Orthogonale Projektionen von Hyperkreisen und Hyperschraubenlinien II

Von ATTILA GYARMATHI (Debrecen)

Herrn Professor András Rapcsák zum 60. Geburtstag gewidmet

In diesem zweiten Teil werden wir uns mit dem KLIMA-MAURIN-Projektionssystem (kurz K-L-Projektion) der Raumkurven von skalarer Krümmung beschäftigen, sowie auf den Zusammenhang zwischen SCHOUTE-Projektion (kurz Sch-Projektion) und KLIMA-MAURIN-Projektion für diese Kurven hinweisen.

III. Die Darstellung des Hyperkreises und der Hyperschraubenlinie in der KLIMA—MAURIN-Projektion

5. *Die Darstellung des in dem Raum R_4 liegenden Hyperkreises in der KLIMA-MAURIN-Projektion.*

Darzustellen ist der Hyperkreis

$$(5.1) \qquad {}^{2i-1}x = r_i \cos l_i u + d_{2i-1}$$

$$ {}^{2i}x = r_i \sin l_i u + o_{2i} \quad (i = 1, 2)$$

$$(5.2) \qquad r_1 = r_2; \quad l_1 = \frac{1}{2} l_2 \quad \text{und} \quad o_{2i-1}, \quad o_{2i}$$

die Koordinaten vom Mittelpunkt des Hyperkreises sind. Die Abbildung 3. zeigt die Bilder $'h_k$, $''h_k$, $'''h_k$ des Hyperkreises. Da die Zeichenebene ${}^1x^2x$ eine Achsenebene ist, ist wegen (5.1) $'h_k$ ein Kreis.

Die Konstruktion von $''h_k$ bzw. $'''h_k$ wird sehr einfach wenn die Hilfsbilder „34“ bzw. „43“ angewandt werden. Die Hilfsbilder des Hyperkreises ${}_{34}h_k$ bzw. ${}_{43}h_k$ sind Kreise, da ${}^3x^4x$ eine Achenebene ist. Der $''h_k$ wird aus dem $'h_k$ und aus dem ${}_{34}h_k$ der $'''h_k$ hingegen aus dem $'h_k$ und aus dem ${}_{43}h_k$ durch Zusammenschnitt gewonnen. Die Bilder der Begleitvierbeine sind ebenfalls durch Anwendung der Hilfsbilder herzustellen. Zuerst sind die Bilder der Vierbeine auf dem ersten Bild und auf den Hilfsbildern zu konstruieren. Die erwähnten Bilder sind keine anderen, als die SCHOUTE-Projektionen des Hyperkreises. Im I. Teil (Tomus 19. Punkt 3.)

