Finslerräume von rekurrenter Torsion

Von ARTHUR MOÓR (Sopron)

Herrn Professor A. Rapcsák zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

§ 1. Einleitung

In diesem Artikel wollen wir solche Finslerräume F_n^* untersuchen, für deren Torsionstensor die Relation:

$$A_{ijk|m} = a_m(x, \dot{x}) A_{ijk} \tag{1.1}$$

gültig ist, wo „$|m$" die erste, mit dem Übertragungsparametern $\Gamma_{j\ k}^{*i}$ gebildete Cartansche kovariante Ableitung bedeutet (vgl. [5], Kap. III. § 2.).

Definition. Ist für einen Finslerraum (1.1) *gültig, so ist dieser Finslerraum ein Finslerraum von rekurrenter Torsion.*

In der Formel (1.1) ist $a_m(x, \dot{x})$ ein Vektorfeld, das wir öfters als Rekurrenzvektor der Torsion bezeichnen werden. Aus (1.1) folgt offenbar — wegen $g^{jk}{}_{|m}=0$ — nach Verjüngung über „j" und „k" die Relation:

$$A_{i|m} = a_m A_i, \quad A_i \overset{\mathrm{def}}{=} A_i{}^k{}_k, \tag{1.2}$$

wo A_i den Torsionsvektor bedeutet; die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht, d.h. aus (1.2) folgt die Formel (1.1) nicht.

Im Paragraphen 2 unseres Artikels wollen wir kurz die Grundtensoren und Grundgrößen der Finslerräume zusammenstellen, inwieweit sie gebraucht werden. Im Paragraphen 3 untersuchen wir den allgemeinen n-dimensionalen Fall. Wir beweisen, daß wenn (1.1) gilt, dann der Krümmungstensor S_{ijkl} immer rekurrent ist, ferner es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Rekurrenz des Krümmungstensors P_{ijkl} angegeben.

Im vierten und fünften Paragraphen untersuchen wir zwei Spezialfälle, undzwar den zwei- bzw. den dreidimensionalen Fall. Es wird sich zeigen, daß der zweidimensionale Fall immer eine rekurrente Torsion hat.

§ 2. Grundgrößen der Finslerräume

Ein n-dimensionaler Finslerraum F_n ist eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(x^i, \dot{x}^i)$, in der durch eine Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ eine Metrik definiert ist. Die Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ soll den gewöhnlichen Bedingungen genügen (vgl. [5], Kap. I. § 1.). Der metrische Grundtensor ist durch die Formel:

$$g_{ij}(x, \dot{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \partial^2_{\dot{x}^i \dot{x}^j} F^2 \tag{2.1}$$

definiert, ferner werden wir durch g die Determinante

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Det}(g_{ij}) \neq 0 \tag{2.2}$$

bezeichnen.

Die fundamentalen kovarianten Ableitungen sind z. B. für einen gemischten Tensor $T_i{}^j$ durch die Formeln

$$T_i{}^j{}_{|m} = \partial_m T_i{}^j - F\partial_{\dot{x}^s} T_i{}^j \Gamma^{*s}_{0\ m} + T_i{}^s \Gamma^{*j}_{s\ m} - T_s{}^j \Gamma^{*s}_{i\ m}$$
$$T_i{}^j{}_{;m} = F\partial_{\dot{x}^m} T_i{}^j + T_i{}^r A_r{}^j{}_m - T_r{}^j A_i{}^r{}_m$$

festgelegt, wo $\Gamma^{*j}_{i\ k}$ die aus dem metrischen Grundtensor g_{ij} gebildeten Übertragungsparameter und $A_i{}^j{}_k$ den Torsionstensor:

$$A_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} F\partial_{\dot{x}^k} g_{ij}, \quad A_i{}^j{}_k = g^{sj} A_{isk} \tag{2.3}$$

bedeuten. Selbstverständlich bedeuten die g^{sj} die kontravarianten Komponenten von g_{ij} d.h. es gelten

