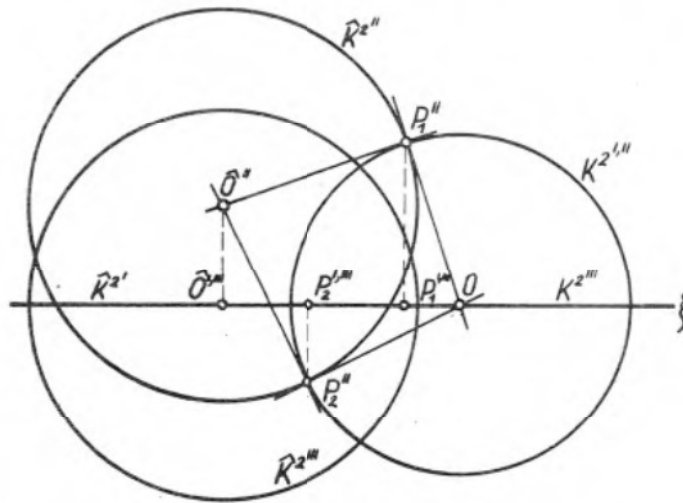


Fig. 12

fall läßt sich mit der geschilderten Transformation und mit einer Rotation immer erreichen.) Bei der gegenwärtigen Lage der \mathcal{K}^2 fallen deren erster und zweiter scheinbarer Umriß zusammen, ihr drittes Bild aber liegt auf der Achse ξ , und die zweiten Bilder der Punkte P_1 und P_2 liegen auf $\mathcal{K}^{2''}$.

Nehmen wir an, daß die Punkte P_1 und P_2 nicht diametrale Punkte der \mathcal{K}^2 sind, dann ist auf Grund des Satzes 2.2 die Hyperebene der $\hat{\mathcal{K}}^2$ die $\{S_{23}\}$ und so ist die gemeinsame Ebene der Hyperebenen der zwei Kugeln die zweite Bildebene. Diese schneidet aus \mathcal{K}^2 dessen zweiten scheinbaren Umriß $\mathcal{K}^{2''}$, aus $\hat{\mathcal{K}}^2$ aber denjenigen Kreis $\hat{\mathcal{K}}^{2''}$ aus, welcher den $\mathcal{K}^{2''}$ in den Punkten P_1 und P_2 senkrecht schneidet. Weiterhin ist nach diesem Satz der Mittelpunkt \hat{O}'' der $\hat{\mathcal{K}}^{2''}$ auch Mittelpunkt der $\hat{\mathcal{K}}^2$. (Die zwei anderen Bilder des \hat{O} liegen auf der Achse ζ .) Weil die Hyperebene der $\hat{\mathcal{K}}^2$ die $\{S_{23}\}$ ist, darum ist der zweite scheinbare Umriß der $\hat{\mathcal{K}}^2$ $\hat{\mathcal{K}}^{2''}$, ihr erstes Bild aber ist auf der Achse.

Falls P_1 und P_2 diametrale Punkte von \mathcal{K}^2 sind, geschieht die Konstruktion nach der vorigen Bemerkung.

Auf Grund der Bemerkung ist $\hat{\mathcal{K}}^2$ auch dann leicht zu konstruieren, wenn \mathcal{K}^2 eine (spezielle) Ebene, oder P_2 ein unendlichferner Punkt des M_4 ist.

Konstruktionen in Verbindung mit den involutorischen Abbildungen von q

a) Involutionen

Satz 2.3. Die harmonische Verwandtschaft H und die auf die Kette zweiten Grades bezügliche Spiegelung $S_{\mathcal{K}^2}$ werden durch zwei Punktpaare (A, \hat{A}) und (B, \hat{B}) , welche nicht auf einer Kette ersten Grades liegen, eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Den Satz werden wir auf konstruktivem Wege beweisen. Das werden wir in zwei Schritten verwirklichen. Einerseits zeigen wir, wie man in diesem Falle die doppelten Elemente bestimmen kann, ferner werden wir ein Verfahren für die Konstruktion der entsprechenden Elemente im Falle der Kenntnis der Doppelpunkte angeben.

Aus der Definition der involutorischen Abbildung I_q folgt, daß die Entsprechende der $\mathcal{K}^2(A, \hat{A}, B, \hat{B})$ neben I_q sie selbst ist, und darauf I_q eine involutorische Abbildung $I_{\mathcal{K}^2}$ involviert. Aus der projektiven Geometrie der Komplexgeraden (s. Satz 1.5) ist bekannt, daß $I_{\mathcal{K}^2}$ im Falle ihrer zwei gegebenen entsprechenden Punktpaare, welche nicht auf einer \mathcal{K}^1 liegen, zwei Doppelpunkte M und N hat, ferner, daß $I_{\mathcal{K}^2}$ eine gewöhnliche Involution ist. M und N sind natürlich auch Doppelpunkte von I_q .

