Über die Konstruktion überall stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen, II.

Von S. KÁNTOR (Debrecen)

Herrn Professor A. Rapcsák anläßlich seines 60. Geburstages in Verehrung gewidmet

Jede Konstruktion, die eine überall stetige, nirgends differenzierbare Funktion gibt, führt auf Funktionen, die stark nicht differenzierbar sind, d.h. der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Wert der Dinischen Ableitungszahlen in jedem Punkt bleibt größer als eine gegebene Zahl [2]. Bekanntlich ist die Klasse der stetigen und stark nicht-differenzierbaren Funktionen mit einer leicht charakterisierbaren Klasse der Polygongrenzfunktionen identisch, bei welcher der Unterschied der Funktionen kleiner als die Glieder einer konvergenten unendlichen Reihe mit positiven Gliedern ausfällt, und der Unterschied der Richtungstangenten der Geradenstrecken größer als eine positive Zahl ist [1].

Wir geben in diesem zweiten Teil diejenige Klasse der Polygongrenzfunktionen an, die mit der Klasse der überall stetigen, nirgends differenzierbaren Funktionen übereinstimmt.

Danach werden wir eine Funktion definieren, die zeigt, daß die Klasse der überall stetigen, nirgends differenzierbaren Funktionen umfassender ist, als die der überall stetigen, stark nicht-differenzierbaren Funktionen. Weiterhin erklärt diese Funktion die Ursachen der Verschiedenheit der Konst-uktion von beiden Funktionenklassen.

Definitionen und Bezeichnungen

Die Funktionen werden — ohne Beschränkung der Allgemeinheit — im Intervall [0, 1] definiert. Die offenen und geschlossenen Intervalle werden gebräuchlicherweise mit runden, bzw. mit eckigen Klammern bezeichnet. Mit $\vartheta_f(x_0)$ symbolisieren wir den Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Wert der Dinischen Zahlen einer Funktion $f(x)$ in dem Punkt x_0. Es ist $\vartheta_f(x_0) \geqq k$ für jedes k, wenn in x_0 unter den Dinischen Zahlen $+\infty$ oder $-\infty$ auftritt. Wir nennen die Funktion $f(x)$ auch dann nicht differenzierbar in x_0, wenn dort der Differentialquotient $\pm\infty$ ist. Es wird $f(x)$ stark nicht-differenzierbar genannt, wenn es eine Zahl $k>0$ mit $\vartheta_f(x) \geqq k$ überall in [0, 1] gibt.

Die zu den Punkten $P_i(p_i, p_i')$ $(i=1, 2, \dots, n;\, p_i<p_{i+1})$ gehörige Polygon-

funktion ist

$$\tau(x) = \frac{p'_{i+1}-p'_i}{p_{i+1}-p_i}(x-p_i)+p'_i, \quad p_i \leqq x \leqq p_{i+1}.$$

Die Punkte P_i sind die *Eckpunkte*, $\overline{P_i P_{i+1}}$ heißen die *Strecken* der Polygonfunktion.

Wenn $i=1, 2, \ldots$ in inf, (also hat die Funktion unendlich viele Strecken), so nennen wir die Funktion unendliche Polygonfunktion.

Wir sagen: "die Strecke $\overline{AB}$ der Punkte $A(a, a')$ und $B(b, b')$ liegt über dem Punkt x", wenn $a \leqq x \leqq b$ gilt. Das Intervall $[a, b]$, d.h. die orthogonale Projektion der Strecke $\overline{AB}$ auf die x-Achse (und auch die Länge derselben) werden wir mit $(\overline{AB})_x$ bezeichnen. Ist $f(a)=a'$ und $f(b)=b'$ für irgendeine Funktion $f(x)$, so gebrauchen wir die Bezeichungen

$$\operatorname{tg} AB = \operatorname{tg}_f(a, b) = \frac{b'-a'}{b-a}.$$

Sind $t_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots)$ im $[0, 1]$ definierte Polygonfunktionen und ist jeder Eckpunkt von $t_i(x)$ auch ein solcher von $t_{i+1}(x)$, so heißt

$$t(x) = \lim_{i\to\infty} t_i(x)$$

— wenn es existiert — eine *Polygongrenzfunktion*. Die Richtungstangente der Strecke der Polygonfunktion $t_i(x)$ über x wird mit $\lambda_i(x)$ bezeichnet. Im allgemeinen hat $\lambda_i(x)$ in einem Eckpunkt zwei Werte.

Die Polygongrenzfunktion $t(x) = \lim\limits_{i\to\infty} t_i(x)$ werden wir mit den Parametern λ, ϱ_i $(i=1, 2, \ldots)$ versehen, wenn die folgenden Annahmen gelten:

a) $|t_{i+1}(x)-t_i(x)| \leqq \varrho_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wo $\sum \varrho_i$ konvergiert;

b) $|\lambda_{i+1}(x)-\lambda_i(x)| \geqq \lambda > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ für jedes $x \in [0, 1]$

(in einem Eckpunkt soll dies mit wenigstens einem Wert von $\lambda_i(x)$ bzw. $\lambda_{i+1}(x)$ gelten).

Wir sprechen über eine Polygongrenzfunktion $T(x)$ mit Parametern $\lambda(x)$, ϱ_i $(i=1, 2, \ldots)$, wenn die Bedingungen

A) $|T_{i+1}(x)-T_i(x)| \leqq \varrho_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wo $\sum \varrho_i$ konvergiert;

B) $\limsup \lambda_i(x) - \liminf \lambda_i(x) \geqq \lambda(x) > 0$ für jedes $x \in [0, 1]$ gelten. (In einem Eckpunkt soll dies mit wenigstens einem Wert von $\lambda_i(x)$ gelten.)

§ 3. Die allgemeine Konstruktion

Wir haben in [1] bewiesen, daß die Klasse der stetigen und stark nicht-differenzierbaren Funktionen mit der Klasse der Polygongrenzfunktionen mit Parametern λ, ϱ_i identisch ist.

In diesem § bewiesen wir zwei Sätze, welche zusammen ausdrücken, daß die

Klasse der überall stetigen, nirgends differenzierbaren Funktionen mit der Klasse der Polygongrenzfunktionen mit Parametern $\lambda(x)$, ϱ_i identisch ist.

Satz 1. *Ist $T(x)$ eine Polygongrenzfunktion mit Parametern $\lambda(x)$, ϱ_i, so ist sie überall stetig und nirgends differenzierbar.*

Beweis. Die Funktion $T_i(x)$ ist für jedes i stetig, deswegen ist auch $T_{i+1}(x)-T_i(x)$ stetig. Es ist $|T_{i+1}(x)-T_i(x)| \leqq \varrho_i$ und $\sum\varrho_i$ konvergiert, daher existiert $T(x)$ und es ist stetig.

Um zu zeigen, daß die Funktion $T(x)$ in keinem Punkt differenzierbar ist, beweisen wir zuerst, daß (die Strecken über x_0 der gegen $T(x)$ konvergierenden $T_i(x)$-Funktionen mit $\overline{A_iB_i}$ bezeichnend) die Längen $(\overline{A_iB_i})_{x_0}$ nach 0 konvergieren. Im entgegengesetzten Fall nämlich ist in dem weitesten Intervall $[A, B]$, welches im Inneren von unendlich vieles $(\overline{A_iB_i})_{x_0}$ liegt, die Funktion $T(x)$ linear, und dies widerspricht der Annahme, daß für jedes x $\lambda(x)>0$ gilt.