$$g_{is} g^{sj} = \delta^j_i, \tag{2.4}$$

wo δ^j_i das Kronecker-δ ist. Der Index „0" bedeutet immer die Kontraktion mit dem Einheitsvektor

$$l^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{x}^i}{F}, \quad l_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \equiv g_{ij} l^j,$$

und letztens ist:

$$\Gamma^*_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ik}) - A_{ijr} \Gamma^{*r}_{0\ k} - A_{jkr} \Gamma^{*r}_{0\ i} + A_{ikr} \Gamma^{*r}_{0\ j}. \tag{2.5}$$

Für die folgenden wird es sehr wichtig sein, daß die kovarianten Ableitungen von g_{ij} verschwinden:

$$g_{ij|m} \equiv 0, \quad g^{ij}{}_{|m} \equiv 0, \tag{2.6a}$$

$$g_{ij;m} \equiv 0, \quad g^{ij}{}_{;m} \equiv 0, \tag{2.6b}$$

hingegen gilt für den Vektor l^i nur:

$$l^i{}_{|m} \equiv 0, \quad l_{i|m} \equiv 0, \tag{2.7a}$$

und bezüglich der zweiten Cartanschen kovarianten Ableitung ist:

$$l^i{}_{;m} \equiv \delta^i_m - l^i l_m, \quad l_{i;m} \equiv g_{im} - l_i l_m. \tag{2.7b}$$

Auf Grund der Homogeneität erster Ordnung von $F(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$, folgt aus (2.1) und (2.3):

$$A_{0ik} = A_{i0k} = A_{ik0} = 0. \tag{2.8}$$

Von den Krümmungstensoren des Finslerraumes benötigen wir nur den zweiten bzw. den dritten Krümmungstensor. Es ist (vgl. [5], Kap. IV. § 1. S. 100—101):

$$P_{jikl} \overset{\text{def}}{=} A_{kil|j} - A_{kjl|i} - A_{kir} A_j{}^r{}_{l|0} + A_{kjr} A_i{}^r{}_{l|0}, \tag{2.9}$$

$$S_{jikl} \overset{\text{def}}{=} A_{jlr} A_i{}^r{}_k - A_{jkr} A_i{}^r{}_l. \tag{2.10}$$

Die Symmetrieeigenschaften der Grundtensoren sind die folgenden:

1) Der Torsionstensor A_{ijk} ist in allen seinen Indexen symmetrisch.

2) Die Krümmungstensoren P_{jikl} und S_{jikl} sind in (j, i) schiefsymmetrisch.

3) Der dritte Krümmungstensor: S_{jikl} ist auch in (k, l) schiefsymmetrisch.

Wir bemerken noch, daß der Tensor S_{jikl} im zweidimensionalen Fall identisch verschwindet ([4], S. 201). Im dreidimensionalen Fall hat dieser Tensor die Form:

$$S_{ijkl} = \mathscr{S}(x, \dot{x})(h_{il} h_{jk} - h_{ik} h_{jl}), \tag{2.11}$$

wo h_{jk} den symmetrischen Tensor

$$h_{jk} \overset{\text{def}}{=} g_{jk} - l_j l_k \equiv l_{j;k} \tag{2.11a}$$

bedeutet vgl. ([4] § 2).

§ 3. Der n-dimensionale Fall

Zu Grunde gelegt sei ein n-dimensionaler Finslerraum von rekurrenter Torsion: F_n^*, d.h. für dessen Torsionstensor (1.1) gültig ist. Es kann der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 1. *Existiert im Raume F_n^* ein Vektorfeld $h^i \neq l^i$, für das die Relation:*

$$h^i{}_{|m} = 0 \tag{3.1}$$

besteht, und ist eine der Ungleichungen:

$$A_k h^k \neq 0, \tag{3.2a}$$

$$A_{ijk} h^i h^j h^k \neq 0 \tag{3.2b}$$

gültig, so ist der in (1.1) vorkommende Rekurrenzvektor a_m ein Gradientvektor, d.h.:

$$a_m = a(x, \dot{x})_{|m},$$

wo $a(x, \dot{x})$ einen Skalar bezeichnet.