Die Konstruktion der Doppelpunkte M und N . Nehmen wir zuerst an, daß die $\mathcal{K}^2(A, \hat{A}, B, \hat{B})$ speziell ist, dann ist \mathcal{K}^2 im M_4 eine Ebene. In diesem Falle können wir M und N auf Grund folgender Überlegung konstruieren⁹⁾. Weil die involutorische Abbildung I_q konform ist, (s. Satz 1.6) darum geht der Winkelhalbierende Kreis $\mathcal{K}_{h_1}^1$ der Kreise $\mathcal{K}^1(A, \hat{A}, B)$ und $\mathcal{K}^1(\hat{A}, A, \hat{B})$, welcher B und \hat{B} trennt (Fig. 13.) und der Winkelhalbierende Kreis $\mathcal{K}_{h_2}^1$ der $\mathcal{K}^1(A, B, \hat{B})$ und $\mathcal{K}^1(\hat{A}\hat{B}\hat{B})$ welcher A und \hat{A} trennt, bei der Involution mit umgekehrter Richtung in sich selbst über. Darum sind die zwei Schnittpunkte der Kreise $\mathcal{K}_{h_1}^1$ und $\mathcal{K}_{h_2}^1$ die Punkte M und N , diese sind nach den obigen immer reell.

⁹⁾ S. *Mat. és Fiz. Lapok* Bd L. (Budapest) 1943, S. 372. (Ungarisch.)

Das obige Verfahren können wir auch dann anwenden, wenn die Punktpaare allgemeiner Lage auf einer wirklichen \mathcal{H}^2 liegen. Die zwei Punktpaare werden nämlich auch auf dieser \mathcal{H}^2 eine $I_{\mathcal{X}^2}$ bestimmen, worauf die oben gesagten vollständige Gültigkeit haben. Auch bei Durchführung der Konstruktion ist der einzige Unthied, daß die obige Konstruktion nicht auf einer Ebene, sondern auf einer wirklichen Kugel geschieht.

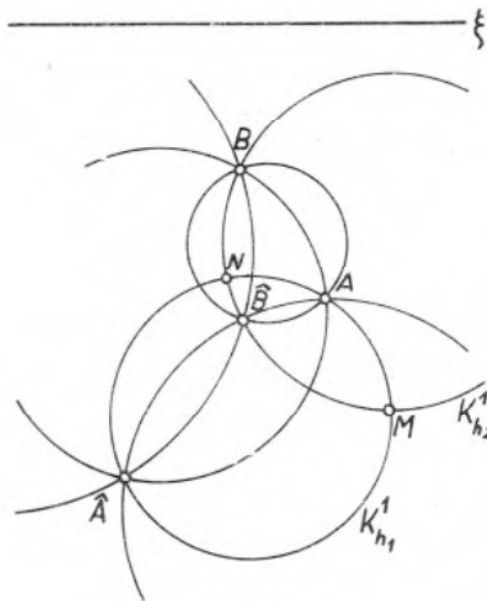


Fig. 13

Man kann leicht einsehen, daß (A, \hat{A}) und (B, \hat{B}) die entsprechenden Punktpaare von $H(M, N)$ bzw. von $S_{\mathcal{X}^2}$ sind.

Die Konstruktion der entsprechenden Punktpaare, wenn die Doppелеlemente bekannt sind. Im Falle von $H(M, N)$ soll man zu einem beliebigen P einen solchen \hat{P} konstruieren, für welchen $(M, N, P, \hat{P}) = -1$ ist, und wo diese vier Punkte auf einem \mathcal{H}^1 liegen (man kann \mathcal{H}^1 in K_1 transformieren). Im Falle von $S_{\mathcal{X}_f^2}$ ist die Konstruktion nichts anderes als Konstruktion symmetrischer Punkte bezüglich \mathcal{H}_f^2 , womit wir uns im Fig. 10 schon beschäftigt haben. Damit ist der konstruktive Beweis des Satzes beendet.

b) Antiinvolutionen

Satz 2.4. Die elliptische Antiinvolution A_e wird durch ihre zwei, auf einer Kette ersten Grades liegenden und einander trennenden Punktpaare $(A, \hat{A}), (B, \hat{B})$ eindeutig bestimmt. Die Antiinvolution zweiter Art A_{II} aber wird durch ihre zwei auf einer Kette ersten Grades liegenden und einander nicht trennenden Punktpaare $(A, \hat{A}), (B, \hat{B})$ eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Auch diesen Satz werden wir auf konstruktivem Wege beweisen, so nämlich, daß wir zeigen, wie es möglich ist, die entsprechenden Punktpaare aus den zwei gegebenen Punktpaaren zu konstruieren. Die Konstruktionen stellen wir im M_4 dar.