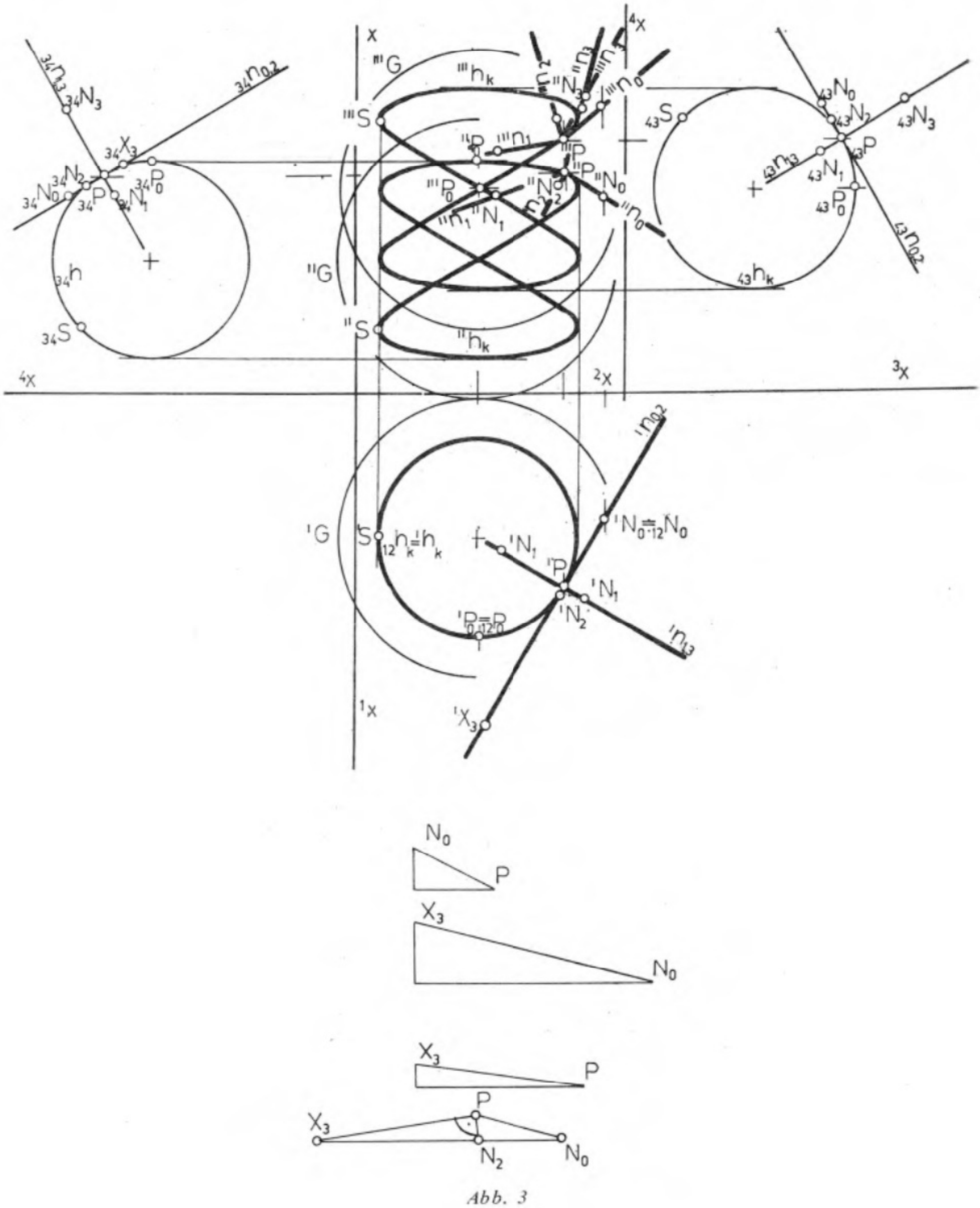
x
⁴x
'''G
'''h_k
'''S
''G
''S
''h_k
⁴x
²x
³x
₃₄N₃
₃₄X₃
₃₄n₀₂
₃₄h
₃₄S
₄₃S
₄₃N₀
₄₃N₂
₄₃N₃
₄₃P
₄₃N₁
₄₃P₀
₄₃h_k
₄₃n₀₂
'G
'N₁
'P
'N₂
'n₀₂
'n₁₃
'X₃
¹x
N₀
P
X₃
N₀
X₃
P
X₃
P
N₂
N₀

Abb. 3

wurde die Konstruktion der Vierbeine schon dargestellt. Durch Anwendung derselben und durch Zusammenschnitt, kann man auch das dritte und das vierte Bild der Vierbeine erhalten. Unter Berücksichtigung von (1.2) (s. den I. Teil) und von (5.1) erhalten wir:

$$_{12}\overline{P_{12}N_0} = 2_{34}\overline{P_{34}N_0},$$

$$_{34}\overline{P_{34}N_1} = 4_{12}\overline{P_{12}N_1}$$

Die Bilder N_3 sind durch ein Abdrehen zu bestimmen (s. 3. Abb). Der N_2 wurde durch Anwendung von X_3 erhalten. Zur Aufnahme der unabhängigen Bilder von X_3 wurde der Zusammenhang

$$_{12}\overline{P_{12}X_3} = 8_{34}\overline{P_{34}X_3}$$

angewandt. Der N_2 ist ein Punkt der Seite N_0X_3 der Dreiecks PX_3N_0 denn is folgt aus den Frenet-Formeln, daß die Kante n_2 (zu welcher der Punkt N_2 gehört) sich auf die Ebene der Vektoren $\mathbf{n}_0=\mathbf{x}'$ und $\mathbf{x}'''$ fügt. Die Länge des Dreiecks PX_3N_0 wurde aus den zur Verfügung stehenden unabhängigen Bildern der Seiten mit Hilfe von rechtwinkligen Dreiecken bestimmt. Diese Nebenkonstruktion ist auf der Abbildung 3. zu finden. Die entsprechenden Bilder von N_2 sind durch die Anwendung des Teilverhältnises $(X_3N_0N_2)$ zu erhalten.

Abbildung 3. zeigt auch die Bildkonturen der den h_k enthaltenden Hyperkugel $'G$, $''G$, $'''G$. Der h_k hat gegenwärtig keine Punkte auf den Konturen.