Bemerkung. In Finslerräumen bedeutet der Ausdruck: „Gradientvektor" jetzt und im folgenden die kovariante Ableitung eines Skalars:

$$a_{|m} = \partial_m a - F(\partial_{\dot{x}^r} a) \Gamma^{*r}_{0\ m}.$$

Beweis des Satzes 1. Nehmen wir erstens an, daß (3.2a) besteht und bezeichnen wir ferner die Kontration mit h^k durch ein Θ, d.h. es ist für einen Tensor $T_i^{j\dots}{}_{\dots}$:

$$T_\Theta{}^{j\dots}{}_{\dots} \stackrel{\text{def}}{=} T_i{}^{j}{}_{\dots}^{\dots} h^i.$$

Man bekommt aus der Formel (1.2), die offenbar eine Folgerung von (1.1) ist, nach einer Kontraktion mit h^i in Hinsicht auf (3.1):

$$A_{\Theta|m} = a_m A_\Theta,$$

woraus nach der Annahme (3.2a) für den Vektor a_m:

$$a_m = \frac{1}{A_\Theta} A_{\Theta|m} \equiv (\ln |A_\Theta|)_{|m} \tag{3.3}$$

folgt, wo $A_{\Theta|m}$:

$$A_{\Theta|m} = \partial_m A_\Theta - F \partial_{\dot{x}^k} A_\Theta \Gamma^{*k}_{0\ m}$$

bedeutet, da A_Θ offenbar ein Skalar ist. Die Formel (3.3) beweist aber den Satz, wenn (3.2a) gilt.

Ist nun (3.2b) gültig, so erhält man aus (1.1) nach Kontraktion mit $h^i h^j h^k$ wegen (3.1):

$$a_m = (\ln |A|)_{|m}, \quad A \stackrel{\text{def}}{=} A_{\Theta\Theta\Theta},$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Dieser Satz ist nicht vollständig umkehrbar; es gilt aber der folgende

Satz 2. *Existiert im Raum F_n^* ein Vektorfeld h^i so, daß* (3.3) *gültig ist und*

$$A_\Theta \stackrel{\text{def}}{=} A_k h^k \neq 0, \tag{3.4}$$

so gilt:

$$\operatorname{Det}(h^k{}_{|m}) = 0. \tag{3.5}$$

Beweis. Aus (3.3) folgt

$$a_m = A_\Theta^{-1} A_{\Theta|m}.$$

Substituieren wir diesen Vektor in die Gleichung (1.2), die offenbar eine unmittelbare Folgerung von (1.1) ist, so wird nach einer Kontraktion mit h^i und in Hinsicht auf die Definitionsformel (3.4):

$$A_{i|m} h^i = A_{\Theta|m}.$$

Beachten wir nun wieder die Definition von A_Θ, d.h. die Formel (3.4), führen wir ferner die kovariante Ableitung von A_Θ durch, so wird:

$$A_k h^k{}_{|m} = 0.$$

Wäre nun entgegen dem Satze die Relation (3.5) nicht gültig, so wäre nach der letzten Gleichung $A_k = 0$, was nach A. Deicke's Resultat (vgl. [3]) nicht möglich ist, falls die Grundfunktion $F(x, \dot{x})>0$ und der F_n^*-Raum nicht ein Riemannscher Raum ist.