Es liegt also von einem Index i an $(\overline{A_iB_i})_{x_0}$ in jeder Umgebung von x_0, und so besteht wegen B)

$$\vartheta_T(x_0) \geqq \lambda(x_0) > 0$$

d.h. die Funktion $T(x)$ ist im Punkt x_0 nicht differenzierbar.

Satz 2. *Ist die Funktion $f(x)$ überall stetig und nirgends differenzierbar, so gibt es zu jeder konvergenten Reihe $\sum\varrho_i$ mit positiven Gliedern solche positive Funktion $\lambda(x)$, und es existieren solche $T_i(x)$ Polygonfunktionen, daß $T(x) = \lim\limits_{i\to\infty} T_i(x)$ eine Polygongrenzfunktion mit Parametern $\lambda(x)$, ϱ_i ist, und $T(x) = f(x)$ gilt.*

Der Beweis besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil bezeichnen wir gewisse Teilmengen im $[0, 1]$ mit der Hilfe der Funktion $f(x)$, und untersuchen die Eigenschaften dieser Teilmengen. Im zweiten Teil definieren wir über diesen Teilmengen unendliche Polygonfunktionen. Im dritten Teil definieren wir die gesuchten Funktionen $T_i(x)$.

I. Wir bezeichnen $H(\varkappa)$ die Vereinigung der Teilintervalle $[\alpha, \beta]$ des fixen Intervalls $[a, b]\supseteqq[0, 1]$, für die

$$|\mathrm{tg}_f(\alpha, \beta)-\mathrm{tg}_f(a, b)| \geqq \varkappa \tag{1}$$

besteht. Es ist leicht einzusehen, daß wenn die Menge $H(\varkappa)$ nicht leer ist, sie eine Vereinigung von höchstens abzählbar unendlich vielen, disjunkten (offenen, geschlossenen oder halboffenen) Intervallen $\langle u, v\rangle$, welche die folgende Eigenschaft haben:

Das Punktpaar $x, y (x, y\in[a, b])$ ist dann und nur dann Element eines Intervalls $\langle u, v\rangle$, wenn endlich viele solche Intervalle

$$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \dots, [\alpha_k, \beta_k]$$

mit Eigenschaft (1) existieren, für die

$$\alpha_1 \leqq x < \alpha_2 \leqq \beta_1 < \alpha_3 \leqq \beta_2 < \dots < y \leqq \beta_k \tag{2}$$

gelten.

Die Eigenschaft des Intervalles $\langle u, v\rangle$ drückt offensichtlich aus, daß jedes Teilintervall $[x, y]$ von endlich vielen Intervallen mit Eigenschaft (1) schlicht bedeckt werden kann, d.h. so, daß keines der Teilintervalle überflüssig ist.

Wir beweisen, daß das ganze Intervall $\langle u, v\rangle$ durch höchstens abzählbar unendlich viele Intervalle mit der Eigenschaft (1) schlicht bedeckt werden kann.

Ist das Intervall $\langle u, v\rangle$ geschlossen, dann kann die Bedeckung durch die Wahl $x=u$, $y=v$ bereits mit endlich vielen Intervallen erreicht werden.

Ist $\langle u, v\rangle$ von links geschlossen und von rechts offen, dann gibt es ein System von abzählbar unendlich vielen $[\alpha_i, \beta_i]$-Intervallen mit der Eigenschaft (1):

$$u=\alpha_1<\alpha_2\leqq\beta_1<\alpha_3\leqq\beta_2<\dots;\ \lim_{i\to\infty}\beta_i=v. \tag{3}$$

Wenn nämlich bei den den Punkt u enthaltenden Intervallen $[\alpha, \beta]$ der Eigenschaft (1) $\alpha_1=u$, $\sup\beta=\beta_1$ ist, so hat $[\alpha_1, \beta_1]$ wegen der Stetigkeit von $f(x)$ und $\operatorname{tg} x$ die Eigenschaft (1).

Ganz ähnlich sieht man ein, daß wenn $\alpha\leqq\beta_1<\beta$ und $[\alpha, \beta]$ die Eigenschaft (1) hat, dann gibt es α_2 zum $\beta_2=\sup\beta$ so, daß $[\alpha_2, \beta_2]$ die Eigenschaft (1) hat, und $\alpha_1<\alpha_2$, $\alpha_2\leqq\beta_1$ gelten. So fortfahrend bekommen wir Intervalle $[\alpha_i, \beta_i]$, für die die Eigenschaften (1) und (3) offenbar bestehen. Die Ungleichheit $\lim_{i\to\infty}\beta_i<v$ führt zum Widerspruch, weil das Intervall der Punkte $x\in[\alpha_1, \beta_1]$, $y=\lim_{i\to\infty}\beta_i$ bereits mit endlich vielen Intervallen bedeckt werden kann.

Wenn das Intervall $\langle u, v\rangle$ von links offen und von rechts geschlossen ist, so sieht man ähnlich ein, daß abzählbar viele Intervalle $[\alpha_i, \beta_i]$ der Eigenschaft (1) mit

$$v=\beta_{-1}>\beta_{-2}\geqq\alpha_{-1}>\beta_{-3}>\dots,\ \lim_{i\to\infty}\alpha_i=u \tag{4}$$

existieren.

Ist $\langle u, v\rangle$ ein offenes Intervall, dann gibt es Systeme abzählbar unendlich vieler Intervalle $[\alpha_i, \beta_i]$ mit

$$\dots\alpha_i<\alpha_{i+1}\leqq\beta_i<\alpha_{i+2}\dots,\ \lim_{i\to-\infty}\alpha_i=u,\ \lim_{i\to\infty}\beta_i=v. \tag{5}$$

II. Wir beweisen, daß über dem Intervall $\langle u, v\rangle$ solche im allgemeinen unendliche Polygonfunktionen $\varphi(x, \varkappa)$ definiert werden können, für welche

$$\varphi(x,\varkappa)=\frac{q'_{i+1}-q'_i}{q_{i+1}-q_i}(x-q_i),\quad \text{wenn}\quad q_i\leqq x\leqq q_{i+1},$$

und

$$\left|\operatorname{tg}_f(a,b)-\frac{q'_{i+1}-q'_i}{q_{i+1}-q_i}\right|\geqq\frac{\varkappa}{3} \tag{6}$$

gelten, wo $q_i<q_{i+1}, f(q_i)=q'_i$, und entsprechend den Bedeckungssystemen mit Eigenschaft (2), (3), (4), bzw. (5),

$$q_1=u,\quad q_n=v \tag{2'}$$

$$q_1=u,\quad \lim_{i\to\infty}q_i=v\quad (i=1,2,\dots) \tag{3'}$$

$$\lim_{i\to-\infty}q_i=u,\quad q_{-1}=v\quad (i=-1,-2,\dots) \tag{4'}$$

$$(5') \qquad \lim_{i\to-\infty} q_i = u, \quad \lim_{i\to\infty} q_i = v \quad (i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

besteht.