6. *Die Darstellung der in dem R_5 liegenden Hyperschraubenlinie in der Abbildung von KLIMA-MAURIN*

Darzustellen ist die Hyperschraubenlinie

$$(6.1)\qquad {}^{2i-1}x = r_i \cos l_i u + o_{2i-1}$$

$$^{2i}x = r_i \sin l_i u + o_{2i} \qquad (i = 1, 2),$$

$$^{5}x = cu$$

wo

$$(6.2)\qquad r_1 = r_2, \quad l_1 = 2l_2 \quad \text{und} \quad o_{2i-1}, \quad o_{2i}$$

der Mittelpunkt des Hyperschraubenlinie gehörende Hyperkreises ist. Die Bilder der Hyperschraubenlinie stimmen wegen der geometrischen Eigenschaften der Hyperschraubenlinie (s. I. Teil 2. Punkt) mit dem entsprechenden Bild des zur Hyperschraubenlinie gehörende Hyperkreises (s. (1.1) Gleichung) überein. Die konstruktion derselben wurde im vorigen Punkt gezeigt. Die Gleichung des Bildes $^{IV}h_c$ ist

$$^{2}x = r_1 \sin l_1 u + o_2$$

$$^{5}x = cu$$

auf Grund dieser Gleichung ist das Bild von $^{IV}h_c$ (Sinuslinie) einfach zu konstruieren (Abbildung 4.).