In ähnlicher Weise kann die Relation (3.5) bewiesen werden, wenn statt (3.4) die Relation:

$$A_{\Theta\Theta\Theta} \equiv A_{ijk} h^i h^j h^k \neq 0 \tag{3.6}$$

gültig ist. Es besteht nämlich der folgende

Satz 3. *Bestehen die Relationen:*

$$A_{\Theta\Theta k} \equiv A_{ijk} h^i h^j \neq 0, \tag{3.7}$$

(3.6) *und*

$$a_m = (\ln |A_{\Theta\Theta\Theta}|)_{|m} \equiv A_{\Theta\Theta\Theta}^{-1} A_{\Theta\Theta\Theta|m}, \tag{3.8}$$

so ist die Formel (3.5) *wieder gültig.*

Beweis. Substituieren wir a_m aus (3.8) in (1.1), so wird nach Kontraktion mit $h^i h^j h^k$:

$$A_{ijk|m} h^i h^j h^k = (A_{ijk} h^i h^j h^k)_{|m}.$$

Beachten wir nun die Multiplikationsregel der kovarianten Ableitung, ferner die vollständige Symmetrie des Torsionstensors in seinen Indexen, so wird:

$$A_{\Theta\Theta k} h^k{}_{|m} = 0, \tag{3.9}$$

woraus dann wegen der Bedingung (3.7) die beweisende Relation: (3.5) unmittelbar folgt.

Wir bemerken noch, daß der Satz auch im Falle $A_{\Theta\Theta\Theta|m}=0$ gilt. Es kann nämlich mit der angegebenen Methode auch in diesem Falle (3.9) abgeleitet werden.

Von den Krümmungstensoren eines Finslerraumes hängen der zweite und dritte Cartansche Krümmungstensor von der Torsionstensor ab. Aus (2.10) und (1.1) folgt unmittelbar die Formel:

$$S_{jikl|m} = 2a_m S_{jikl}, \tag{3.10}$$

d.h.: es ist in einem Finslerraum von rekurrenter Torsion auch der dritte Cartansche Krümmungstensor immer rekurrent.

Wir wollen nun das Problem untersuchen, ob unter welchen Bedingungen der zweite Cartansche Krümmungstensor P_{jikl} rekurrent ist. Nehmen wir an, daß der durch (2.9) bestimmte Tensor rekurrent ist d.h.

$$P_{jikl|m} = b_m P_{jikl}. \tag{3.11}$$

Zuerst bestimmen wir die Form von b_m. In einem F_n^*-Raum hat P_{jikl} nach (2.9) und (1.1) die Form:

$$P_{jikl} = a_j A_{kil} - a_i A_{kjl} - a_0 S_{jikl}, \tag{3.12}$$

wo S_{jikl} durch (2.10) angegeben ist. Eine Kontraktion von (3.11) mit l^j gibt auf Grund von (2.7a) und (3.12):

$$(a_0 A_{ikl})_{|m} = b_m a_0 A_{ikl},$$

woraus in Hinsicht auf (1.1) folgt, daß b_m die Form

$$b_m = \frac{1}{a_0} a_{0|m} + a_m \tag{3.13}$$

haben muß, wenn $a_0 \not\equiv 0$, was wir im folgenden — wenn nicht anderes gesetzt ist — immer annehmen wollen. Setzen wir nun (3.12) und (3.13) in (3.11) ein, beachten wir ferner (1.1) und (3.10), so bekommen wir:

$$P_{jikl}(\ln |a_0|)_{|m} = a_{j|m} A_{kil} - a_{i|m} A_{kjl} - (a_{0|m} + a_0 a_m) S_{jikl}. \tag{3.14}$$

Wir beweisen nun den folgenden

Satz 4. *Ist der Finslerraum von rekurrenter Torsion, so ist* (3.14) *notwendig und hinreichend dafür, daß* P_{jikl} *rekurrent sei.*

Beweis. Die Notwendigkeit haben wir schon bei der Bestimmung der Relation (3.14) gezeigt, da diese Relation eben aus der Rekurrenz von P_{jikl}, d.h. aus (3.11) abgeleitet wurde. Wir müssen somit nur zeigen, daß es hinreichend ist.

