Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt II.

Von ZOLTÁN SZABÓ (Debrecen)

Herrn Professor A. Rapcsák zum 60. Geburtstag zugeeignet

Im ersten Teil wurden drei Iterationsverfahren für Lösung nicht-linearer reeller Gleichungen gegeben, die mit den drei Kegelschnitten verbunden sind. Wir werden eine Iterationsfamilie als eine Verallgemeinerung der mit der Berührungsparabel verbundenen Iteration in diesem Teil angeben. Außer der Bestimmung der hinreichenden Bedingung der Konvergenz und der Fehlerschranke der Verfahren werden wir uns mit ihrer Ordnung und ihrem Effektivitätsindex beschäftigen.

Nehmen wir die auf der reellen Zahlengeraden definierte und dort zweimal differenzierbare, von unten konkave Funktion $k(x)$, für welche

$$k''(x) \leqq -n_2 < 0, \quad -\infty < x < \infty$$

gilt. Betrachten wir das Funktionspaar

$$y = \pm c \cdot k(x), \quad c > 0.$$

Im Falle $f(x_0) > 0$ (bzw. $f(x_0) < 0$) schmiegen wir die Funktion $y = c \cdot k(x)$ (bzw. $y = -c \cdot k(x)$) parallel an die Funktion $f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ so an, daß dort auch die Tangenten von beiden Kurven zusammenfallen. Unsere angeschmiegte Funktion hat die Form

$$K(x) = A \pm c \cdot k(x - B).$$

Die Konstanten A und B können aus dem Gleichungssystem

$$f^{(i)}(x_0) = K^{(i)}(x_0), \qquad (i = 0, 1),$$

d.h.

$$f(x_0) = A \pm c \cdot k(x_0 - B),$$

$$f'(x_0) = \pm c \cdot k'(x_0 - B)$$

berechnet werden. Aus der Bedingung $k''(x) < 0$ folgt, daß $k'(x)$ eine streng monoton abnehmende, und deshalb eine invertierbare Funktion ist. So kann der Wert von B aus der zweiten Gleichung folgendermaßen erhalten werden:

$$B = x_0 - k'^{-1}\left(\pm \frac{f'(x_0)}{c}\right).$$

Aus der ersten Gleichung bekommen wir, daß

$$A = f(x_0) \mp c \cdot k\left(k'^{-1}\left(\pm\frac{f'(x_0)}{c}\right)\right).$$

Also ist die Gleichung der Berührungsfunktion $K(x)$

$$(13) \qquad K(x) = f(x_0) \mp c \cdot k\left(k'^{-1}\left(\pm\frac{f'(x_0)}{c}\right)\right) \pm c \cdot k\left(x - x_0 + k'^{-1}\left(\pm\frac{f'(x_0)}{c}\right)\right).$$

Lemma 4. *Wenn die Bedingungen* (2) *erfüllt sind, und außerdem die zweite Ableitung der Funktion* $k(x)$ *überall auf der Zahlengeraden existiert, ferner*

$$k''(x) \leqq -n_2 < 0,$$

$$k(0) = k'(0) = 0$$

und

$$c = \frac{2M_2}{n_2},$$

dann ist der Wert der durch die Gleichung (13) *gegebenen (entsprechenden) Funktion* $K(x)$ *in der Strecke* I *im Fall* $f(x_0) > 0$ *(bzw.* $f(x_0) < 0$*) nicht größer (bzw. nicht kleiner), als* $f(x)$.

Beweis. Es genügt, wenn wir uns auch jetzt nur mit dem Fall $f(x_0) > 0$ beschäftigen, im gegenteiligen Falle kann nämlich die Funktion $-f(x)$ in Betracht genommen werden.

