Sur la géométrie d'une variété hilbertienne généralisée

Par GH. GHEORGHIEV (Iaşi)

Hommage au Professeur A. Rapcsák à l'occasion de son soixantième anniversaire

Introduction

On sait que les derniers travaux d'Einstein [11] ont suscité l'interêt pour l'étude de l'espace V^4 doué d'une métrique asymétrique. Un peu plus tard, L. P. EISENHART a développé la théorie locale des espaces de Riemann généralisés [12—14]; cela veut dire d'étudier des cartes locales d'une variété différentiable modelée par l'espace euclidien généralisé — un espace vectoriel reel à n dimension ayant une métrique bilinéaire quelconque $g(x, y)$, soumise à la condition: $g(x, x)>0$ pour change $x \neq 0$. Ce sujet a fait l'objet de nombreux travaux, comme par exemple [2, 3, 33, 34, 40].

D'autre part, dans l'analyse fonctionnelle on a grandi le nombre des études concernant les espaces normés doués d'une forme bilinéaire quelconque, ou symétrique mais sans être positive définie comme a lieu dans le cas d'un espace de Hilbert [1, 24, 26]. Si E est un espace de Banach doué d'un produit scalaire $g(x, y)$ ainsi que: si $g(x, y)=g(y, x)=0$ pour $\forall x \in E$, on aura $y=0$, nous dirons que $E(g)$ est un espace de Hilbert généralisé. L'étude de tels espaces et de leurs groupes d'isométries est l'objet de § 1.

Les familles des ouverts d'un $E(g)$ collés entre eux par des difféomorphismes constituent les domaines de cartes locales d'un atlas lequel dètermine la structure de la variété hilbertienne généralisée $B(g)$. Sur une $B(g)$ on peut construire usuellement la variété fibré vectorielle $M \to B$ ayant comme fibre type $F(\gamma)$ — un autre espace de Hilbert généralisé (§ 2).

Dans la deuxième partie du travail nous reprendons le sujet concernant l'étude des distributions regulières et spécialement celles finie dimensionelles sur les nouvelles variétés $B(g)$ (§ 3). L'existence d'une métrique g sur B fait qu'à chaque distribution on peut associer une autre distribution, complémentaire par orthogonalisation. D'ici il en résulte une décomposition en partie tangentielle et celle normale de chaque objet, soit-on champ vectoriel, forme différentielle, connexion linéaire ou la courbure de celle-ci. Ainsi on arrive à une analogie avec la théorie des variétés plongées dans les espaces riemaniens, en obtennant les relations qui généralisent les formules classiques de Gauss—Weingarten, les identités de Gauss—Codazzi ainsi que la notion de la courbure scalaire, courbure moyenne etc d'une distribution (§ 3). On doit mentionner ici que la notion de distribution différentielle de $B(g)$ est synonime à celle de la variété non holonome due à GH. VRĂNCEANU [39] et aussi à celle de la variété sous-fibré vectorielle du fibré tangent $T(B)$ de la variété hilbertienne généralisée.

On considère encore p-distributions de MYLLER qui contiennent sous-distributions $q<p$ dimensionelles involutives, en établissant les formules de décomposition adéquates et en particulier les formules de Darboux—Ribaucour. Si $q=1$ et B est une variété riemanienne ordinaire, on arrive aux formules connues [32] (§4).

On finit avec deux applications concernant les distributions uni- et bidimensionelles, c'est-à-dire, on esquisse la géométrie d'un champ des directions (§5) et celle des facettes planes bidimensionelles (§6).

On retrouve encore ici un nombre impressionnant des propriétés établies de nous autrefois en ambiance classique [15—16], comme par exemple: nous obtenons une extension du théorème d'egregium pour la courbure sectionnelle d'une distribution bidimensionelle.