Nehmen wir also an, daß (3.14) besteht. Der Tensor P_{jikl} hat in einem F_n^*-Raum die Form (3.12), woraus nach einer kovarianten Ableitung die Formel

$$P_{jikl|m} = a_{j|m} A_{kil} - a_{i|m} A_{kjl} + a_m (a_j A_{kil} - a_i A_{kjl}) - a_{0|m} S_{jikl} - 2a_0 a_m S_{jikl}$$

folgt. Eliminieren wir nun den in Klammern stehenden Ausdruck mit Hilfe von (3.12), so wird:

$$P_{jikl|m} = a_{j|m} A_{kil} - a_{i|m} A_{kjl} + a_m P_{jikl} - (a_{0|m} + a_0 a_m) S_{jikl}.$$

Auf Grund von (3.14) ist aber unsere letzte Formel offenbar mit

$$P_{jikl|m} = \{(\ln |a_0|)_{|m} + a_m\} P_{jikl}$$

äquivalent, womit der Satz vollständig bewiesen ist.

§ 4. Der zweidimensionale Fall

Nach L. Bernwald's Resultaten existiert im zweidimensionalen Finslerraum immer ein orthogonales und normiertes Zweibein: l^i, h^i mit

$$l^i{}_{|k} = 0, \quad h^i{}_{|k} = 0 \tag{4.1}$$

(vgl. [1]). Der Torsionstensor kann in der Form

$$A_{ijk} = \mathcal{I} h_i h_j h_k \tag{4.2}$$

angegeben werden, wo $\mathcal{I}$ den Hauptskalar des zweidimensionalen Finslerraumes ist. Aus (4.2) folgt nach kovarianter Ableitung auf Grund von (4.1) und in Hinsicht auf die Formel (4.2) selbst, der

Satz 5. *Ein zweidimensionaler Finslerraum ist immer von rekurrenter Torsion, und der Rekurrenzvektor ist ein Gradientvektor.*

BEWEIS. Aus den Formeln (4.1) und (4.2) folgt nämlich:

$$A_{ijk|m} = \frac{1}{\mathscr{I}} \mathscr{I}_{|m} A_{ijk} \equiv (\ln |\mathscr{I}|)_{|m} A_{ijk} \tag{4.3}$$

und diese Formel drückt schon den Satz aus.

Nach (4.3) ist der Rekurrenzvektor:

$$a_m = \mathscr{I}^{-1} \mathscr{I}_{|m} \equiv (\ln |\mathscr{I}|)_{|m}. \tag{4.4}$$

Auf Grund dieser Formel kann nun der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 6. *Ist im zweidimensionalen Finslerraum der Krümmungstensor P_{jikl} rekurrent, so ist der Rekurrenzvektor immer ein Gradientvektor.*

BEWEIS. Ist P_{jikl} rekurrent, d.h. ist (3.11) gültig, dann hat der Rekurrenzvektor b_m die Form (3.13). Im zweidimensionalen Fall ist a_m durch (4.4) bestimmt. Somit wird

$$b_m = \frac{\mathscr{I}}{\mathscr{I}_{|0}} \left(\frac{1}{\mathscr{I}} \mathscr{I}_{|0|m} - \frac{1}{\mathscr{I}^2} \mathscr{I}_{|0} \mathscr{I}_{|m} \right) + \frac{1}{\mathscr{I}} \mathscr{I}_{|m} = (\ln |\mathscr{I}_{|0}|)_{|m}$$

und das beweist den Satz.

Wir bemerken noch, daß dieses Resultat auch aus (4.1)—(4.3) und (3.11) abgeleitet werden könnte.