Es folgt aus der kanonischen Gleichung von A_e ($z' = -\bar{z}^{-1}$), daß zwei beliebige entsprechenden Punktpaare der A_e auf einer Kette ersten Grades liegen und ein-

Durchführung der Konstruktion ist der einzige Unthied, daß die obige Konstruktion nicht auf einer Ebene, sondern auf einer wirklichen Kugel geschieht.

Bei den effektiven Konstruktionen transformieren wir die Punkte A, \hat{A}, B, \hat{B} im ersten Fall auf K_1 , im zweiten Fall in $\{S_{12}\}$. Die Konstruktionen können wir in der Ebene bzw. durch das Mongesche Verfahren durchführen.

Nach Konstruktion der Doppelpunkte M und N stehen sämtliche doppelten Elemente von H zur Verfügung, während wir im Falle $S_{\mathcal{X}^2}$ die punktweise Doppelkette zweiten Grades der $S_{\mathcal{X}^2}$ so gewinnen, daß wir auf $\mathcal{H}^2(A, \hat{A}, B, \hat{B})$ in den Punkten M und N eine vollständig senkrecht \mathcal{H}_f^2 stellen. Nämlich ist eine doppelte Kette zweiten Grades z. B. $\mathcal{H}^2(A, \hat{A}, B, \hat{B})$ von $S_{\mathcal{X}^2}$ vollständig senkrecht auf \mathcal{H}_f^2 .

ander trennen. Daraus folgt, daß die verbindende Gerade der zwei auf einer nicht speziellen Kette ersten Grades liegenden Punktpaare durch den einzigen Punkt C geht. Nennen wir diesen Punkt das Zentrum von A_e . (Es folgt, daß der Entsprechende des Punktes ∞ der C ist und wenn die die zwei Punktpaare verbindende Kette ersten Grades speziell ist, so wird dieselbe durch C gehen.)

Auf Grund der obigen ist die Konstruktion der entsprechenden Punktpaare sehr einfach. Wenn die $\mathcal{K}_1^1(A, \hat{A}, B, \hat{B})$ nicht speziell ist, dann schneidet den Entsprechenden \hat{P} des P die Gerade $|PC|$ aus der $\mathcal{K}^1(A\hat{A}P)$. Es ist leicht einzusehen, daß wir zu demselben \hat{P} gekommen wären, wenn wir zu der Konstruktion die $\mathcal{K}^1(B\hat{B}P)$ angewendet hätten. Und wenn \mathcal{K}_1^1 speziell (eine Gerade) ist, auch dann können wir dasselbe Verfahren anwenden, ausgenommen den Fall, in welchem P auf der speziellen \mathcal{K}_1^1 liegt. In diesem Falle geschieht die Konstruktion so, wie in der reellen projektiven Geometrie die Konstruktion der entsprechenden Elemente der auf der Geraden befindlichen Involution. Von der Konstruktion haben wir keine Figur verfertigt, weil deren Ausführung sehr einfach ist, besonders wenn die zum Punkte P gehörende Kette ersten Grades \mathcal{K}^1 auf irgendeiner Bildebene liegt, oder wir sie in dieselbe transformieren.

In Verbindung mit A_{II} der Spiegelung auf die Kette dritten Grades, ist leicht einzusehen, daß ihre zwei beliebigen entsprechenden Punktpaare auf einer Kette ersten Grades liegen. Daraus aber folgt auch hier, daß (im M_4) die verbindenden Geraden der entsprechenden Punktpaare durch einen Punkt C gehen. Nennen wir C des Centrum der A_{II} . Weil weiterhin eine durch ein entsprechendes Punktpaar der A_{II} gehende Kette ersten Grades in der A_{II} eine Doppelkette ist, und die \mathcal{K}_f^3 in zwei Doppelpunkten der A_{II} schneidet, dürfen die entsprechenden Punktpaare einander nicht trennen. (Auf der Doppelkette ersten Grades entsteht eine gewöhnliche Involution.) Dann aber geschieht die Konstruktion der \mathcal{K}_f^3 so, daß wir mit Hilfe der zwei entsprechenden Punktpaare (A, \hat{A}) und (B, \hat{B}) das Zentrum C der A_{II} herstellen, und von C aus Tangenten zu $\mathcal{K}^1(A, \hat{A}, B, \hat{B})$ ziehen. (Diese Tangenten sind bei der gegenwärtigen Lage der gegebenen Punktpaare immer reell.) Das Zentrum C wird Zentrum der \mathcal{K}_f^3 sein und der Radius derselben wird gleich der Länge der Tangente sein. A_{II} aber wird durch \mathcal{K}_f^3 eindeutig bestimmt, womit auch der zweite Teil unseres Satzes bewiesen ist.

