

Die einheitliche Lösung der Maßaufgaben der Axonometrie mit Hilfe des Eckhartschen Einschneideverfahrens

Von J. SZABÓ (Debrecen)

Herrn Professor A. Rapcsák zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

In dieser Arbeit verstehen wir unter dem Begriff der axonometrischen Abbildung nach MÜLLER—KRUPPA [5], ECKHART [2], STIEFEL [7] eine degenierte affine Abbildung des räumlichen Gegenstands auf eine Ebene. Diese Axonometrie des Gegenstands ist immer affin zu einer von seinen Normalprojektionen, und im dreidimensionalen Raum ist auch der Satz von Pohlke gültig. In jeder Axonometrie — orthogonaler und schiefer — sind die Lösungen der Lagenaufgaben einheitlich und immer im axonometrischen Bild durchgeführt. Die Lösungsmethoden der Maßaufgaben sind sehr verschieden. Es ist möglich, die Winkelaufgaben aus den inneren Verhältnissen der Axonometrie in der axonometrischen Bildebene einheitlich zu lösen ([4]. S. 262—266). Die Lösungen der Abstandsaufgaben werden auf ganz verschiedene Weise immer auf die Mongesche Projektion zurückgeführt. ([3] S. 46; [4]. S. 266—268).

In dieser Arbeit werden wir eine einheitliche Methode für die Lösung der Maßaufgaben der Axonometrie geben. Im Jahre 1937 hat L. Eckhart ([2]) eine neue Methode gefunden, verschiedene axonometrische Bilder zu konstruieren. Dieses Verfahren hat viele praktische Seiten und gewinnt jetzt fast in jedem Lehrbuch der darstellenden Geometrie Platz. Nach Eckhart haben sich viele Fachmänner mit dem Einschneideverfahren von diesem teils theoretischen teils praktischen Standpunkt aus beschäftigt. Eine der ergiebigsten Arbeiten ist von E. J. NYSTRÖM [6], der insbesondere die praktischen Anwendungen der Eckhart-Methode untersucht und auch einige fundamentale Sätze gefunden hat. Diese sind in 33 Punkten zusammengefaßt. Seine Untersuchung ist synthetisch. Auf dem analytischen Weg haben u. a. O. TOMMI [8] und L. DRS [1] Ergebnisse gefunden.

In der bisherigen Literatur führen die Untersuchungen von den Mongeschen Projektionen zur Axonometrie. In dieser Arbeit wird eine umgekehrte Methode des Einschneideverfahrens gezeigt und dadurch eine einfache und für jede Axonometrie einheitliche Lösung der metrischen Aufgaben gegeben. Gemäß der Definition der Axonometrie gibt es immer einen selbstverständlichen Weg zur Lösung der metrischen Aufgabe. Dieses Inversverfahren ist aber nicht besonder praktisch, weil die Konstruktionen zwischen der Bildebene der Axonometrie und der räumlichen Konfiguration oft viele Messungen enthalten. Unsere Konstruktion wird durch die Umkehrung der Eckhart-Methode durchgeführt, was wir im folgenden Satz ausdrücken können.

Satz. Jedes axonometrische Bild des Gegenstands **K** läßt sich durch Umkehrung der Eckhart-Methode, mit je einer Vergrößerung und einer Drehung in der Ebene der Axonometrie auf die Mongeschen Projektionen des Gegenstands **K** zurückführen.