§ 5. Der dreidimensionale Fall

Ein dreidimensionaler Finslerraum hat im allgemeinen keine rekurrente Torsionstensor. Das folgt unmittelbar von der Form des Torsionstensors der dreidimensionalen Finslerräumen (vgl. [4] § 2, wo statt A_{ijk} der Torsionstensor durch C_{ijk} bezeichnet ist). Es gilt aber der

Satz 7. *Der Rekurrenzvektor $a_m(x, \dot{x})$ eines F_3^*-Raumes*) ist immer ein Gradientvektor, falls $a_m \neq 0$ ist.*

BEWEIS. In einem dreidimensionalen Finslerraum hat der dritte Cartansche Krümmungstensor immer die Form (2.11), wo $\mathscr{S}(x, \dot{x})$ einen Skalar bedeutet. Da der Tensor h_{ik} nach (2.11a), (2.6a) und (2.7a) verschwindende kovariante Ableitung hat, bekommt man aus (2.11):

$$S_{ijkl|m} = \frac{1}{\mathscr{S}} \mathscr{S}_{|m} S_{ijkl} \equiv (\ln |\mathscr{S}|)_{|m} S_{ijkl}, \tag{5.1}$$

d.h. der dritte Krümmungstensor eines dreidimensionalen Finslerraumes ist immer rekurrent und der Rekurrenzvektor ist immer ein Gradientvektor.

---

*) Wir errinern daran, daß ein F_n^*-Raum einen Finslerraum bedeutet, in dem (1.1) gilt.

Gilt noch die Relation (1.1), so ist nach (3.10) und (5.1):

$$a_m = \left(\ln \sqrt{|\mathscr{S}|}\right)_{|m} \tag{5.2}$$

und das beweist den Satz 7.

Es ist immer sehr vorteilhaft, wenn in einem Finslerraum ein orthogonales und normiertes n-Bein existiert, so, daß die einzelnen Vektoren des n-Beins verschwindende kovariante Ableitung haben. Im dreidimensionalen Finslerraum existiert ein solches 3-Bein im allgemeinen nicht, wie im zweidimensionalen Raum (vgl. [1]), doch es ist in gewissen Spezialfällen die Konstruktion eines solchen 3-Beins möglich. Es gilt das folgende

Lemma. *Existiert im dreidimensionalen Finslerraum, F_3 ein rekurrentes Vektorfeld $\tilde{h}^i$ das von l^i linear unabhängig ist und für das*

$$\tilde{h}^i{}_{|k} = b_k \tilde{h}^i, \quad (b_k \neq 0) \tag{5.3}$$

besteht, so kann ein solches orthogonales und normiertes 3*-Bein konstruiert werden, dessen Vektoren verschwindende kovariante Ableitung haben. Im Raum F_n folgt aus* (5.3) *nur die Existenz eines h^i mit $h^i{}_{|k}=0$.*

Beweis. Der erste Vektor des konstruierenden 3-Beins sei der Vektor l^i. Auf Grund der Annahme über $\tilde{h}^i$ folgt, daß $\tilde{h}^i \neq l^i$. Normieren wir $\tilde{h}^i$ auf eins, so ist

$$h^{*i} \overset{\text{def}}{=} (g_{ab}\tilde{h}^a\tilde{h}^b)^{-1/2}\tilde{h}^i$$

ein Einheitsvektor. Die kovariante Ableitung von h^{*i} ist nach der Formel (5.3):

$$h^{*i}{}_{|k} = -\frac{1}{2}(g_{ab}\tilde{h}^a\tilde{h}^b)^{-3/2} 2 g_{cd}\tilde{h}^c{}_{|k}\tilde{h}^d\tilde{h}^i + (g_{ab}\tilde{h}^a\tilde{h}^b)^{-1/2}\tilde{h}^i{}_{|k}.$$

Beachten wir (5.3), so sieht man, daß

$$h^{*i}{}_{|k} = 0 \tag{5.4}$$

besteht.