PREMIÈRE PARTIE:

Les variétés hilbertiennes généralisées

§ 1. L'espace de Hilbert généralisé et le groupe d'isométrie

1. *L'espace vectoriel métrique.* Soit E un espace vectoriel sur $K(R$ ou $C)$ admettant des bases dénombrables et reflexif (le dual de son dual E^* est précisement E initial). On l'associe $g\in L_2(E, K)$, une forme bilinéaire regulière. Si $B=(e_i)_{i\in I}\in E$ est une base, alors g sera donnée par une matrice regulière G, admettant l'inverse $\tilde{G}$ $(G\tilde{G}=I)$. G étant, en général, une matrice infinie la construction de l'inverse est assez difficile, ayant seulement des critères pour peu descas, comme est par exemple le cas des matrices triangulaires [7]. Par analogie on dit que G est une matrice de Gram correspondante à la base B.

On rappele que l'application donée $g:E\times E\to K$ sataisfait les suivantes conditions:

1. $g(\lambda^a x_a, y) = \lambda^a g(x_a, y)$,
2. $g(x, \mu^b y_b) = \mu^b g(x, y_b)$ ou 2. $g(x, \mu^b y_b) = \bar{\mu}^b g(x, y_b)$ (le cas d'Hermite),
3. si $g(x, y) = g(y, x) = 0$ pour $\forall x\in E$, alors $y = 0$.

Remarque. Si au lieu de l'axiome 3 on a 3' pour chaque $x\neq 0$, $g(x, x)>0$ et de plus $\dim E<\infty$ nous obtenons l'espace euclidien généralisé [4, 29]. La paire $E(g)$ sera appelée l'espace vetoriel métrique ayant $g(x, y)$ comme produit scalaire.

Si B est une base de $E(g)$, on a $x=x^i e_i=XB$ où X est une matrice unicolonnaire et le produit scalaire sera $g(x, y)=X'GY$ (X' — matrice unilinéaire transposée de X). Pour une autre base $\bar{B}=BS$ (S — matrice régulière) on a $X=\bar{X}S$ et $\bar{G}=S'GS$.

Puisque il y a la somme dirècte $L_2(E, K) = L_2^S(E, K)\oplus L_2^a(E, K)$, chaque forme bilinéaire g a une seule décomposition $g = \mathring{g}+\hat{g}$, ce qui se reflète sur la matrice de Gram correspondante à une base donnée ainsi $G = \mathring{G}+\hat{G}$; en cas de changement de la base il y a $\bar{\mathring{G}}=S'\mathring{G}S$ et $\bar{\hat{G}}=S'\hat{G}S$. En vertu de l'axiome 3 tout au moins une des parties $\mathring{G}$ ou $\hat{G}$ sera une matrice regulière; dorénavant nous supposons toutes les deux matrices, $\mathring{G}$ et $\hat{G}$, regulères. En particulier, si on a 3', parce que $\hat{g}(x, x)=0$, $\forall x\in E$, l'espace $E(\mathring{g})$ sera un espace euclidien, tandis que $E(g)$ dans ce cas sera un espace euclidien généralisé de dimension infinie.

Considérons maintenant un opérateur linéaire $A \in L(E, E)$, c'est à dire un endomorphisme $x \to Ax$ de $E(g)$. On peut définir encore chez nous l'opérateur dual ou conjugué A^* de A par la formule $g(Ax, y) = g(x, A^*y)$, et, en particulier si $A^* = A$ on aura l'opérateur symétrique de l'espace $E(g)$. De la décomposition $g = \mathring{g} + \hat{g}$ il en suit que $\mathring{g}(Ax, y) - \mathring{g}(x, A^*y) = \hat{g}(x, A^*y) - \hat{g}(Ax, y)$, d'où on a: si A^* est le dual de A dans l'espace $E(\mathring{g})$ alors on est de même chez l'espace symplectique $E(\hat{g})$.

Si A est une isomorphie de $E(g)$, c'est à dire $A\tilde{A} = I$, et de plus si cet opérateur est une isométrie, on aura $g(Ax, Ay) = g(x, y)$ et $g(Ay, Ax) = g(y, x)$. Mais il suit alors que $\mathring{g}(Ax, Ay) = \mathring{g}(x, y)$ et $\hat{g}(Ax, Ay) = \hat{g}(x, y)$. Par suite, un espace vectoriel métrique et, en particulier, un espace euclidien généralisé est doué de deux métriques, l'une est pseudoeuclidienne ou euclidienne et l'autre est symplectique. Tandis que les isométries de $E(g)$ sont les isomorphismes qui conservent toutes les deux métriques données.