BEWEIS. Der Beweis ist konstruktiv. Wir zeigen, daß wir die Mongeschen Projektionen des Gegenstands **K** aus seinem axonometrischen Bild durch die genannten Transformationen herstellen können. Es sei das Objekt **K** in einem ihm angepaßten kartesischen Achsenkreuz (O, x, y, z) eingebettet. (O^S, x^S, y^S, z^S) ist die Bildfigur des Achsenkreuzes. Sei P ein beliebiger Punkt von **K** und P^S sein axonometrisches Bild. Es sei noch die räumliche Einheitsstrecke e gegeben. Wenn x, y, z die Koordinaten des Punktes P sind, und die axonometrischen Einheitsstrecken mit $O^S E_x^S = u, O^S E_y^S = v, O^S E_z^S = w$ bezeichnet werden, so sind die axonometrischen Koordinaten von P^S : $x^S = ux = O^S P_x^S$; $y^S = vy = O^S P_y^S$; $z^S = wz = O^S P_z^S$. Also sind für die Teilverhältnisse die folgenden Gleichungen

$$(P_x E_x O) = (P_x^S E_x^S O^S); \quad (P_y E_y O) = (P_y^S E_y^S O^S); \quad (P_z E_z O) = (P_z^S E_z^S O^S)$$

gültig.

Wir konstruieren zur Axonometrie des Objekts **K** solche Mongeschen Projektionen **K'** und **K''**, aus denen sich die Axonometrie K^S durch die Eckhart-Methode herstellen läßt. Eine solche einfache Konstruktion befindet sich z. B. in [7]. Die

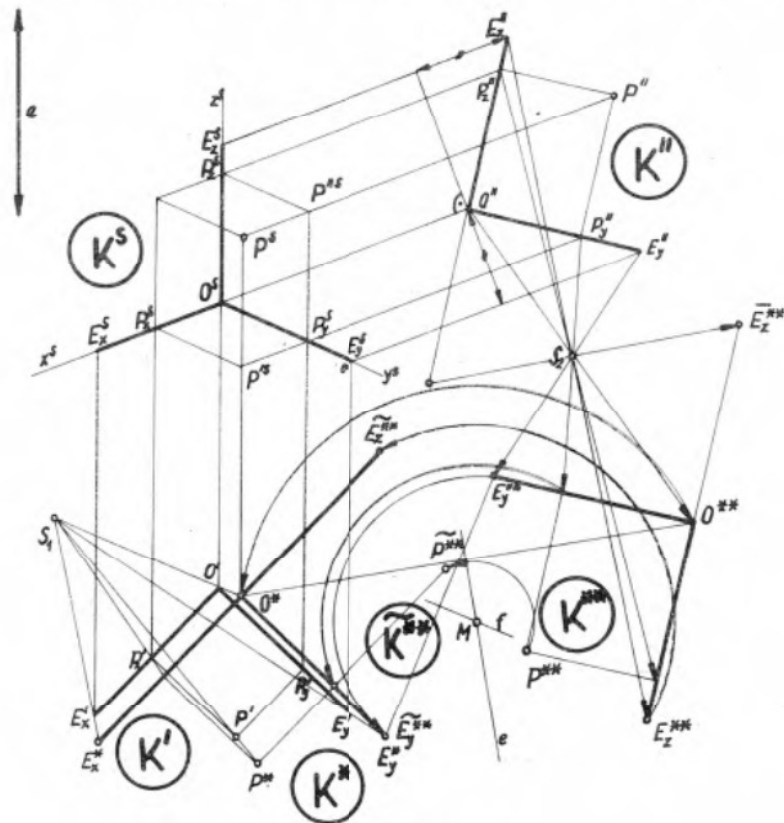


Fig. 1

Einheitsstrecken in \mathbf{K}' und in \mathbf{K}'' sind im allgemeinen ungleich d.h. $O'E'_x \neq O''E''_x$ aber $O'E'_x = O'E'_y$ und diese sind verschieden von der räumlichen Einheitsstrecke e . Zwischen der axonometrischen Grundrißebene und der Mongeschen Projektion der Grundrißebene besteht eine perspektive Affinität — ausnahmsweise eine Parallelverschiebung. Eben so gibt es eine perspektive Affinität zwischen der axonometrischen Aufrißebene und der Mongeschen Projektion der Aufrißebene. Wegen der Affinitäten sind für die Koordinatepunkte von P' und P''

$$(P_x^S E_x^S O^S) = (P'_x E'_x O'); \quad (P_y^S E_y^S O^S) = (P'_y E'_y O') = (P''_y P''_y O''); \\ (P_z^S E_z^S O^S) = (P''_z E''_z O'')$$