Die Existenz solcher Funktion $\varphi(x, \varkappa)$ im Falle eines Systems von Eigenschaft (2) folgt aus dem Hilfssatz des Satzes 3. von [1] (S. 118). Modifiziert man das Lemma für $n=\infty$, $\lim_{i\to\infty} b_i=v$ geringfügig, so sieht man z. B. die Existenz dieser Funktion auch im Falle des Systems von Eigenschaft (3) ein. Gebrauchen wir nämlich die Bezeichnungen des erwähnten Hilfssatzes. Es genügt uns mit dem Fall zu beschäftigen, wenn für $i=1, 2, \dots$ die Behauptungen 1_i—2_i—3_i—4_i und (16) gelten. Im Gegenteil finden wir nach endlich vielen Schritten eine solche Strecke $\overline{A_1A_i}$ oder solches Paar von Strecken $\overline{A_1B_i}$, $\overline{B_iA_{i+1}}$, für die die Ungleichung (16) im [1] besteht. Dann kann man, ausgehend von einem neuen Punkt, die Funktion $\varphi(x, \varkappa)$ bilden.

Wenn die Behauptungen 1_i—2_i—3_i—4_i $(i=1, 2, \dots)$ gelten, ist $\lim_{i\to\infty} B_i=(v, f(v))$ wegen $\lim_{i\to\infty} (\overline{P_iP_{i+1}})_x = 0$, und somit bedeuten $C_1=A$, $C_2=(v, f(v))$ den Beweis des Hilfssatzes.

Bei den Systemen mit den Eigenschaften (4) und (5) können wir die Existenz der Funktion $\varphi(x, \varkappa)$ ebenso erklären.

Bemerkung. Wir nehmen eine andere Menge $H(\varkappa')$ $(\varkappa' \leqq 10\varkappa)$ im Intervalle $[a, b]$ auf. Es sei

$$H(\varkappa') \supseteqq \langle u_1, v_1\rangle \supseteqq \langle u, v\rangle.$$

Wir möchten erreichen, daß die Eckpunkte der Funktion $\varphi(x, \varkappa')$ über $\langle u, v\rangle$ auch die Eckpunkte der Funktion $\varphi(x, \varkappa)$ sind. Man soll aber für solche Funktion die Eigenschaften (1) und (6) modifizieren:

$$(1') \qquad |\mathrm{tg}_f(\alpha_i, \beta_i) - \mathrm{tg}_f(a, b)| \geqq \frac{\varkappa'}{5}$$

$$(6') \qquad \left|\mathrm{tg}_f(a, b) - \frac{q'_{i+1}-q'_i}{q_{i+1}-q_i}\right| \geqq \frac{\varkappa'}{15}.$$

Es genügt uns mit dem Beweis der Existenz solcher Intervallen über den Punkten u und v zu beschäftigen, weil daraus die Existenz des Intervallsystems $[\alpha_i, \beta_i]$ und die Existenz der Funktion $\varphi(x, \varkappa')$ folgt. Unser Verfahren wird z. B. bei dem linkseitigen Eckpunkt so ausgeführt:

Es seien $\alpha \leqq u < \beta < v$ gegeben, wo

$$|\mathrm{tg}_f(\alpha, \beta) - \mathrm{tg}_f(a, b)| \geqq \varkappa'.$$

Es seien c_1 und c_2 die Abszissenwerte der Endpunkte der Strecke $\overline{C_1C_2}$ von $\varphi(x, \varkappa)$ über β, also

$$|\mathrm{tg}_f(c_1, c_2) - \mathrm{tg}_f(a, b)| \geqq \frac{\varkappa}{15}.$$

Ist die Ungleichung

$$|\mathrm{tg}_f(\alpha, c_1) - \mathrm{tg}_f(a, b)| \geqq \frac{\varkappa'}{5}$$

oder die Ungleichung

$$|\mathrm{tg}_f(\alpha, c_2) - \mathrm{tg}_f(a, b)| \geqq \frac{\varkappa'}{5}$$

gültig, dann brauchen wir statt des Intervalls $[\alpha, \beta]$ die Intervalle $[\alpha, c_1]$ und $[c_1, c_2]$ oder das Intervall $[\alpha, c_2]$. Sind beide dieser Ungleichungen ungültig, dann beweisen wir, daß bestehen:

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} |\mathrm{tg}_f(c_1, \beta) - \mathrm{tg}_f(a, b)| \geqq |\mathrm{tg}_f(c_1, c_2) - \mathrm{tg}_f(a, b)| \\ |\mathrm{tg}_f(\beta, c_2) - \mathrm{tg}_f(a, b)| \geqq |\mathrm{tg}_f(c_1, c_2) - \mathrm{tg}_f(a, b)|. \end{cases}$$

In diesem Fall brauchen wir statt des Intervalls $[c_1, c_2]$ die Intervalle $[c_1, \beta]$ und $[\beta, c_2]$.

Dies werden wir wiederum durch eine Veränderung des genannten Hilfssatzes zeigen. Die Richtungstangente der aus dem Punkt $P_0 = A(\alpha, f, (\alpha))$ ausgehenden Halbgeraden h sei $\mathrm{tg}_f(a, b)$; von dieser sollen die Richtungstangente der ebenfalls aus P_0 ausgehenden Halbgeraden e_0 und g um $\frac{\varkappa'}{5}$ abweichen. (Figur 1.) Jetzt betrachten wir den Fall $\mathrm{tg}_f(\alpha, \beta) \leqq \mathrm{tg}_f(a, b)$, ebenso diskutiert man auch den Fall $\mathrm{tg}_f(\alpha, \beta) \geqq \mathrm{tg}_f(a, b)$. Es sei $E' = B(\beta, f(\beta))$, und die Abszisse der auf Halbgeraden e_0, h bzw. g liegenden Punkte E, H bzw. G: β.

Für die weiteren Punkte R und S der Halbgeraden g der Reihe nach

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} \mathrm{tg}\, RE - \mathrm{tg}_f(a, b) = \dfrac{\varkappa}{15} \\[2ex] \mathrm{tg}_f(a, b) - \mathrm{tg}\, ES = \dfrac{\varkappa}{15} \end{cases}$$

bestehen.

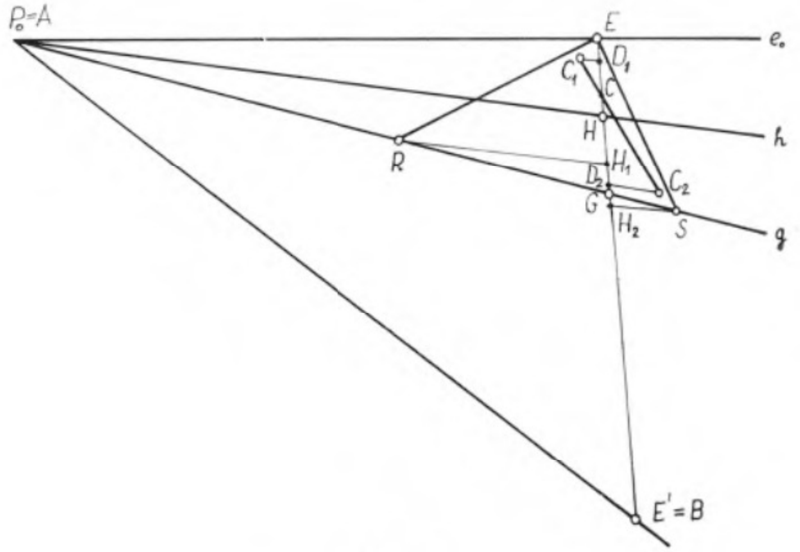

Fig. 1.