On rappele encore que de l'axiome 3 résulte l'existence d'un isomorphisme canonique ω: $E \to E^*$, $x \to \omega_x$, défini par $\omega_x(y) = g(x, y)$, ce qui permet de douer l'espace dual E^*, d'une métrique g^*, définie par $C(g \otimes g^*) = Id$, où par C on a désigné la contraction etendue à des espaces et à des tenseurs de dimension infinie [25].

Enfin, en avançant un peu, nous mentionnons que si on étend aux matrices infinies la notion d'application exponnentielle [7, 9] et on considère U_0, $U_I \subset L(E, E)$ des voisinages de la matrice zéro et celle d'unité on aura l'application log: $U_I \to U_0$ selon laquelle à une isométrie $A \in U_I(g(Ax, Ay) = g(x, y))$ il correspond $B = \log A \subset \subset U_0$ satisfaisant à $g(Bx, y) + g(x, By) = 0$. En vertu de l'invariance du produit scalaire il en résulte:

$$\mathring{g}(Bx, y) + \mathring{g}(x, By) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{g}(Bx, y) + \hat{g}(x, By) = 0$$

d'où on a: au groupe d'isométrie de $E(g)$ il correspond l'algèbre de Lie des endomorphismes de $E(g)$ qui est la partie commune de l'algèbre orthogonale et de celle symplectique.

Remarque. L'espace vectoriel métrique $E(g)$ peut être considéré encore comme un espace ponctuel affin $A(E)$ dans lequel les translations T_a de vecteur $a \in E$ sont aussi isomètries. L'isométrie J de l'espace A est en général une composition $J = T_a \circ A$, où $A \in SL(E)$ est un automorphisme unitaire de E.

2. *Les espaces de Hilbert généralisés.* Nous supposons maintenant que E est un espace de Banach; on sait que les espaces composés $L(E, K) = E^*$, $L_2(E, K)$ et $L(E, E)$, des applications linéaires ou bilinéaires continus, sont aussi normés et complets [10]. Nousa urons besoin encore de la suivante propriété [27]: si on a deux espaces de Banach E et F, l'espace $L(E, L(E, F))$ est isométriquement isomorphe à l'espace de Banach $L_2(E, F)$; en particulier, $L_2(E, K)$ est isomorphe à l'espace $L(E, E^*)$. Ici nous supposons aussi que l'espace de Banach E est reflexif, admet des bases dénombrables $\{B\}$ [30], étant doué d'une métrique $g \in L_2(E, K)$ à norme $\|g\| \neq 0$. La paire $E(g)$ est, par définition un espace de Hilbert généralisé; la matrice G correspondante à une base sera regulière.

Nous indiquerons une possibilité d'obtenir un tel espace: supposons que la norme de l'espace de Banach E satisfait l'égalité du parallélogramme, c'est-à-dire à: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]$, $\forall x, y \in E$. Alors, la norme de E provient d'un produit scalaire symétrique $\mathring{g}$ et par suit $E(\mathring{g})$ devient canoniquement un espace hilbertien doué de produit scalaire $\mathring{g}(x, y) = \frac{1}{2}\ [\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]$. Ensuite en considérant une application bilinéaire alternante quelconque $\hat{g} \in L_2^a(E, K)$ douée évidemment de norme induite par $L_2(E, K)$ et en posant $g = \mathring{g} + \hat{g}$, on obtient l'espace $E(g)$ cherché.

Un autre exemple assez général de $E(g)$ est fournissé par un théorème de V. A. HATZKEWICZ [26]: Soit E un espace normé à métrique (symétrique) indéfinie $\mathring{g}$ laquelle induit dans E^* la métrique $\mathring{g}^*$. Désignons par E_+ et E_- sous-espaces où la métrique est respectivement positive et negative définie. Si E est reflexif, le son dual E^* contient une sphère lisse et il y a $E_+ \cap E_- = \varphi$, alors $E = E_+ \oplus E_-$. Puis, on ajoute comme plus haut la partie symplectique etc.