Wird die Bezeichnung

$$(14) \qquad R = k'^{-1}\left(\pm\frac{f'(x_0)}{c}\right)$$

eingeführt, dann nimmt unsere Approximationsfunktion die einfache Form

$$(15) \qquad K(x) = f(x_0) \pm c \cdot [k(x - x_0 + R) - k(R)]$$

an. Nun wenden wir die Taylorsche Formel auf die Funktion $k(x - x_0 + R)$ an: dann wird $K(x)$ die Form

$$(16) \qquad K(x) = f(x_0) \pm c \cdot \left[\pm\frac{f'(x_0)}{c} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} k''(R + \vartheta \cdot (x - x_0)) \cdot (x - x_0)^2\right]$$

haben, wo $0 \leqq \vartheta \leqq 1$. Wir behaupten, daß

$$D(x) = f(x) - K(x) = f(x) - f(x_0) -$$

$$-c\left[\frac{f'(x_0)}{c} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot k''\left(R + \vartheta(x - x_0)\right) \cdot (x - x_0)^2\right]$$

in I nicht negativ ist. Wir wenden den Lagrange'schen Satz auf die Differenz $f(x)-f(x_0)$ an. Die Relation $D(x)\geqq 0$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$f'(\xi)\cdot(x-x_0)\geqq f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{c}{2}\cdot k''\big(R+\vartheta\cdot(x-x_0)\big)\cdot(x-x_0)^2,$$

d.h. wenn

$$[f'(\xi)-f'(x_0)]\cdot\frac{x-x_0}{c}\geqq\frac{1}{2}\cdot k''\big(R+\vartheta\cdot(x-x_0)\big)\cdot(x-x_0)^2,\quad \xi\in[\![x_0,x]\!]$$

gilt. Auf die Differenz der Differentialquotienten von $f(x)$ wenden wir den Satz von Lagrange an:

$$f''(\hat{\xi})\cdot\frac{(x-x_0)(\xi-x_0)}{c}\geqq\frac{1}{2}\cdot k''\big(R+\vartheta\cdot(x-x_0)\big)\cdot(x-x_0)^2,\quad \hat{\xi}\in[\![x_0,\xi]\!].$$

Da die zweite Ableitung von $k(x)$ negativ ist, kann unsere Relation auch in der Form

$$-f''(\hat{\xi})\cdot\frac{(x-x_0)(\xi-x_0)}{c}\leqq\frac{1}{2}\cdot\big|k''\big(R+\vartheta(x-x_0)\big)\big|\cdot(x-x_0)^2$$

aufgeschrieben werden. Gilt $f''(\hat{\xi})\geqq 0$, so ist der Beweis zu Ende. Im gegenteiligen Fall wird die linke Seite der Ungleichung nicht abnehmen, wenn an die Stelle von $(\xi-x_0)$ die Differenz $(x-x_0)$ eingesetzt wird. Nach der Reduktion erhalten wir die Relation

$$|f''(\hat{\xi})|\leqq\frac{c}{2}\cdot\big|k''\big(R+\vartheta\cdot(x-x_0)\big)\big|.$$

Die linke (bzw. rechte) Seite nimmt nicht ab (bzw. zu), wenn wir an die Stelle der absoluten Beträge der zweiten Ableitung die entsprechenden (obenen bzw. untenen) Schranken einsetzen:

$$M_2\leqq\frac{c}{2}\cdot n_2.$$

Die erhaltene Ungleichung besteht wirklich nach der Wahl von c. Damit ist der Beweis beendet.

Zerteilen wir die Funktion $k(x)$ in folgender Weise:

$$k(x)=\begin{cases}k_-(x), & x\leqq 0\\ k_+(x), & x\geqq 0.\end{cases}$$

Aus den Bedingungen des Lemmas 4. folgen die untenstehenden — später erforderlichen — zwei Behauptungen:

A) $k(x)<0,\ x\neq 0;$

B) $k_-(x)$ und $k_+(x)$ sind invertierbar. (Da die Funktionen $k'(x)$, $k_-(x)$ und $k_+(x)$ streng monoton sind, sind die Behauptungen trivial.) Auf deiser Grundlage können wir die Nullstellen der durch (13) gegebenen Berührungsfunktion $K(x)$ bestimmen.