Die Parallelen zur Geraden h durch die Punkte R bzw. S schneiden die Gerade EE' der Reihe nach in den Punkten H_1 bzw. H_2. Nach der Beschränkung der Richtungstangente sieht man, daß

$$\frac{\overline{EH}_2}{(\overline{SG})_x} = \frac{\varkappa}{15}, \quad \frac{\overline{GH}_2}{(\overline{SG})_x} = \frac{\varkappa'}{5}$$

also

$$\overline{EH}_2 = \frac{\varkappa}{3\varkappa'}\,\overline{GH}_2 \geqq \frac{10}{3}\,\overline{GH}_2 = \frac{10}{3}\,(\overline{EH}_2 - \overline{EG}).$$

Daraus folgt:

$$\overline{EH}_2 \leqq \frac{10}{7}\,\overline{EG}.$$

Andernteils

$$\overline{E'H} \geqq 5\overline{HG}, \quad 2\overline{HG} = \overline{EG} \quad \text{und} \quad \overline{GH}_2 = \overline{EH}_2 - \overline{EG} \leqq \frac{3}{7}\,\overline{EG}.$$

Daraus folgt:

$$\overline{E'H}_2 = \overline{E'H} - \overline{HG} - \overline{GH}_2 \geqq 5\overline{HG} - \overline{HG} - \overline{GH}_2 \geqq$$

$$\geqq 2\overline{EG} - \frac{3}{7}\,\overline{EG} = \frac{11}{7}\,\overline{EG}.$$

Also es gilt:

$$\overline{EH}_2 < \overline{E'H}_2.$$

Zieht man durch C_1 und C_2 die Parallele zu h, von welchen EE' in den Punkten D_1 bzw. D_2 geschnitten wird, und ist C der Schnittpunkt der Strecke $\overline{C_1C_2}$ mit derselben Gerade EE', so wegen (8) und $|\mathrm{tg}_f\,(c_1, c_2) - \mathrm{tg}_f\,(a, b)| \geqq \frac{\varkappa}{15}$ liegen die drei Schnittpunkte auf der Strecke $\overline{EH}_2$, d.h.

$$\overline{CD}_1 \leqq \overline{EH}_2 \leqq \overline{E'H}_2 \leqq \overline{E'D}_1 \quad \text{und} \quad \overline{CD}_2 \leqq \overline{EH}_2 \leqq \overline{E'H}_2 \leqq \overline{E'D}_2.$$

Daraus folgen aber die zu beweisenden Ungleichungen (7).

Es ist leicht einzusehen: wenn wir eine neue Menge $H(\varkappa'')$ $(\varkappa'' \leqq 10\varkappa')$ aufnehmen, dann existiert eine Funktion $\varphi(x, \varkappa'')$, für die die Eckpunkt-Bedingungen und die Ungleichungen (1'), (6') mit dem Wert $\varkappa''$ erfüllt werden.

III. Es sei $T_1(x) = f(0) + x\big(f(1) - f(0)\big)$.

Zu dem gegebenen stetigen und nicht-differenzierbaren $f(x)$ und zu den gegebenen Zahlen $\varrho_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ existieren — wegen der gleichmäßigen Stetigkeit — solche Zahlen r_i, für die $r_{i-1} - r_i > 0$, $\lim\limits_{i \to \infty} r_i = 0$ bestehen, und aus $|x - y| \leqq r_i$ folgt $|f(x) - f(y)| \leqq \varrho_i$. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ solche Zahlen, für die

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$$

und

$$|x_{k+1} - x_k| < r_2 \quad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

gelten. Wir nehmen in jedem Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$ die Menge $H(1)$ und in jedem

Teilintervall $\langle u, v\rangle$ desselben eine Funktion $\varphi(x, 1)$ auf. Sind ξ_i beliebige Zahlen mit

$$x_k = \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m = x_{k+1}$$

für welche

(9) $\langle \xi_j, \xi_{j+1}\rangle$ entweder ein Teilintervall vom Typ $\langle u, v\rangle$ der Menge $H(1)$,

(10) oder $\xi_{j+1}-\xi_j \leqq r_4$ und ξ_j, ξ_{j+1} keine inneren Punkte von $H(1)$ sind.

Im vorigen Fall wählt man solche Werte $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ mit

$$\xi_j = \alpha < \beta < \alpha_1 < \beta_1 = \xi_{j+1},$$

für die die Relationen

$$|\alpha-\beta| \leqq r_4, \quad |\alpha_1-\beta_1| \leqq r_4,$$

$$|\operatorname{tg}_f(x_k, x_{k+1}) - \operatorname{tg}_f(\alpha, \beta)| \geqq \frac{\vartheta_f^+(\xi_j)}{3} = \varkappa',$$

$$|\operatorname{tg}_f(x_k, x_{k+1}) - \operatorname{tg}_f(\alpha_1, \beta_1)| \geqq \frac{\vartheta_f^-(\xi_{j+1})}{3} = \varkappa_1'$$

bestehen.

Die Intervalle $[\alpha, \beta]$, $[\alpha_1, \beta_1]$ modifizieren wir auf Grund der zur Konstruktion der Funktion φ hinzugefügten Bemerkung. Wir engen das Intervall $\langle \xi_j, \xi_{j+1}\rangle$ durch diesen Intervalle, und so bekommen wir das Interwall $[\xi_j', \xi_{j+1}']$.

$T_2(x)$ sei im Teilintervall $[\xi_j', \xi_{j+1}']$ der Intervalle $\langle \xi_j, \xi_{j+1}\rangle$ mit Eigenschaft (9) die erwähnte Funktion $\varphi(x, 1)$, in $[\xi_j, \xi_j']$, $[\xi_{j+1}, \xi_{j+1}]$ und im Intervall $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ mit Eigenschaft (10) die Verbindungsstrecke der zu den Endpunkten gehörigen $f(x)$-Bildpunkte.

Jede Strecke der Funktion $T_2(x)$ kann zu einem der drei folgenden Typen gehören:

ein Teil der Funktion $\varphi(x, 1)$, wo die Beschränkung für die Richtungstangente gilt;

die Strecke über $[\xi_j, \xi_j']$ oder $[\xi_{j+1}', \xi_{j+1}]$, wo die für die Richtungstangente gemachte Beschränkung durch eine $\varphi(x, 1)$-Funktion vorbereitet wurde;

und endlich die Strecken über den Intervallen von Typ (10), wo es für die Richtungstangente keine Beschränkung gibt, und eine solche nicht vorbereitet ist.

Entsprechend diesen drei Fällen wird die Funktion $T_n(x)$ über den Intervallen der $T_{n-1}(x)$ definiert.

1. Ist eine Strecke von $T_{n-1}(x)$ eine Strecke irgendeiner Funktion $\varphi(x, 10^k)$ (k ganz), dann konstruieren wir in diesem Intervall die Funktion $T_n(x)$ mit den Zahlen 10^{k+1}, r_n und r_{2n} so, wie das $T_2(x)$ im $[0, 1]$ mit 1, r_2 und r_4 konstruiert wurde. Wir verteilen also den Defininitionsbereich auf kleinere Intervalle als r_n, (dieser Schritt des Verfahrens ist nur dann wesentlich, wenn die Strecke der Funktionen $T_i(x)$ ($i<n-1$) zum Typ (9) gehören, weil der Definitionsbereich in dem anderen Fall kleiner als r_n ist), zeichnen wir die Menge $H(10^{k+1})$ und auf dieser die Funktionen $\varphi(x, 10^{k+1})$ aus. Entweder diese Funktion, oder eine lineare Funktion in einem Intervall, das kleiner als r_{2n} ist, wird dann die Funktion $T_n(x)$ sein.