Der Vektor h^{*i} hat also verschwindende kovariante Ableitung, doch ist dieser Vektor im allgemeinen nicht orthogonal zu l^i. Der Vektor

$$\hat{h}^i \overset{\text{def}}{=} h^{*i} - h^{*a} l_a l^i$$

genügt den Forderungen:

$$\hat{h}^i l_i = 0, \quad \hat{h}^i{}_{|k} = 0,$$

wir müssen also den Vektor $\hat{h}^i$ nur auf eins normieren:

$$h^i \overset{\text{def}}{=} (\hat{h}^j \hat{h}_j)^{-1/2} \hat{h}^i$$

und h^i ist schon ein Einheitsvektor mit

$$h^i l_i = 0, \quad h^i{}_{|k} = 0. \tag{5.5}$$

Der Vektor h^i ist also der zweite Vektor des gewünschten 3-Beins.

Um den dritten Vektor im F_3 zu bekommen, definieren wir den Tensor

$$\varepsilon^{ijk} \overset{\text{def}}{=} g^{-1/2} \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}, \quad g \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Det}(g_{ab}),$$

wo δ_{rs} das Kronecker-δ bedeutet, und damit wird:

$$k^i \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^{ijk} l_j h_k$$

der gewünschte dritte Vektor.

Wir müssen, zeigen, daß k^i ein Einheitsvektor ist und verschwindende kovariante Ableitung hat. Nach den Sätzen der Determinanten folgt:

$$\varepsilon_{ijk} = g^{1/2} \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix},$$

ferner

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{irs} = \delta^j_r \delta^k_s - \delta^j_s \delta^k_r .$$

Mit Hilfe dieser Relation folgt unmittelbar

$$k^i k_i = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{irs} l_j h_k l^r h^s = 1,$$

da $l_j h^j = 0$ ist.

Die kovariante Ableitung von k^i ist:

$$k^i{}_{|m} = \varepsilon^{ijk}{}_{|m} l_j h_\kappa . \tag{5.6}$$

Nach der Definition des ε-Tensors ist $\varepsilon^{ijk} = 0$, falls zwei Indizes gleich sind, und ε^{ijk} ist außerdem vollständig schiefsymmetrisch. Das bedeutet, daß ε^{123} alle übrigen von Null verschiedenen Komponenten bestimmt. Wenn also $\varepsilon^{123}{}_{|m} = 0$ ist, so ist auch $\varepsilon^{ijk}{}_{|m} = 0$. Es ist aber

$$\varepsilon^{123}{}_{|m} = \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{|m} = -\frac{1}{2} g^{-3/2} g_{|m} =$$

$$= -\frac{1}{2} g^{-3/2} \left(\frac{\partial g}{\delta x^m} - F \frac{\partial g}{g \dot{x}^r} \Gamma^{*r}_{0\ m} - 2g \Gamma^{*r}_{r\ m} \right),$$

da g eine Skalardichte vom Gewicht 2 ist. Eine unmittelbare Berechnung von $\Gamma^{*r}_{r\ m}$ gibt nun $g_{|m} = 0$ (vgl. auch [2], (1.11)). Somit ist also $\varepsilon^{ijk}{}_{|m} = 0$, folglich nach (5.6) auch $k^i{}_{|m} = 0$.

Das orthogonale und normierte 3-Bein mit verschwindender kovarianten Ableitung besteht also aus den Vektoren: l^i, h^i und k^i, womit das Lemma bewiesen ist.

Ergänzung zum Lemma. *Existiert im F_3 ein Vektorfeld h^{*i}, für das* (5.4) *besteht, so existiert ein orthogonales und normiertes* 3-*Bein, dessen Vektoren verschwindende kovariante Ableitung haben.*

Die Ergänzung ist trivial, da jetzt der Beweis des Lemmas von (5.4) ebenso durchgeführt werden kann, wie vorher.

Die Bedeutung dieses Lemmas besteht darin, daß in den F_n^*-Räumen, wo also (1.1) besteht immer ein rekurrentes Vektorfeld existiert; der Torsionsvektor A^i bestimmt nämlich nach (1.2) ein solches Vektorfeld.