Erstens sei $f(x_0)>0$. Mit Hilfe der Bezeichnung $y=x_1-x_0$ nimmt die Gleichung $K(x_1)=0$ die Form

$$k\left(y+k'^{-1}\left(\frac{f'(x_0)}{c}\right)\right)=-\frac{f(x_0)}{c}+k\left(k'^{-1}\left(\frac{f'(x_0)}{c}\right)\right) \tag{17}$$

an. Laut der Behauptungen A, und B, und aus der Gleichung (17) können die Gleichheiten

$$y+k'^{-1}\left(\frac{f'(x_0)}{c}\right)=k_{\pm}^{-1}\left(-\frac{f(x_0)}{c}+k\left(k'^{-1}\left(\frac{f'(x_0)}{c}\right)\right)\right),$$

d.h.

$$\left.\begin{matrix}x_1'\\x_1\end{matrix}\right\}=x_0-k'^{-1}\left(\frac{f'(x_0)}{c}\right)+k_{\mp}^{-1}\left(-\frac{f(x_0)}{c}+k\left(k'^{-1}\left(\frac{f'(x_0)}{c}\right)\right)\right)$$

erhalten werden. Es ist klar, daß $x_1'\leqq x_0\leqq x_1$. Im Falle $x_1', x_1\in I$ gilt nach Lemma 4, daß

$$K(x)\leqq f(x),\quad x\in[\![x_1', x_1]\!]\subset I,$$

und speziell

$$0=K(x_1')\leqq f(x_1')$$

bzw.

$$0=K(x_1)\leqq f(x_1).$$

Wenn wir unser Verfahren mit dem Abszissenwert x_1 anstatt x_0 fortsetzen, bekommen wir den Punkt x_2. Auf solcher Weise entsteht die monoton zunehmende Iterationsfolge

$$x_0, x_1, x_2, \dots .$$

In Verbindung mit ihrer Konvergenz erwähnen wir auch jetzt die drei möglichen Fälle:

1. $f(x_n)\neq 0,\ x_n\in I\ (n=0, 1, 2, \dots)$.
Dann $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha\in I$ und $f(\alpha)=0$.

2. Für irgendeinen Index $i>0$ gilt $f(x_i)=0,\ x_i\in I$.
Dann $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha=x_{i+p},\ (p=0, 1, 2, \dots)$.

3. Die monotone Folge $\{x_n\}$ verläßt das Intervall I.

Für jeden x-Wert aus dem Intervall $[x_0, \alpha)$ (in den Fällen 1—2.), bzw. aus $[x_0, b)$ (im Fall 3.) gilt $f(x)\neq 0$ nach dem Lemma 4. (Ähnlicherweise kann die abnehmende Folge $x_0, x_1', x_2', \dots$ untersucht werden.)

Auch im Falle $f(x_0)<0$ können ähnliche Überlegungen durchgeführt werden, für die Berechnung von x_1 und x_1' wird jedoch die Formel

$$\left.\begin{matrix}x_1'\\x_1\end{matrix}\right\}=x_0-k'^{-1}\left(-\frac{f'(x_0)}{c}\right)+k_{\mp}^{-1}\left(\frac{f(x_0)}{c}+k\left(k'^{-1}\left(-\frac{f'(x_0)}{c}\right)\right)\right)$$

verwendet.

Die mit der im Intervall I überall konvergenten (d.h. im I divergenzpunktlosen) Methode der konkaven Berührungsfunktionen verbundenen Ergebnisse werden zusammengefaßt im

Satz 4. *Wenn die Voraussetzungen des Lemmas* 4 *erfüllt sind, und* $f(x_0)\neq 0$ *im Ausgangspunkt* $x_0 \in (a, b)$ *gilt, dann strebt die durch die rekursive Formel*

$$x_{n+1} = x_n - k'^{-1}(G) + k_{\pm}^{-1}\left(-\frac{|f(x_n)|}{c} + k\left(k'^{-1}(G)\right)\right) \tag{18}$$

$$\left(\text{wo } G = \operatorname{sgn} f(x_0)\cdot\frac{f'(x_n)}{c}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots\right)$$

bestimmte, monotone Folge $\{x_n\}$ *nach der rechts (bzw. links) von* x_0 *nächstliegenden Nullstelle* $\alpha \in I$ *von* $f(x)$, *falls der Funktionszweig* $k_+(x)$ *(bzw.* $k_-(x)$*) bei der Inversenbildung von* $k(x)$ *konsequent berücksichtigt wird. Im Falle* $\alpha \notin I$ *verläßt die Folge die Strecke* I.