2. Liegt eine Strecke der Funktion $T_{n-1}(x)$ über unendlich vielen Intervallen einer Funktion $\varphi(x, 10^k)$ (k ganz), so ist sie linear über Intervallen von Typ $[\xi_j, \xi_j']$ oder $[\xi_{j+1}', \xi_{j+1}]$. Wir konstruieren dann in diesem Intervall die Funktion $T_n(x)$ mit der Zahl r_{2n} so, wie die Funktion $T_2(x)$ mit r_4 in dem halbgeschlossenen $\langle \xi_j, \xi_{j+1}\rangle$

vom Typ (9) konstruiert wurde. Wir zeichnen also die Intervalle $[\xi_j, \xi_j'']$ oder $[\xi_{j+1}'', \xi_{j+1}]$, die kürzer als r_{2n} sind und in welchen die Funktion linear ist, sonst bleibt die Polygonfunktion $\varphi(x, 10^k)$.

3. Liegt eine Strecke von $T_{n-1}(x)$ nach der Auszeichnung einer Menge $H(10^k)$ über einem Intervall von Typ (10), dann konstruieren wir in diesem Intervall die Funktion $T_n(x)$ mit r_{2n} und mit der Menge $H(10^{k-1})$ so, wie wir die Funktion $T_2(x)$ im Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ mit der Zahl r_4 und mit $H(1)$ definiert haben. Wir zeichnen also in dem Intervall die Menge $H(10^{k-1})$ und die Funktion $\varphi(x, 10^{k-1})$ aus und daraus mit r_{2n} eine Polygonfunktion.

Auf Grund der zur Konstruktion von φ gemachten Bemerkung kann man erreichen, daß die Eckpunkte der mit diesen drei Verfahren definierten Funktion $\varphi(x, 10^i)$ mit den Eckpunkten der vorher gebildeten Funktion $\varphi(x, 10^j)$ $(j>i)$ auf einem Teil des Intervalls zusammenfallen. Der Unterschied der Richtungstangenten wird dann natürlich auf den fünften Teil verkleinert, und die bei diesem Modifizierung zerstörten Intervalle $[u, v]$ der Menge $H(10^j)$ $(j>i)$ benutzen wir in jedem Falle, wenn $|u-v|\leqq r_{2n}$ gilt.

Die Strecken der Funktion $T_n(x)$ gehören zu einem der vorigen drei Typen, das Verfahren kann also über jede Grenze hinaus fortgesetzt werden.

Weil die Projektion jeder Strecke der Funktion $T_n(x)$ auf die x-Achse kleiner als r_n ist, gilt $|T_{n+1}(x)-T_n(x)|\leqq \varrho_n$, und so existiert $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ und ist stetig.

Die Eckpunkte der Funktion $T_n(x)$ liegen auf dem Bild von $f(x)$, und so ist — infolge der Relation $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ — $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$ auf einer überall dichten Menge, wegen der Stetigkeit also überall.

Bezeichnet man die Richtungstangente der Strecke von $T_i(x)$ über x mit $\lambda_i(x)$, dann zeigen wir noch, daß

$$\lim\sup \lambda_i(x) - \lim\inf \lambda_i(x) \geqq \vartheta_f(x)/450 = \lambda(x) > 0 \tag{11}$$

d.h. $\lim\limits_{i\to\infty} T_i(x)$ ist eine Polygonfunktion mit Parametern $\lambda(x)$, ϱ_i.

Gilt $\vartheta_f(x)\geqq 3$, so ist $x\in H(1)$ bereits bei Konstruktion von $T_2(x)$. Gilt

$$3\cdot 10^{-k} \leqq \vartheta_f(x) < 3\cdot 10^{-k+1} \quad (k \text{ natürliche Zahl}) \tag{12}$$

so gilt spätestens bei der Konstruktion $T_{k+1}(x)$ die Beziehung $x\in H(10^{-k})$. (Es ist möglich, daß die Beziehung $|\lambda_1(x)-\lambda_i(x)| \geqq \vartheta_f(x)/3$ $(i<k)$ gilt.)

Der Unterschied der Richtungstangente der Strecke $\overline{AB}$ über x dieser Funktion $\varphi(x, 10^{-k})$ über $H(10^{-k})$ von der Richtungstangente der Strecke der Funktion $T_1(x)$ über x ist wenigstens $10^{-k}/3$, d.h. wegen (12) wenigstens $\vartheta_f(x)/90$. Wenn nach der Bemerkung der Konstruktion von φ die Funktion $\varphi(x, 10^{-k})$ modifiziert werden muß, verkleinert sich der Unterschied der Richtungstangente höchstens auf den fünften Teil, und wird noch immer $\vartheta_f(x)/450$. Nach endlich vielen Schritten, (wenn es $(\overline{AB})_x<r_{2n}$ gilt) also bei der Bildung irgendeiner Funktion $T_n(x)$, wird auch die Strecke $\overline{AB}$ eine Strecke der Funktion $T_n(x)$. Dann wird

$$|\lambda_1(x)-\lambda_n(x)| \geqq \vartheta_f(x)/450.$$

Nach dem ersten Fall der Konstruktion der Polygonfunktionen, d.h. wenn die Beschränkung der Richtungstangente erfüllt ist, beginnt das Verfahren von neuem. Es ist existiert wieder ein n' so, daß

$$|\lambda_n(x) - \lambda_{n'}(x)| \geqq \vartheta_f(x)/450.$$

Dies bedeutet, daß die Ungleichheit (11) besteht.

§ 4. Eine neue überall stetige und nirgends differenzierbare Funktion

Errichten wir durch den Halbierungspunkt $Q(q, q')$ der Strecke $\overline{PR}$, wo $P=P(p, p')$ und $R=R(r, r')$ ist, die Geraden e und e', deren Richtungstangenten $\operatorname{tg} PR-\omega$, bzw. $\operatorname{tg} PR+\omega$ beträgt, und ω eine gegebene Zahl mit $0<\omega\leqq 1$ ist. Nehmen wir auf die beiden Geraden g und g', parallel zu PR, die in der Richtung der Ordinatenschse gemessen in Entfernung d laufen. Es seien nach Q strebende Punktfolgen

$$P = P_1(p_1, p_1'), P_2(p_2, p_2'), \ldots \quad \text{und} \quad R = R_1(r_1, r_1'), R_2(r_2, r_2'), \ldots$$

mit streng monoton Abszissenwerten, welche zwischen g und g' und in jenem Winkelraum liegen, in welchem P und R sind, so daß

$$\operatorname{tg} P_i P_{i+1} = \operatorname{tg} R_i R_{i+1} = \operatorname{tg} PR + (-1)^i 2\omega \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

gelten. (Figur 2.)