Toutes les autres questions concernant nouveaux espaces s'étendent sans difficulté, sauf peut être les produits tensoriels, puisque le produit tensoriel des deux espaces de Banach n'est pas en général aussi un espace de Banach. Mais on peut éviter cette difficulté en considérant, au lieu du produit tensoriel, l'espace des applications multilinéaires continus correspondantes, doué de norme, et qui l'englobe dans le cas infini dimensionel.

Remarque 1. Il est intéressant peut être de rappeler une possibilité peu connue de définir l'espace de Hilbert H, comme un espace métrique complet qui vérifie seulement les axiomes [35]:1. pour chaque paire $a, b \in H$ il existe une symétrie ponctuelle s, à savoir $s(a) = b$ (l'axiome du milieu) et 2. pour chaque quaterne $a, b, c, d \in H$ on a la relation: $[d(a, c)]^2 + [d(b, d)]^2 = 2\ \{[d(a, b)]^2 + [d(c, d]^2\}$ (l'axiome du parallélogramme).

Remarque 2. Dans ce qui suit on supposera que $E(g)$ est un espace de Banach (séparé) lisse, c'est à dire il admet une partition différentiable de l'unité. Si la métrique g satisfat l'axiome 3', $E(\mathring{g})$ étant alors un espace de Hilbert, il sera lisse [21]. Mais s'il y a seulement l'axiome 3, nous ne connaissons pas si E est lisse ou non. On peut seulement prévoir que s'il existe un sous-espace de codimension finie $H \subset E$ qui serait un espace de Hilbert, alors E sera un espace lisse.

3. *Des bases canoniques.* Au commencement nous considérerons l'espace de Hilbert $E(g)$ avec $\hat{g} = 0$ et un sous-espace fermé $F \subset E$ ayant l'égalité $E = F \oplus F^n$ où F^n est son complémentaire par orthogonalité; si dim $F = 1, 2, \dots n$ alors on a respectivement codim $F^n = 1, 2, \dots n$. Dans le cas fini dimensionel il existe divers procédés de construire des bases canoniques. L'un, notamment le processus d'orthogonalisation de Schmidt, s'etend aussi aux espaces de Hilbert [27], qui nous conduit à une base orthonormée dénombrable $B = \{e_i\} \in E(g)$, $i = [1, \infty]$ pour laquelle on a $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$; la matrice de Gram correspondante se reduit à la matrice unité $G = I$. On peut etendre à l'espace de Hilbert une autre forme canonique du produit scalaire, valable encore au cas symplectique. Pour cela nous démontrerons prealablement le suivant **lemme**.

Dans l'espace de Hilbert complexe E il existe toujours une paire des vecteurs e_1 et e_{-1} verifiant les relations

$$g(e_1, e_1) = g(e_{-1}, e_{-1}) = 0, \quad g(e_1, e_{-1}) = 1;$$

l'espace F_1 engendré par cette paire admet une forme bilineaire regulière induite par g.

PREUVE. Si $x, y \in E$ est une paire orthogonal des vecteurs non isotropes, alors le vecteur $e_1 = \sqrt{g(x, x)} \cdot y + \sqrt{-g(y, y)} \cdot x$ sera isotrope. Il existe $z' \in E$ tel que

$g(e_1, z')>0$. Puis, nous posons $z = z':(g(e_1, z'))$ d'où il en résulte $g(e_1, z)=1$. Enfin le vecteur isotrope $e_{-1} = z-\frac{1}{2}g(z, z)e_1$ satisfera la dernière assertion. La paire ainsi construite engendre le biplan $F_1\subset E$ et chaque son vecteur sera donné par $v = \lambda^1 e_1 + + \lambda^{-1}e_{-1}$. Si on a $g(v, w)=0$ pour chaque $w\in E$ alors pour $w=e_1$ et $w=e_{-1}$ on obtient $\lambda^{-1}=0$, $\lambda^1=0$; par consequent la forme induite de g sur F est regulière. Maintenant on peut démontrer par induction le

Théorème. *Un espace hilbertien complexe $E(g)$ doué des bases dénombrables admet une base canonique formée par de paires $(e_i, e_{-i})_{i\in[1,\infty]}$ vérifiantes les conditions du lemme précedent.*