Die Fehlerschranke, die Verwendung und die Charakteristiken der Methode

Bevor wir auf die Untersuchung der Fehlerschranke des Verfahrens eingehen, betrachten wir die Bedingungen

$$f(x_0)\cdot f''(x) \leqq 0,$$

$$f(x_0)\cdot f'(x)\cdot(x_0-\alpha) > 0 \quad x\in [\![x_0, \alpha]\!] = I_1.$$

Laut der zweiten Bedingung hält die stetige Funktion $f'(x)$ ihr Zeichen in der Strecke I_1. Nach der ersten Bedingung hält auch die Funktion $f''(x)$ ihr Zeichen in I_1, demnach ist $f'(x)$ dort monoton. Infolgedessen ist die Relation

$$0 < m_1 = |f'(x_0)| \leqq |f'(x)|, \quad x\in I_1$$

erfüllt.

Die Fehlerabschätzung der Methode der konkaven Funktionen ergibt den

Satz 5. *Wenn die Voraussetzungen des Satzes* 4 *erfüllt sind, ferner*

$$|k''(x)| \leqq N_2, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$f(x_0)\cdot f''(x) \leqq 0,$$

$$f(x_0)\cdot f'(x)\cdot(x_0-\alpha) > 0,$$

$$0 < m_1 \leqq |f'(x)|, \quad x\in [\![x_0, \alpha]\!],$$

dann gilt die Abschätzung

$$|\alpha - x_{n+1}| \leqq \frac{N_2}{2}\cdot\frac{c}{m_1}\cdot(x_{n+1}-x_n)^2 = \frac{M_2 N_2}{m_1 n_2}\cdot(x_{n+1}-x_n)^2 \tag{19}$$

für den Fehler der durch die Iterationsformel (18) *definierten Punktfolge.*

Beweis. Es sei zum Beispiel $f(x_0)>0$, $x_0<\alpha$, $f'(x)<0$ $(x\in [\![x_0, \alpha]\!])$ und $y \overset{\text{df}}{=} x_{n+1}-x_n$.

Wenn wir in der Gleichung (16) der Berührungsfunktion $K(x)$ an die Stelle von x_0 den Wert von x_n einsetzen, erhalten wir aus der Gleichheit $K(x_{n+1})=0$, daß

$$f(x_n) = -f'(x_n)\cdot y - \frac{cy^2}{2}\cdot k''(R+\vartheta y).$$

Anderseits ist die Gleichung

$$f(\alpha)-f(x_n) = f'(\xi)\cdot(\alpha - x_n), \quad \xi\in[x_n, \alpha]$$

nach dem Lagrange'schen Satz erfüllt. Also können die Relationen

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi)} - y = \frac{f'(x_n)\cdot y + \frac{cy^2}{2}\cdot k''(R+\vartheta y)}{f'(\xi)} - y =$$

$$= \frac{[f'(x_n)-f'(\xi)]\cdot y + \frac{cy^2}{2}\cdot k''(R+\vartheta y)}{f'(\xi)}$$

aufgeschrieben werden. Mit Hilfe der Voraussetzungen und des Satzes von Lagrange bekommen wir die Relationen

$$|\alpha - x_{n+1}| = \frac{f''(\hat{\xi})\cdot(\xi - x_n)\cdot y + \frac{cy^2}{2}\cdot |k''(R+\vartheta y)|}{|f'(\xi)|} \leqq$$

$$\leqq \frac{c\cdot|k''(R+\vartheta y)|}{2\cdot|f'(\xi)|}\cdot y^2 \leqq \frac{N_2}{2}\cdot\frac{c}{m_1}\cdot y^2 = \frac{M_2 N_2}{m_1 n_2}\cdot y^2.$$

In den anderen Fällen kann die Behauptung auf ähnlicher Weise bewiesen werden.

Die Anwendung der mit den konkaven Berührungsfunktionen verbundenen Iterationsmethode wird an den folgenden zwei Beispielen demonstriert werden.