Wir wenden je eine Ähnlichkeit auf \mathbf{K}' und \mathbf{K}'' an, so daß die Strecken $O^*E_x^* = O^{**}E_z^{**} = e$ seien. Diese Ähnlichkeiten sind in Fig. 1 Zentralähnlichkeiten mit den Mittelpunkten S_1 und S_2 . Spiegeln wir den Punkt E_z^{**} durch die Gerade $O^{**}E_y^{**}$, dann bekommen wir den Spiegelbildpunkt \bar{E}_z^{**} . Es ist immer möglich — entweder aus den Konstruktionen \mathbf{K}' und \mathbf{K}'' , oder aus den Ähnlichkeitstransformationen —, daß die Dreiecke $E_x^* O^* E_y^*$ und $\bar{E}_z^{**} O^{**} E_y^{**}$ gleichsinnig kongruent sind. Aus der kinematischen Geometrie ist es bekannt, daß sich die obigen gleichsinnig kongruenten Dreiecken durch eine einzige Drehung (ausnahmsweise Parallelverschiebung) in Deckung bringen lassen. Der Drehpol ist der Schnittpunkt M der Geraden e und f , wo e und f die Mittelsenkrechten der zwei Strecken O^*O^{**} und $E_y^*E_y^{**}$ sind. Nach der Drehung werden \mathbf{K}^* und $\bar{\mathbf{K}}^{**}$ in der Mongeschen Lage sein.

Einige Bemerkungen zu praktischen Anwendungen

1. Eine der Ähnlichkeitstransformationen ist überflüssig, wenn die Aufgaben Winkelaufgaben sind.
2. Eine der Ähnlichkeitstransformationen und die Drehung sind vertauschbar, also es ist möglich am Ende der Konstruktion die wahre Länge der Einheitsstrecke in Betracht zu nehmen.
3. Zwischen dem axonometrischen Bild und dem axonometrischen Grundriß — oder Aufriß — einer Ebene besteht eine perspektive Affinität; zwischen dem Grundriß und dem konstruierten Mongeschen Bild ist auch eine perspektive Affinität vorhanden. Aus der Lage der Affinitäten folgt, daß zwischen dem axonometrischen Bild einer Ebene und ihrem konstruierten Mongeschen Bild auch eine perspektive Affinität (ausnahmsweise Parallelverschiebung) besteht.
4. Die Konstruktion der Mongeschen Bilder macht es möglich, viele metrischen Aufgaben weit vom axonometrischen Bild zu lösen, und dadurch Platz für die Ergebnisse zu lassen.

Endlich lösen wir eine *Aufgabe*, die metrische Beziehungen hat und zeigen, wie praktisch dieses Verfahren in der Konstruktion ist.

Seien das axonometrische Achsenkreuz mit Einheitsstrecken und eine Ebene α mit Spurlinien n_1^s, n_2^s, n_3^s gegeben. Man soll das axonometrische Bild eines Drehzylinders konstruieren dessen Grundkreis im Dreieck ABC eingeschrieben ist.

Erst konstruieren wir die Bilder \mathbf{K}' und \mathbf{K}'' , und nehmen eine Ähnlichkeit für \mathbf{K}'' , so daß $\lambda O''E''_y = O'E'_y$ sei, und danach bekommen wir ein entsprechendes Bild $\bar{\mathbf{K}}^{**}$.

Es besteht eine perspektive Affinität zwischen dem axonometrischen Bild und dem Grundriß der Ebene α und wegen der Umklappung besteht eine andere perspektive Affinität zwischen (α) und α' . Dadurch ist es möglich, die wichtigsten Punkte der Bildellipse ohne die Benützung des axonometrischen Grundrisses zu konstruieren.