Die nacheinander folgenden Punkte P_i, bzw. R_i verbinden wir mit den Strecken $\overline{P_i P_{i+1}}$, $\overline{R_i R_{i+1}}$, und diese mit dem Punkt Q ergänzend, erhalten wir das Bild einer unendlichen Polygonfunktion, welche die durch P, R, ω und d bestimmte Funktion $\psi(x, P, R, \omega, d)$ genannt wird, also

$$\psi(x, P, R, \omega, d) = \begin{cases} \dfrac{p'_{i+1} - p'_i}{p_{i+1} - p_i}(x - p_i) + p'_i, & p_i \leqq x \leqq p_{i+1} \\ \dfrac{r'_{i+1} - r'_i}{r_{i+1} - r_i}(x - r_i) + r'_i, & r_{i+1} \leqq x \leqq r_i \\ q' \quad \text{für} \quad x = q. \end{cases}$$

Die Strecken $\overline{P_i P_{i+1}}$ und $\overline{R_i R_{i+1}}$ werden für gerades und ungerades i aufsteigende, bzw. absteigende Strecke genannt. Es ist einfach zu sehen, daß wenn man in den den Punkt P und R enthaltenden beiden Winkelräumen der Geraden e und e' je einen Punkt, z. B. S bzw. T wählt, so gilt

$$(1) \qquad |\operatorname{tg} ST - \operatorname{tg} PR| \leqq \omega.$$

Liegen die Punkte S und T auf dem Bild einer Funktion ψ, so ist $|\operatorname{tg} ST - \operatorname{tg} PR| \leqq 2\omega$. Also gilt für beliebige Punktepaare S, T und U, V die im Bild einer ψ-Funktion liegen

$$(2) \qquad |\operatorname{tg} ST - \operatorname{tg} UV| \leqq 4\omega.$$

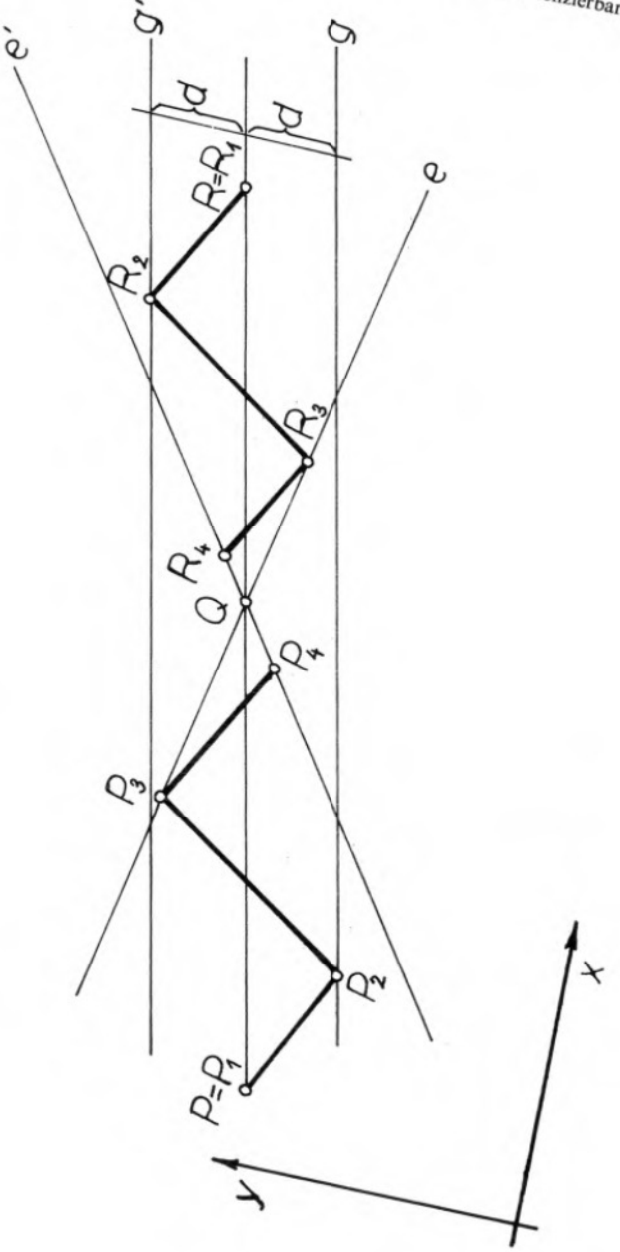

Fig. 2.

Danach konstruieren wir die Elemente einer Funktionenfolge. Es sei $Q=(\frac{1}{2}, 0)$ und wir definieren mit $0_0(0,0)$, $0_1(1,0)$ eine Funktion $\psi(x, 0_0, 0_1, 1, 1)$; sie sei $g_1(x)$. Es sei $g_2(x)$ über einer aufsteigenden Strecke $\overline{AB}$ von $g_1(x)$ eine Funktion $\psi(x, A, B, \frac{1}{2}, \delta)$, und über einer absteigenden Strecke $\overline{CD}$ von $g_1(x)$ eine $\psi(x, C, D, 1, \delta)$ Funktion, wo δ auf jeder Strecke $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ so gewählt wird, daß statt der Ungleichung

$$|\operatorname{tg} ST - \operatorname{tg} UV| \leqq 4, \tag{2_1^1}$$

welche entsprechend der Ungleichung (2) mit $\omega=1$ für $g_1(x)$ gilt,

$$|\operatorname{tg} ST - \operatorname{tg} UV| \leqq 4+(1+\tfrac{1}{2}) < 6 \tag{2_1^2}$$

bestehen soll, wenn die Punkte S, T, U, V im Bild von $g_2(x)$ so gewählt werden, daß $\overline{ST}$ eine aufsteigende Strecke von $g_1(x)$ ist, und die Projektion der Halbierungspunkte dieser Strecke auf die x-Achse in $(\overline{UV})_x$ fällt. (Figur 3.)

Wir beschäftigen uns später mit der Existenz einer Funktion solcher Art, also damit, daß solche Werte von δ angegeben werden können.

Im allgemeinen, $g_i(x)$ sei auf einer aufsteigender $\overline{AB}$-Strecke von $g_{i-1}(x)$ eine Funktion $\psi\left(x, A, B, \frac{1}{i}, \delta\right)$, auf einer absteigender Strecke $\overline{CD}$ von $g_{i-1}(x)$ eine