A) Die erste, am meistens offenbare Verwendung ist die Methode der Berührungsparabeln. In diesem Fall ist

$$k(x) = -x^2.$$

Die Voraussetzungen des Satzes 4 sind erfüllt, es ist nämlich

$$k(0) = k'(0) = 0$$

und

$$k''(x) = -2.$$

Im Hinblick darauf, daß in unserem Fall

$$N_2 = n_2 = 2,$$

$$c = M_2,$$

$$k'^{-1}(z) = -\frac{z}{2},$$

$$k_{\pm}^{-1}(z) = \pm\sqrt{-z}$$

gelten, können das Lemma 2 und der Satz 2 als die speziellen Fälle der bei der Methode der konkaven Funktionen erhaltenen entsprechenden Ergebnisse betrachtet werden.

B) Als zweite Anwendung wird die von unten konkave Funktion

$$k(x) = 1 - \operatorname{ch} x$$

genommen. Die entsprechenden Bedingungen des Satzes 4 sind erfüllt, nämlich die Relationen

$$k(0) = k'(0) = 0$$

und

$$k''(x) \leqq -1$$

gelten. Infolgedessen ist die Iteration (18) bei der den Bedingungen genügenden Funktion $f(x)$ konvergent, falls

$$c = \frac{2M_2}{n_2} = 2M_2$$

ist.

Nun bestimmen wir die rekursive Formel. Da $k'^{-1}(z) = \operatorname{arsh}(-z)$ ist, darum gilt

$$x_{n+1} = x_n - \operatorname{arsh}(-G) + k_{\pm}^{-1}\left(-\frac{|f(x_n)|}{c} + 1 - \operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(-G))\right),$$

wo

$$G = \operatorname{sgn} f(x_0) \cdot \frac{f'(x_n)}{c}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$-\operatorname{arsh}(-G) = \operatorname{arsh}(G)$$

und

$$k_{\pm}^{-1}(z) = \operatorname{arch}(1-z),$$

nimmt die Iterationsformel die Gestalt

$$x_{n+1} = x_n + \operatorname{arsh}(G) + \operatorname{arch}\left(\frac{|f(x_n)|}{c} + \operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(-G))\right)$$

an. Mit der Hilfe der Identität

$$\operatorname{arsh} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$$

kann man leicht einsehen, daß die Gleichheit

$$\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(-G)) = \sqrt{G^2+1}$$

erfüllt ist. Also kann unsere Formel in der Form

$$x_{n+1} = x_n + \operatorname{arsh}(G) + \operatorname{arch}\left(\frac{|f(x_n)|}{c} + \sqrt{G^2+1}\right)$$

aufgeschrieben werden. Die erhaltene Iterationsfolge $\{x_n\}$ konvergiert nach der rechts (bzw. links) vom Anfangspunkt x_0 nächstliegenden Nullstelle $\alpha \in I$ von $f(x)$, falls der positive (bzw. negative) Wert der Funktion arch x konsequent berücksichtigt wird.

Zum Zwecke der Verwendbarkeit an der elektronischen Maschine modifizieren wir die Formel auf folgender Weise. Mit der Benützung der logaritmischen Form der areahyperbolischen Funktionen erhalten wir die Formel

$$x_{n+1} = x_n + \ln\left(G + \sqrt{G^2+1}\right) + \ln\left(\frac{|f(x_n)|}{c} + \sqrt{G^2+1} \pm \sqrt{\left(\frac{|f(x_n)|}{c} + \sqrt{G^2+1}\right)^2 - 1}\right).$$

Nach dem Reduktionen und Umformungen ergibt sich die Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n + \ln \frac{H \pm \sqrt{H^2 - c^2}}{F - s \cdot f'(x_n)},$$

wo

$$s = \operatorname{sgn} f(x_0), \quad c = 2M_2,$$

$$F = \sqrt{c^2 + f'^2(x_n)} \quad \text{und} \quad H = |f(x_n)| + F$$

ist. Auch auf expliziter Weise ihrer Bezeichnung enthält diese Formel die Zweiwertigkeit von arch x.