Im folgenden können wir immer annehmen, daß in unserem dreidimensionalen Finslerraum ein *orthogonales und normiertes Dreibein l^i, h^i, k^i existiert, dessen einzelne Vektoren verschwindende kovariante Ableitung haben*. Der Torsionstensor — auch dann, wenn er nicht rekurrent ist — hat wegen der totalen Symmetrie die folgende Beindarstellung:

$$A_{ijk} = A_{(1)}h_ih_jk_k + A_{(2)}(h_ih_jk_k + h_jh_kk_i + h_kh_ik_j) + \\ + A_{(3)}(h_ik_jk_k + h_jk_kk_i + h_kk_ik_j) + A_{(4)}k_ik_jk_k. \tag{5.7}$$

Wir beweisen den

Satz 8. *Notwendig und hinreichend dafür, daß in einem dreidimensionalen Finslerraum der Torsionstensor rekurrent sei, d.h. daß* (1.1) *gelte, sind die Bedingungen:*

$$A_{(i)} = c_{(i)}A(x, \dot{x}) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{5.8}$$

mit

$$c_{(i)|m} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{5.9}$$

(Die Koeffizienten $c_{(i)}$ können selbstverständlich Konstante sein.)

Beweis des Satzes 8. Die Bedingungen sind offenbar hinreichend, da aus (5.7)—(5.9) folgt wegen $h_{i|m} = k_{i|m} = 0$:

$$A_{ijk|m} = A_{|m}\frac{1}{A}A_{ijk},$$

wir müssen also nur die Notwendigkeit zeigen. Nehmen wir also an, daß (1.1) besteht. Aus (1.1) und (5.7) folgt wegen $h_{i|m} = k_{i|m} = 0$:

$$A_{(1)|m}h_ih_jh_k + A_{(2)|m}(h_ih_jk_k + \ldots = a_m\{A_{(1)}h_ih_jh_k + A_{(2)}(h_ih_jk_k + \ldots\},$$

woraus wegen der Orthogonalität von h_i, k_i unmittelbar folgt, daß

$$A_{(i)|m} = A_{(i)}a_m \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

besteht, d.h.

$$a_m = (\ln |A_{(i)}|)_{|m} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Diese Formel bedeutet aber, daß $A_{(i)}$ die Form (5.8) hat und (5.9) besteht.

Die Landsbergschen Räume sind durch

$$A_{ijk|0} = 0 \tag{5.10}$$

gekennzeichnet. Zum Schluß beweisen wir den folgenden

Satz 9. *Ist ein F_3^*-Raum ein Landsbergscher Raum, so ist S_{jikl} längs der Extremalen des Raumes von konstanter Form, d.h. es gilt* (2.11) *mit*

$$\left(\frac{d}{ds}\mathcal{S}\right)_{extremal} \equiv \mathcal{S}_{|0} = 0. \tag{5.11}$$

BEWEIS. Aus (1.1) und (5.10) folgt, daß $a_0=0$ ist. Da in einem F_3^*-Raum die Formel (5.2) besteht, folgt somit nach Kontraktion mit l^m die beweisende Relation (5.11).

Schriftenverzeichnis

[1] L. BERWALD, On Finsler and Cartan Geometries III. Two dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals. *Ann. of Math.* **42** (1941), 84—112.

[2] R. S. CLARK, The conformal geometry of a general differential metric space. *Proc. London Math. Soc. (2)* **53** (1951), 294—309.

[3] A. DEICKE, Über Finslerräume mit $A_i=0$. *Arch. Math.* **4** (1953), 45—51.

[4] M. MATSUMOTO, On Finsler spaces with curvature tensors of some special forms. *Tensor (N. S.)* **22** (1971), 201—204.

[5] H. RUND, The differential geometry of Finsler spaces. *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1959.

(Eingegangen am 30. März, 1973.)