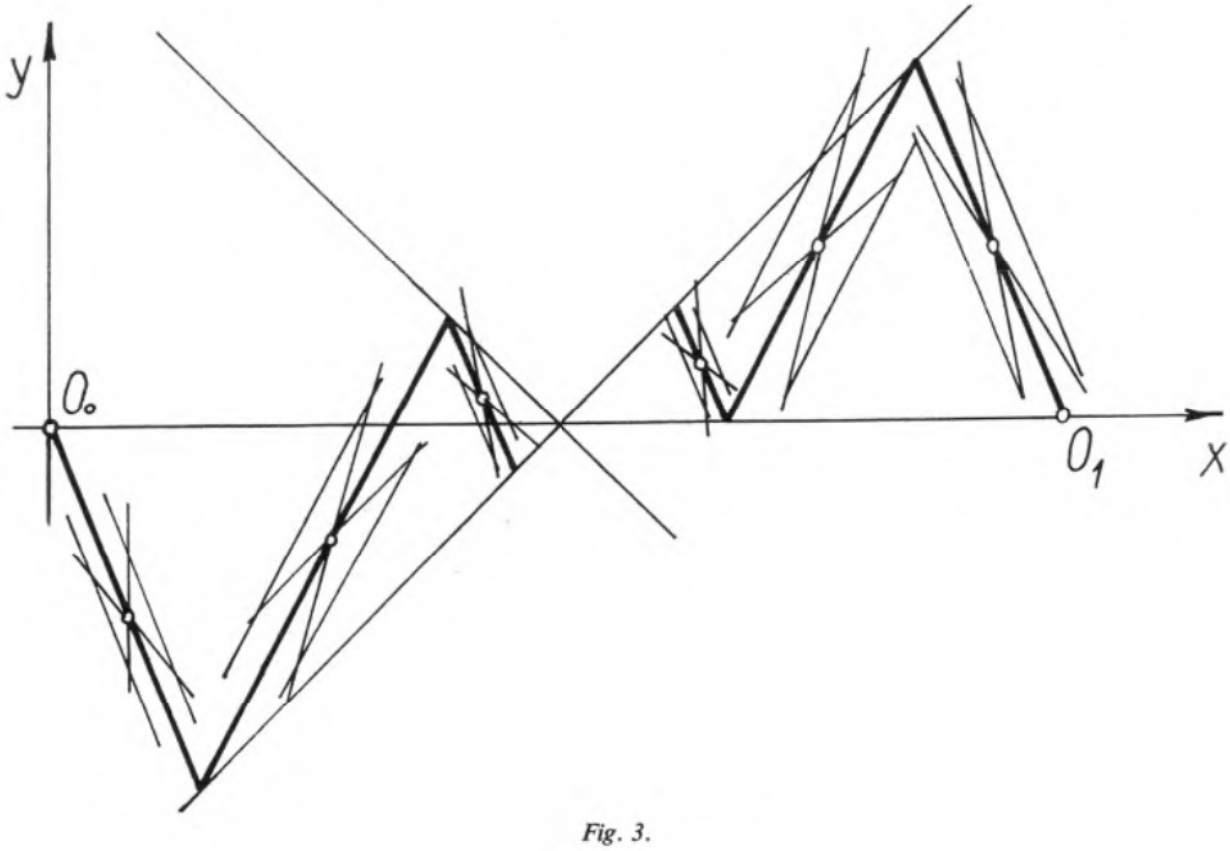

Fig. 3.

$\psi(x, C, D, 1, \delta)$-Funktion, wo δ in jeder einzelnen Strecke nach der folgenden Eigenschaft gewählt wird:

Wenn S, T, U, V Punkte des Bildes der Funktion $g_i(x)$ sind, ferner $(\overline{S, T})_x$ und $(\overline{U, V})_x$ für irgendeines $j<i$ in der Projektion einer aufsteigenden Strecke von $g_{j-1}(x)$ liegen, und wenn $\overline{ST}$ eine solche aufsteigende Strecke von $g_j(x)$ ist, deren Halbierungspunkt auf $(\overline{UV})_x$ projiziert wurde, so gilt

$$(2_j^i) \qquad |\operatorname{tg} ST - \operatorname{tg} UV| \leqq \frac{4}{j} + \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{2^{k-j}} < \frac{6}{j}.$$

Wir nehmen noch an, daß die δ-Zahlen in der Konstruktion von $g_i(x)$ obere Schranken δ_i mit konvergenten Reihen $\sum \delta_i$ haben.

Es stimmt offenbar die Annahme für $g_i(x)$ mit $i=2$, $j=1$ mit der Annahme für $g_2(x)$ überein.

Es genügt die Existenz dieser Funktionen $g_i(x)$ zu beweisen, daß wenn wir eine $g_{i-1}(x)$-Funktion von solcher Eigenschaft erhalten haben, dann hat auch die in einer Strecke $\overline{EF}$ über x derselben mit $\delta(x) = \dfrac{h(x)}{i\,2^{i+2}}$ konstruierten Funktion $g_i(x)$ ebenfalls diese Eigenschaft, wo

$$h(x) = \min\{(\overline{E_1 E})_x, (\overline{FF_1})_x\}$$

und $\overline{E_1E}$, bzw. $\overline{FF_1}$ die sich an $\overline{EF}$ anschließenden Strecken bei $g_{i-1}(x)$ sind.

Es seien $S(s, s')$, $T(t, t')$, $U(u, u')$, und $V(v, v')$ Punkte des Bildes der Funktion $g_i(x)$, die die Bedingungen der Ungleichung (2_j^i) genügen. Gilt $(\overline{ST})_x \supseteqq (\overline{UV})_x$, dann ist wegen der Ungleichung (1) auch (2_j^i) wahr. Ist $(\overline{ST})_x \not\supseteqq (\overline{UV})_x$, so

$$|\operatorname{tg} ST - \operatorname{tg} UV| = |\operatorname{tg}_{g_i}(s, t) - \operatorname{tg}_{g_i}(u, v)| = |\operatorname{tg}_{g_{i-1}}(s, t) - \operatorname{tg}_{g_i}(u, v)| \leqq$$
$$\leqq |\operatorname{tg}_{g_{i-1}}(s, t) - \operatorname{tg}_{g_{i-1}}(u, v)| + |\operatorname{tg}_{g_{i-1}}(u, v) - \operatorname{tg}_{g_i}(u, v)|.$$

Das erste Glied der Summe für $j<i-1$ ist auf Grund von (2_j^{i-1}), für $j=i-1$ wegen (2) nicht größer, als $\dfrac{4}{j} + \dfrac{1}{j} \sum\limits_{k=j}^{i-1} \dfrac{1}{2^{k-j}}$.

Wir formen das zweite Glied um:

$$|\operatorname{tg}_{g_{i-1}}(u, v) - \operatorname{tg}_{g_i}(u, v)| = \left| \frac{g_{i-1}(u) - g_{i-1}(v)}{u-v} - \frac{g_i(u) - g_i(v)}{u-v} \right| \leqq$$
$$\leqq \left| \frac{g_{i-1}(u) - g_i(u)}{u-v} \right| + \left| \frac{g_{i-1}(v) - g_i(v)}{u-v} \right| \leqq \frac{2\delta(u)}{h(u)} + \frac{2\delta(v)}{h(v)} < \frac{1}{i2^i},$$

wegen $|u-v| \geqq \dfrac{h(u)}{2}$ und $|u-v| \geqq \dfrac{h(v)}{2}$. Es folgt also

$$|\operatorname{tg} ST - \operatorname{tg} UV| \leqq \frac{4}{j} + \frac{1}{j} \sum_{k=j}^{i-1} \frac{1}{2^{k-j}} + \frac{1}{i2^i} \leqq \frac{4}{j} + \frac{1}{j} \sum_{k=j}^{i} \frac{1}{2^{k-j}} < \frac{6}{j}.$$

Offenbar ist $h(x) \leqq 1$, also für $\delta_i = \dfrac{1}{i2^{i+2}}$ konvergiert die Reihe $\sum \delta_i$.

Satz 3. *Die durch die obige Konstruktion gebildete Funktion*

$$g(x) = g_1(x) + \sum_{i=1}^{\infty} [g_{i+1}(x) - g_i(x)]$$

existiert; sie ist überall stetig und nirgends differenzierbar, weiterhin bilden die Werte $x \in [0, 1]$ *für jedes* $\lambda > 0$, *wofür* $\vartheta_x(x) \leqq \lambda$ *gilt, eine überall dichte Menge im Intervall* $[0, 1]$.

BEWEIS. Die Funktion $g_i(x)$ ist für jedes i stetig, deswegen ist auch $g_{i+1}(x) - g_i(x)$ stetig. Es ist $|g_{i+1}(x) - g_i(x)| \leqq \delta_i$ und $\sum \delta_i$ konvergiert, daher existiert $g(x)$ und es ist stetig.