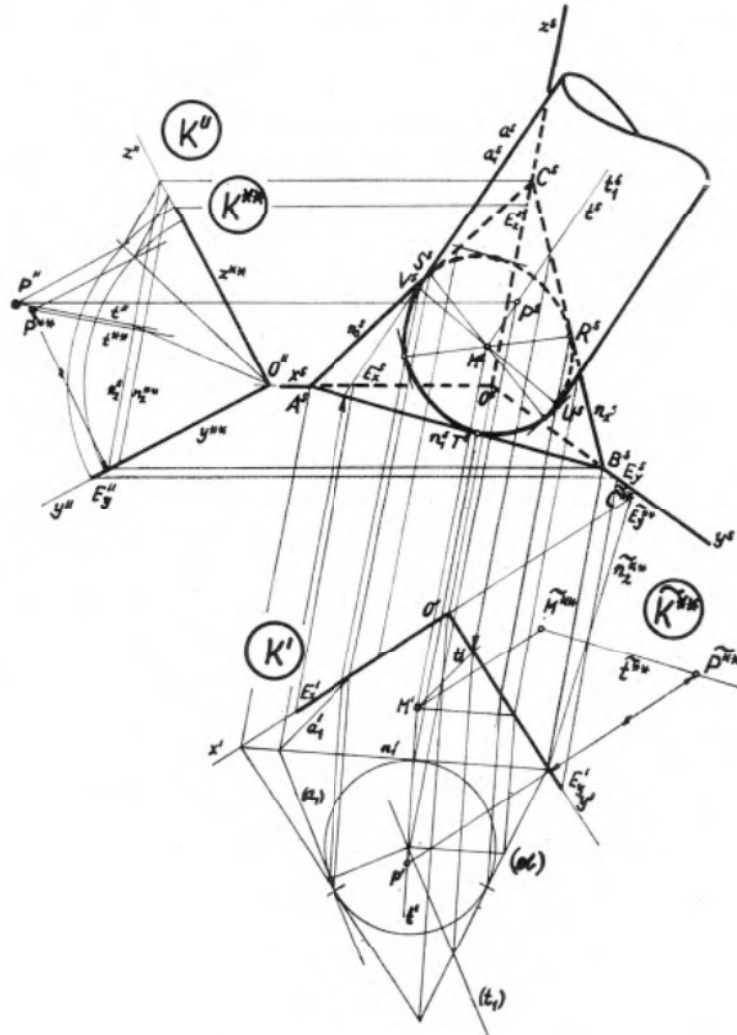


Fig. 2

Die Achse des Zylinders ist senkrecht zur Ebene α , die wir aus \tilde{t}^{**} und t' mit Hilfe des Punktes (\tilde{P}^{**}, P') bestimmen können. Auf der Ebene α liegt t_1 , und t_1^S, t^S sind axonometrische Deckgeraden und deswegen können wir die Konturgerade α durch t_1' und (t_1) bestimmen.

Literatur

- [1] L. DRS, Parallele Axonometrie und einschneiderverfahren, *Časopis pro pestování matematiky* **97** (1972), 55—64.
- [2] L. ECKHART, Affine Abbildungen und Axonometrie, S.-Ber. Akad. Wiss. **146** (1937), 51—56.
- [3] J. HJELMSLEV, Darstellende Geometrie, *Leipzig—Berlin* (1914).
- [4] E. MÜLLER—E. KRUPPA, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, *Wien* (1961).
- [5] E. MÜLLER, Vorlesungen über darstellende Geometrie I. *Leipzig und Wien* (1923).
- [6] E. J. NYSTRÖM, Zur praktischen Axonometrie, *Soc. Scient. Fenn., Comm. Phys.-Math.* XI. 11. (1942), 1—25.
- [7] E. STIEFEL, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, *Basel* (1947).
- [8] O. TOMMI, On the use of the Schmid—Eckhart method in the theory of parallel projection, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I.* **269** (1959).

(Eingegangen am 15. Juli, 1972.)