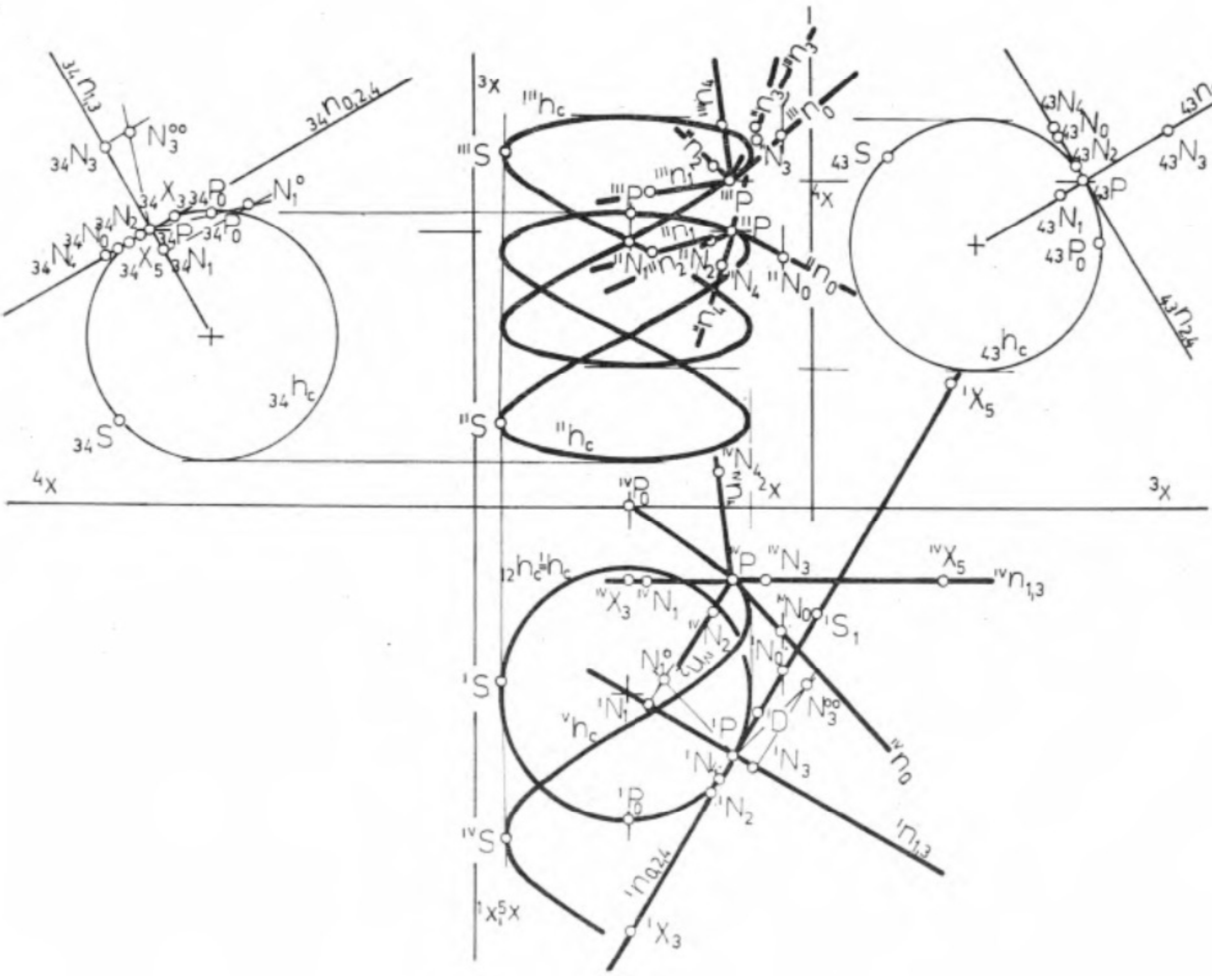

Abb. 4

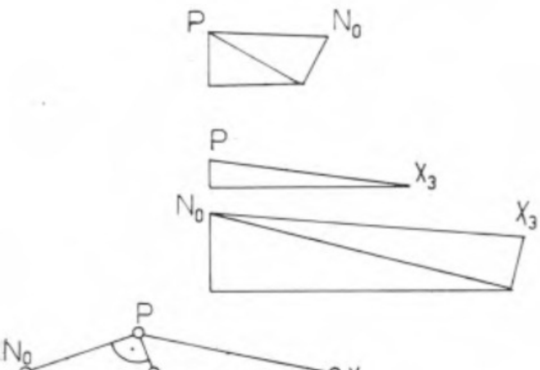

Abb. 4a

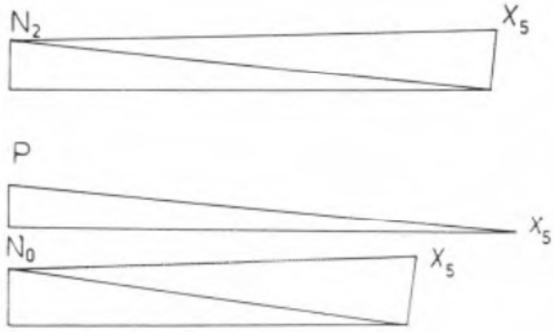

Abb. 4b

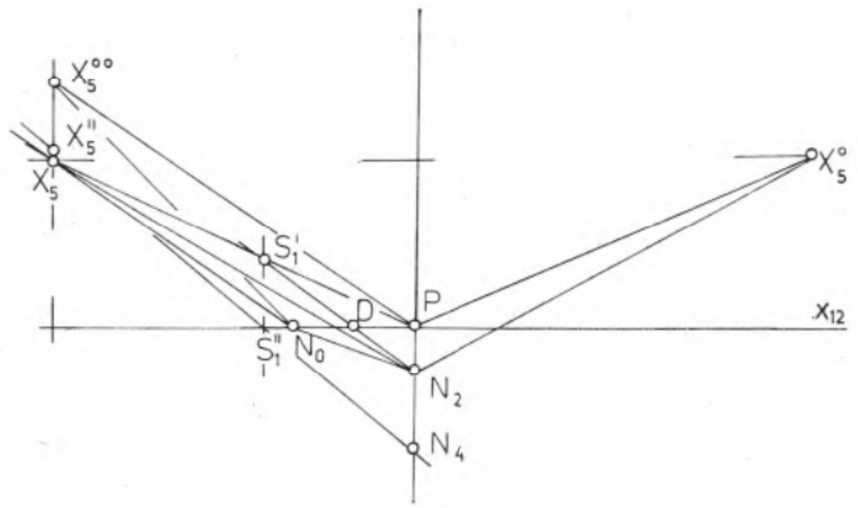

Abb. 4c

Bei der Konstruktion der Bilder des zu einem Punkt P des h_c gehörigen begleitenden Fünfbeins soll mann die Konstruktion Wiederholen, die in Abbildung 2. des ersten Teils gezeit wurde. Diese Abbildung zeigt, wie die Bilder der Hyperschraubenlinie nach dem Verfahren von SCHOUTE zu Konstruieren sind, und von dieser Abbildung lassen sich auch die zur K-L-Projektion nötigen Koordinaten des begleitenden Fünfbeins $P(N_0N_1N_2N_3N_4)$ ablesen. Nach dem Zusammenschnittverfahren, daß in der vorigen Abbildung angevendet wurde, läßt sich mit Hilfe der Sch-Bilder das dritte und das vierte Bild von h_c und von begleitenden Fünfbein erhalten.