Der Beweis des Satzes 2.4 gibt auch für die Konstruktion der doppelten Elemente und entsprechenden Elemente der A_{II} ein leicht ausführbares Verfahren an. (S. Fig. 11.) Diese Konstruktion ist sehr einfach dann, wenn wir die Punktpaare (A, \hat{A}) und (B, \hat{B}) in irgendeiner Bildebene aufnehmen.

Die Darstellung der Konstruktion lassen wir beiseite. Wir wollen nur noch bemerken, daß wir die Konstruktion der entsprechenden Punktpaare auch ohne \mathcal{K}_f^3 ausführen können, wenn wir die für A_e beschriebene entsprechende Konstruktion verwenden.

Die Antiinvolution ersten Grades A_1

Satz 2.5. Die Antiinvolution ersten Grades A_1 wird durch die drei entsprechenden Punktpaare (A, \hat{A}) , (B, \hat{B}) und (C, \hat{C}) bestimmt. Von diesen liegen die zwei ersten Punktpaare nicht auf einer Kette ersten Grades. Die A_1 bestimmt auf $\mathcal{K}_d^2(A, \hat{A}, B, \hat{B})$ eine $I_{\mathcal{K}^2}$ mit Doppelpunkten M und N (s. Satz 1.5). Das (C, \hat{C}) ist das Punktpaar einer solchen \mathcal{K}^2 , welche auf \mathcal{K}_d^2 vollständig senkrecht in dem Punkten M und N ist und noch $(MN\hat{C}\hat{C}) = -1$ gilt.

BEWEIS. Aus der kanonischen Gleichung von A_1 ($z' = \bar{z}$) folgt, daß die punktweise Doppelkette \mathcal{K}_f^1 von A_1 eine solche Kette der \mathcal{K}^2 sein kann, welche durch M und N geht. Die Auswahl von \mathcal{K}_f^1 geschieht so, daß wir durch M und N solche Ketten von \mathcal{K}^2 führen, für welche C und \hat{C} Spiegelbildpaare sind.

Die Konstruktion von M , N und der vollständig senkrechten \mathcal{K}^2 haben wir schon gezeigt. Die Konstruktion von \mathcal{K}_f^1 wird besonders einfach, wenn $\mathcal{K}_d^2 = K_1$ und $M=0$ und $N=\infty$ gelten. (Dies kann man mit mehreren Transformationen erreichen.)

In Kenntnis von \mathcal{K}_f^1 kann man die Konstruktion der entsprechenden Elemente von A_1 nach Fig. 9 durchführen.

Bemerkung: Man kann einsehen daß die Sätze, welchen wir im M_4 beweisen, sich auch aus den Axiomen der Q -Geometrie herleiten lassen.

Literatur

- [1] G. ANCOCHEA, Le Théorème de von Staudt en géométrie projective quaternionienne. *J. Reine Angew. Math.* **184** (1942), 193—198.
- [2] E. CARTAN, Leçons sur la géométrie projective complexe, *Paris*, 1931.
- [3] J. BILO, Onderzoekingen betreffende de meetkundige grondslagen van de projectieve quaternionmeetkunde, *Brussel*, (1949).
- [4] J. BILO, Conditions for the equivalence of pointsets in quaternion projective geometry, *Simon Stevin* **28** (1951), 140—145.
- [5] L. GYARMATHI, A négydimenziós lineáris tér metrikus feladatainak konstruktív megoldása a Maurin-féle leképezés alapján. *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei*, (1952), 653—664.
- [6] A. KOLMOGOROFF, Zur Begründung der projektiven Geometrie, *Ann. of Math. (2)* **33** (1932), 175—176.
- [7] J. MAURIN, Géométrie descriptive à quatre dimensions. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **225** (1947), 560—562.
- [8] P. LAURI, Abbildung der Lie-schen Kugelgeometrie auf eine höhere Komplexe Gerade. *Academia Scient. Fennica (Suomalainen Tiedeakatemia) Ser. A. I. Math.-Phys.* **4** (1941), ebenda **16**, **21**, **32**.
- [9] E. STUDY, Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. I. *Math. Z.* **18** (1923), 55—86., II. ebenda 201—229. III. **21** (1924), 45—71, IV. ebenda 174—194.
- [10] F. N. COLE, On Rotations in Space of Four Dimensions. *Amer. J. Math.* **12** (1890), 191—210.
- [11] S. WACHS, Essai sur la géométrie projective quaternionienne. *Académie Royale de Belgique, Classe des sciences, Mémoires in 8°*, Tome XV (1936), Fasc. 6, Bruxelles.
- [12] Enzyklopdädie der mathematischen Wissenschaften, III. 2 2a 784.
- [13] L. PONTRJAGIN, Über stetige algebraische Körper. *Ann. of Math.* **33** (1932), 163—174.

(Eingegangen am 12. September, 1973.)