Preuve. On part de la paire (e_1, e_{-1}) et leur biplan F_1 du lemme. Son complémentaire F_1^n dans E a codim $F_1^n=2$ étant doué de la métrique induite g/F_1^n. Puisque F_1^n est un espace de Hilbert il y a une paire $e_2, e_{-2}\in F_1^n$ qui vérifie l'hypothèse du lemme en engendreant un biplan $F_2\subset F_1^n$. Le complémentaire F_2^n de F_2 en F_1^n (c'est à dire on a $F_2\oplus F_2^n=F_1^n$) est un nouvel espace de Hilbert et ainsi de suite. En appliquant l'induction complète on arrive à une base B formée par les paires (e_i, e_{-i}) vérifiantes $g(e_i, e_j) = \begin{cases}1 & j=-i,\\ 0 & j\neq -i.\end{cases}$ La matrice de Gram correspondante à cette base canonique sera $G = \mathring{J} = \begin{bmatrix}0 & I\\ I & 0\end{bmatrix}$ où I est un bloc unitaire. Maintenant s'il y a un espace de Banach symplectique, à savoir $E(g)$ ayant $\mathring{g}=0$, on peut appliquer un processus tout à fait analogue (ici on a toujours $g(x, x) = 0$, $x\in E$) et on obtient une base canonique $B = (e_i, e_{-i})$ $i\in[1, \infty]$ ayant $g(e_i, e_{-i})=1$. Plus précis, dans ce cas la matrice de Gram sera $G=\hat{J}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix}$ c'est-à-dire qu'on a

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases}1 & j = -i,\\ -1 & i = -j,\\ 0 & \text{pour le reste.}\end{cases}$$

Remarque. 1. Dans le cas dim $E=n$, c'est-à-dire pour $E=C^n$, dans le théorème démontré s'impose à distinguer les suivantes possibilités: $n=2r$ ou $2r+1$; alors les matrices de Gram seront respectivement $\mathring{J}=\begin{bmatrix}0 & I_r\\ I_r & 0\end{bmatrix}$ ou $J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_r\\ 0 & I_r & 0\end{bmatrix}$ où I_r est le bloc unitare r-dimensionel.

Remarque 2. Si on considère le cas symplectique fini dimensionel, selon l'axiome 3 la forme $g=\hat{g}$ étant regulière, nous aurons $n=2r$ et la matrice de Gram sera ici $\hat{J}=\begin{bmatrix}0 & -I_r\\ -I_r & 0\end{bmatrix}$.

4. *Les groupes d'isométries.* En développent quelques idées de notre note [17], concernant les espaces à deux métriques finis dimensionelles, nous considérons ici un espace de Banach E à bases dénombrables doué avec deux métriques regulières g et γ. On étudie les suivants cases: 1. $\hat{g}=\hat{\gamma}=0$, c'est à dire E sera à deux métriques hilbertiennes ou pseudohilbertiennes, et 2. $\hat{g}=0$, $\mathring{\gamma}=0$; alors $\mathring{g}+\hat{\gamma} = g$ nous donne une métrique asymétrique et $E(g)$ sera un espace de Hilbert généralisé. Pour une base B de E nous désignons par G la matrice de Gram de g et par Γ, celle de la métrique γ. On peut choisir la base B simultanement canonique pour les métriques données; alors on a $G=I$ et $\Gamma=\mathring{J}$ pour le premier cas et $G=I$ et $\Gamma=\hat{J}$ dans le second. Pour les raisons d'uniformité nous considérerons la matrice unité I exprimé par des blocs unitaires ainsi $I=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Si l'opérateur linéaire $A\in L(E, E)$ conserve les métriques données, il y a:

(!)

$$g(Ax, Ay) = g(x, y) \text{ et } \gamma(Ax, Ay) = \gamma(x, y) \text{ où } g(x, y) = X'GY,\ \gamma(x, y) = X'\Gamma Y.$$