Bei der Konstruktion von N_0 und von N_1 wurden die (6.2) und die Zusammenhänge

$$\overline{{}_{12}P_{12}N_0} = 2\,\overline{{}_{34}P_{34}N_0}$$

$$\overline{{}_{12}P_{12}N_1} = 4\,\overline{{}_{34}P_{34}N_1}$$

berücksichtigt. Die Bilder des N_3 wurden durch Abdrehen bestimmt. Der N_2 wurde mit Hilfe des X_3 erhalten. Hier besteht der Zusammenhang

$$\overline{{}_{12}P_{12}X_3} = 8\,\overline{{}_{34}P_{34}X_3}.$$

Die Abbildung 4a enthält die Hilfkonstruktion (s. den Gang der Konstruktion der Abbildung 3.). Zur Bestimmung des N_4 haben wir X_5 verwendet, für dessen Bilder der Zusammenhang $\overline{{}_{12}P_{12}X_5} = 32\,\overline{{}_{34}P_{34}X_5}$ besteht. Die Konstruktion des n_4 kann im wesentlichen auch hier mit der sogenannten „Triederkonstruktion" durchgeführt werden. Die Normale n_4 ist eine auf Punkt P sich anpassende solche Gerade des Unterraumes, der durch die Punkte P, N_0, N_2, X_5 aufgespannt ist, und für welche $n_4 \perp$ auf die Gerade PN_0, und $n_4 \perp$ auf die Gerade PN_2 gilt. Der beliebige Punkt N_4 von n_4 wurde mit Hilfe des Trieders $P(N_0N_2X_5)$ (P ist der Gipfelpunkt des Trieders, $N_0N_2X_5$ sind aber Punkte von je einem Bein) auf der Abbildung 4c. bestimmt.

Das Trieder wurde in der MONGE-Projektion dargestellt ($x_{12} = n_0$) und die echte Länge der Beine wurde aus den entsprechenden Angeben der Abbildung 4.

auf der Abbildung 4b. bestimmt. Es sei auf n_4 der Punkt N_4 beliebig aufgenommen und es sei $S_1 = N_4 X_5 \cap n_0$; die Bilder, des Punktes $D = n_0 \cap N_2 S_1$ werden durch

$$(PN_0 D) = ({}_{12}P\, {}_{12}N_0\, {}_{12}D) = ({}_{34}P\, {}_{34}N_0\, {}_{34}D)$$

die Bilder des Punktes S_1 durch

$$(N_2 D S_1) = ({}_{12}N_2\, {}_{12}D\, {}_{12}S_1) = ({}_{34}N_2\, {}_{34}D\, {}_{34}S_1)$$

die Bilder des Punkte N_4 aber durch die Teilverhältnisse

$$(S_1 X_5 N_4) = ({}_{12}S_1\, {}_{12}X_5\, {}_{12}N_4) = ({}_{34}S_1\, {}_{34}X_5\, {}_{34}N_4)$$

bestimmt. (S. auch die Abbildung 2. des Teils I.)

Literatur

[1] O. Boruvka, Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien á quatre dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **193** (1931), 633—634. Paris.

[2] L. Gyarmathi, A vetítő térelemek alkalmazása a négydimenziós lineáris tér Maurin-féle leképezésében. *Mat. Lapok* (1954), 253—259.

[3] M. Harant, K teórii hyperplanärnych evolvent krivky v E_p. *Acta Fac. Rerorum Mat. Univ. Commenianae Math.* **2** (1957).

[4] M. Harant, K neiktorym vztahom medzi krivostami krivky v E_n. *Acta Fac. Rerum Mat.* **1** (1956), 21—28.

[5] M. Harant, Klinogonálna zobrazovácia metóda v E_4. *Acta Fac. Rerum Mat.* **2**, (1957), 193—217.

[6] M. Harant, Ozobrazéni nadkruznie a nadzávitnie v E_4. a E_5. *Sbornik vysokej skoly dopravnej v Ziline.* (1965).

[7] J. Klima, Deskriptivni geometrie ctyrrozmernéko prostorn. *Sbornik VVT, Brno spis.* **44** (1938).

[8] Maurin, Lecons de la position pour une projection orthogonal dans E_4; *C. R. Acad. Sci. Paris,* (1947)

[9] P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, I. Teil, *Leipzig,* 1902.

[10] M. Syptak, Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espace euclidiens a p-dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris* **195** (1932), 298—299.

(Eingegangen Am. 31. December, 1970.)