Im Beweis der Behauptung, daß die Funktion $g_i(x)$ in keinem Punkt $x_0 \in [0, 1]$ differenzierbar ist, unterscheiden wir drei Fälle.

Wenn x_0 die Halbierungsabszisse einer aufsteigende Strecke von einer Funktion $g_i(x)$ ist, so sieht man unmittelbar aus der Konstruktion die Gültigkeit von $\vartheta_g(x_0) = \frac{2}{i}$. Da die Länge der Strecken von $g_i(x)$ für nach Null strebt, wir haben auch gezeigt, daß für jedes $\lambda > 0$ die Ungleichung $\vartheta_g(x) \leqq \lambda$ in einer überall dichten Menge besteht.

Wenn x_0 die Halbierungsabszisse keiner Strecke einer Funktion $g_i(x)$ ist, dann gibt es unter den Strecken der Funktion $g_i(x)$ über x_0 endlich, oder unendlich viele absteigende Strecken. Im ersten Fall sind die Strecken von einem Index i_0 an aufsteigend mit Richtungstangenten $t + \sum_{k=i_0}^{i} \frac{1}{k}$; dies konvergiert nicht, also ist die Funktion $g(x)$ in x_0 nicht differenzierbar.

Wenn über den Punkt x_0 absteigende Strecke von unendlich vielen $g_i(x)$ liegen, dann können auf jede Umgebung von x_0 absteigende Strecke projiziert werden. Dann gibt es hier Projektion von solchen Strecken, deren Richtungstangente sich um 1 von der Richtungstangente der vorigen Strecke unterscheidet. Also ist die Funktion $g(x)$ auch in diesem Fall im Punkt x_0 nicht differenzierbar.

Bemerkung. Die Eigenschaft (2_j^i) für $g(x)$ wird sich so modifizieren, daß wenn S, T, U, V Punkte des Bildes von $g(x)$ sind, weiterhin für irgendein j $(\overline{ST})_x$ und $(\overline{UV})_x$ in der Projektion einer aufsteigenden Strecke von $g_{i-1}(x)$ auf die x-Achse liegen, und $\overline{ST}$ eine aufsteigende Strecke von $g_i(x)$ ist, deren Halbierungspunktabszisse in $(\overline{UV})_x$ liegt, dann besteht

$$(2_j) \qquad |\operatorname{tg} ST - \operatorname{tg} UV| \leqq \frac{6}{j}.$$

Satz 4. *Ist eine Polygongrenzfunktion* $t(x) = \lim t_i(x)$ *gleich mit der soeben definierten Funktion* $g(x)$, *dann gibt es einen solchen Punkt* $x_0 \in [0, 1]$, *daß* $\lim [\lambda_{i+1}(x_0) - x_i(x_0)] = 0$ *wobei* $\lambda_i(x_0)$ *die Richtungstangente der Strecke über* x_0 *von* $t_i(x)$ *bezeichnet.*

Bemerkungen. Dieser Satz widerspricht natürlich nicht der Nicht-differenzierbarkeit von $g(x)$ in x_0, weil $\lambda_i(x_0) - \lambda_k(x_0)$ im allgemeinen nicht nach Null strebt.

Aus dem Satz folgt, daß wenn in der Definition der Polygongrenzfunktion mit Parametern $\lambda(x)$, ϱ_i statt der Eigenschaft von B) die Bedingung

$$0 < \lambda(x) \leqq \limsup |\lambda_{i+1}(x) - \lambda_i(x)|$$

benützt wird, so ist die obige Funktion $g(x)$ keine Polygongrenzfunktion mit Parametern $\lambda(x)$, ϱ_i, und die überall stetige, nirgends differenzierbare Funktion ist nicht mit dem Satz 3. charakterisierbar.

Beweis des Satzes 4. Es liegt über dem Punkt $x=\frac{1}{2}$ die Strecke $\overline{A_1B_1}$ der Funktion $t_{i_1}(x)=t_1(x)$. Wir bezeichnen mit $\overline{C_1D_1}$ diejenige unter den aufsteigenden Strecken von $g_1(x)$, welche zum A_1 (oder, wenn $A_1=(\frac{1}{2}, 0)$ ein Halbierungspunkt ist, zum B_1) am nächsten liegt und

$$(\overline{C_1D_1})_x \subseteqq (\overline{A_1B_1})_x = [a_1, b_1],$$

$t_{i_2}(x)$ die Funktion ist, für die die Strecke $\overline{A_2B_2}$ über dem Halbierungspunkt von $\overline{C_1D_1}$ liegt, und

$$(\overline{C_1D_1})_x \supseteqq (\overline{A_2B_2})_x = [a_2, b_2],$$

aber die Funktion $t_{i_2-1}(x)$ keine solche Strecke hat. Es gibt solche i_2, weil auf Grund von $\vartheta_t(x)>0$ die Länge der Strecken von $t_i(x)$ für $i\to\infty$ nach Null strebt. Unter den aufsteigenden Strecken von $g_2(x)$ bezeichnen wir mit $\overline{C_2D_2}$ diejenige, welche zum A_2 (oder, wenn A_2 der Halbierungspunkt von $\overline{C_1D_1}$ ist, dann zum B_2) am nächsten liegt und

$$(\overline{C_2D_2})_x \subseteqq (\overline{A_2B_2})_x.$$

Im allgemeinen ist $t_{i_n}(x)$ die Funktion, für die eine Strecke $\overline{A_nB_n}$ über dem Halbierungspunkt von $\overline{C_{n-1}D_{n-1}}$, liegt und

$$(\overline{C_{n-1}D_{n-1}})_x \supseteqq (\overline{A_nB_n})_x = [a_n, b_n]$$

besteht, aber $t_{i_n-1}(x)$ keine solche Strecke hat.

Wir bezeichnen mit $\overline{C_nD_n}$ unter den aufsteigenden Strecken von $g_n(x)$ diejenige, welche zum A_n (oder, wenn A_n Halbierungspunkt von $\overline{C_nD_n}$ ist, dann zum B_n) am nächsten liegt und

$$(\overline{C_nD_n})_x \subseteqq (\overline{A_nB_n})_x.$$

Sei $x_0=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dieser Punkt x_0 existiert offensichtlich, weil $[a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung ist. Die Richtungstangenten der Strecken über x_0 von den Funktionen

$$t_{i_1}(x), t_{i_1+1}(x), \dots, t_{i_2-1}(x), t_{i_2}(x)$$

unterscheiden höchstens um 6 von tg C_1D_1 nach der Ungleichung (2_1) der Bemerkung des Satzes 1., und sie weichen höchstens um 12 voneinander ab.

Im allgemeinen unterscheiden sich die Richtungstangenten der Strecken über x_0 von den Funktionen

$$t_{i_n}(x), t_{i_n+1}(x), \dots, t_{i_{n+1}-1}(x), t_{i_{n+1}}(x)$$

nach (2_n) von tg C_nD_n höchstens um $\frac{6}{n}$, voneinander höchstens um $\frac{12}{n}$. Es gilt also in der Tat

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_{n+1}(x_0) - \lambda_n(x_0)| \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n} = 0.$$

Literatur

[1] S. Kántor, Über die Konstruktion überall stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen I. *Publ. Math. (Debrecen)* **9** (1962), 111—121.

[2] M. Mikolás, Constructions des familles de fonctions partout continues derivables, *Acta Sci. Math. Szeged,* **17** (1956), 49—62.

(Eingegangen am 25. Januar 1973.)