Die Definition einer der wichtigen Charakteristiken der Iterationen, der Ordnung von Konvergenz ist bekannt: wenn es bei der Iteration

$$x_{n+1} = F_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

eine solche reelle Zahl $p \geqq 1$ gibt, für welche der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p}$$

existiert und sich bei einer allgemeiner Funktion $f(x)$ von Zero unterscheidet, dann sagt man, daß das Verfahren in p-Ordnung konvergent ist, oder, daß das Verfahren von der Ordnung p ist. Es kann leicht bewiesen werden (s. [1]), daß die Ordnung p der beliebigen stationären, sich auf einen Basispunkt stützenden Iteration $x_{n+1} = F(x_n)$ eine natürliche Zahl ist. Und zwar ist diese Iteration von der Ordnung p dann und nur dann, wenn die Relationen

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F^{(j)}(\alpha) = 0 \ (1 \leqq j < p), \quad F^{(p)}(\alpha) \neq 0 \tag{20}$$

erfüllt sind. Mit der Hilfe dieser Bedingungen werden wir bald die Ordnung der mit der Methode der konkaven Funktionen verbundenen Iterationen bestimmen.

Die andere wichtige Charakteristik der Iterationen ist die Effizienz oder die Effektivität. Als ihr Maß wird der Ausdruck $\text{Eff} = \frac{p}{q}$ genommen, wo q die Anzahl der in einem Iterationsschritt berechneten neuen Funktionswerte $f^{(k)}(x_j)$ ist, und p die Ordnung der Iteration ist. Nach dem Grundsatz der sich auf einen Basispunkt stützenden Iterationen (s. [3], Seite 98.) ist die Ungleichung

$$\text{Eff} \leqq 1 \tag{21}$$

im Fall jeder solchen Iteration erfüllt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Bedingungen $f(x_0)>0$ und $x_0<\alpha$ vorausgesetzt werden. Dann hat unsere Iterationsfunktion die Form

$$F(x) = x - k'^{-1}\left(\frac{f'(x)}{c}\right) + k_+^{-1}\left(-\frac{f(x)}{c} + k\left(k'^{-1}\left(\frac{f'(x)}{c}\right)\right)\right).$$

Offenbar gilt hier $F(\alpha)=\alpha$. Mit der Einführung der Bezeichnung $g(x)=\dfrac{f(x)}{c}$ erhalten wir die Gleichheit

$$F'(x) = 1 - \frac{g''(x)}{k''(k'^{-1}(g'(x)))} + \frac{g''(x)\cdot k'(k'^{-1}(g'(x)))\cdot \dfrac{1}{k''(k'^{-1}(g'(x)))} - g'(x)}{k'[k_+^{-1}(k(k'^{-1}(g'(x))) - g(x))]},$$

woher

$$F'(\alpha) = 1 - \frac{g''(\alpha)}{k''(k'^{-1}(g'(\alpha)))} + \frac{\dfrac{g'(\alpha)\cdot g''(\alpha)}{k''(k'^{-1}(g'(\alpha)))} - g'(\alpha)}{g'(\alpha)} = 0,$$

falls $f'(\alpha)\neq 0$, d.h. α eine einmalige Nullstelle von $f(x)$ ist. Nach den Relationen (20) ist also die Ordnung p des Verfahrens nicht kleiner als 2. Da aber $q=2$ ist, ist p nach der Ungleichung (21) nicht größer als 2. Infolgedessen sind die mit der Methode der konkaven Berührungsfunktionen erhaltenen gleichungslösenden Iterationen in zweiter Ordnung konvergent, außerdem ist ihrer Effektivitätsindex 1 (d. h. maximal), wie z. B. bei der Newton—Raphson'schen Tangentenmethode.

Herrn Professor B. Barna danke ich für die Hilfe, die er meiner Arbeit angedeihen ließ.

Literatur

[1] A. Ralston, A first course in numerical analysis, *McGraw-Hill, Inc.*, 1965.
[2] Z. Szabó, Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt I, *Publ. Math. (Debrecen)* **20** (1973), 223—233.
[3] J. F. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations, *Prentice—Hall*, 1964.

(Eingegangen am 3. September, 1973.)