Puisque dans le premier cas $G=J$ et $\Gamma=\mathring{J}$, en utilisant (!) on obtient

$$(\cdot) \qquad A'A = I,\ A'\mathring{J}A = \mathring{J},$$

tandis que dans le second on arrive aux formules

$$(:) \qquad A'A = I, \quad A'\hat{J}A = \hat{J}.$$

Encore ici, pour des considérations d'uniformité l'isométrie A peut être représentée par des blocs ainsi $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$. Alors les condition $(\cdot)$ nous conduisent aux égalités $a_1=a_4=\alpha$ et $a_2=a_3=\beta$, tandis que les formules (:) aux relations $a_1=a_4=\alpha$ et $a_2=a_3=$ $=\beta$. En notant par α' et β' les matrices transposés de α et β, le problème revient à resoudre les suivants systèmes matriciels infinis

$$\alpha'\alpha+\beta'\beta = I, \quad \alpha'\beta\pm\beta'\alpha = 0.$$

Dans le premier, cas, si on pose $\alpha+\beta = \xi$, $\alpha-\beta = \eta$ il y a $\xi'\xi = \eta'\eta = I$, à savoir $\alpha = \frac{1}{2}(\xi+\eta)$, $\beta = \frac{1}{2}(\xi-\eta)$ où ξ et η sont les matrices orthogonales; on a la décomposition correspondante de l'espace $E=E'\times E''$, en deux espaces de Hilbert. Dans le deuxième cas, si on pose $\alpha+i\beta = \xi$, $\alpha-i\beta = \eta$ il résulte $\xi\eta' = \eta\xi' = I$; d'où $\alpha = \frac{1}{2}(\xi+\eta)$, $\beta = \frac{1}{2i}(\xi-\eta)$; ici ξ est une matrice inversable arbitraire, et $\eta=$ $= \xi^*(=(\xi')^{-1})$.

5. *Les équations de structure.* Nous considérerons d'abord la représentation linéaire du groupe d'isométrie de $E(g)$. Puisque il est un groupe de Lie—Banach on a la formules matricielle [20] $\overline{X} = AX+a$ où a est une matrice unicolonnaire qui donne la translation, tandis que la matrice A d'automorphismes de $E(g)$ a la valeur (§ 4) $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \varepsilon\beta & \alpha \end{bmatrix}$ pour $\varepsilon = +1$ dans le cas 1 et $\varepsilon = -1$ dans l'autre. En exprimant maintenant la condition d'immobilité $d\overline{X}=0$, il y a $da+d\,AX+A\,dX=0$, d'où $dX+\tilde{A}\,da+\tilde{A}\,dA\,X=0$ $(A\tilde{A}=I)$.

En posant $\Theta_0=\tilde{A}da$ et $\Theta=\tilde{A}dA$ la condition d'immobilité sera $\Omega\equiv dX+\Theta_0+$ $+\Theta X = 0$. Puisque cette équation matricielle infinie de Pfaff est complètement intégrable, en utilisant le critère de Frobenius [5] $d\Omega\equiv 0 \pmod{\Omega}$ on aura

$$d\Theta_0+d\Theta X+\Theta\wedge(-\Theta_0-\Theta X) \equiv 0.$$

D'ici on obtient les équations de structure du groupe $GL(A)$

$$d\Theta_0+\Theta_0\wedge\Theta = 0, \quad d\Theta+\Theta\wedge\Theta = 0.$$

Dans le cas d'isométrie il y a de plus $\tilde{A}=A^{-1}=A'=\begin{bmatrix}\alpha' & \varepsilon\beta' \\ \beta' & \alpha'\end{bmatrix}$. En nous limitant au cas des isométries vectorielles ($a=0$), et en conservant toutes les deux métriques hilbertiennes on a

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\xi+\eta & \xi-\eta \\ \xi-\eta & \xi+\eta\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\xi'+\eta' & \xi'-\eta' \\ \xi'-\eta' & \xi'+\eta'\end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \xi'=\tilde{\xi},\ \eta'=\tilde{\eta}.$$

En calculant maintenant la matrice pfaffienne $\Theta=\tilde{A}dA=-d\tilde{A}A$ on arrive à

$$\Theta=\begin{bmatrix}\omega & \omega' \\ \omega' & \omega\end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \omega=-\frac{1}{2}[d\xi\tilde{\xi}+d\eta\tilde{\eta}] \quad \text{et} \quad \omega'=-\frac{1}{2}[d\xi\tilde{\xi}-d\eta\tilde{\eta}],$$

ce qui montre que toutes les deux matrices ω et ω' sont antisymétriques.

D'une manière analogue, on obtient dans le second cas, d'une métrique hilbertienne ou pseudohilbertienne et d'autre symplectique le suivant resultat $\Theta=\begin{bmatrix}\omega & \omega' \\ -\omega' & \omega\end{bmatrix}$ où ω est une matrice antisymétrique, pendant que ω' est symétrique. On peut réunir ces resultats en écrivant $\Theta=\begin{bmatrix}\omega & \omega' \\ \varepsilon\omega' & \omega\end{bmatrix}$ avec 1. $\varepsilon=1$ et ω' antisymétrique et 2. $\varepsilon=-1$ et ω'-symétrique. Puisque $d\Theta+\Theta\wedge\Theta=0$ on obtient aisement

$$\begin{bmatrix}d\omega & d\omega' \\ \varepsilon d\omega' & d\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega & \omega' \\ \varepsilon\omega' & \omega\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}\omega & \omega' \\ \varepsilon\omega' & \omega\end{bmatrix}$$

d'où on a immédiatement les suivantes équations de structure d'isométries pour tous les deux cas

$$d\omega+\omega\wedge\omega'+\varepsilon\omega'\wedge\omega'=0, \quad d\omega'+\omega\wedge\omega'+\omega'\wedge\omega=0.$$

§ 2. Sur les variétés hilbertiennes généralisées

6. *Les variétés différentiables et les fibrés vectoriels.* Les variétés de classe C^∞ sont définies usuellement [21] par les atlas (complets) $\mathfrak{A}=\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ c'est-à-dire par une famille de couples formés par les ensembles ouverts $U_i\subset B$ d'un espace de Hausdorf tels que la réunion $\bigcup_{i\in I} U_i=B$ et par les homeomorphies $\varphi_i\colon U_i\to E$ (l'espace de Banach modèle) compatibles C^∞; cela veut dire que pour chaque paire $i,j\in I$ les applications $g_{ij}=\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}\colon\ \varphi_i(U_{ij})\to\varphi_j(U_{ij})$, où $U_{ij}=U_i\cap U_j\neq\emptyset$, sont les difféomorphies C^∞ sur E.

L'ensemble $=\{g_{ij}\in\operatorname{Diff}E/g_{ij}=\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ pour tous les couples $i,j\in I$ pour lesquels $U_{ij}\neq\emptyset\}$ est un pseudogroupe différentiable de groupe des difféomorphies C^∞ de l'espace modèle E. La réunion de tous les atlas d'une classe d'éqiuvalence donne un atlas complet et une structure C^∞ de B.

Soient (U_i,φ_i), (U_j,φ_j) deux cartes locales autour de $x\in B$ et $\xi_i,\xi_j\in E$ deux vecteurs. On dit que le triplet (U_i,φ_i,ξ_i) et (U_j,φ_j,ξ_j) sont équivalents si on a $\xi_j=g'_{ij}(\varphi_i(x))\xi_i$ où par accent est désigné la dérivation de Fréchet de difféomorphisme g_{ij}. En utilisant les propriétés de la dérivée de Fréchet on constate aisement qu'il y a une vraie relation d'équivalence, et une classe de celle-ci, désigné par $[U_i,\varphi_i,\xi_i]$

est par définition, un vecteur X_x tangent à B dans x. On a une isomorphie isométrique Θ_{U_i}: $E \to T_x$ (B) définie par la norme $\|[U_i, \varphi_i, \xi_i]\| = \|\xi_i\|$, entre l'espace tangent à B dans x et l'espace de Banach modèle. On voit aisement que chaque vecteur tangent X_x définit une action sur l'anneau $F(U_i)$ des fonctions réelles C^∞, définies sur le voisinage U_i, donnée par la formule $X_x f = (f\varphi^{-1})'(\varphi_i(x))\xi_i$; cette expression étant un nombre réel, est indépendente de la carte choisie autour de x.

Nous considérerons maintenant un espace fibré topologique $M \xrightarrow{\pi} B$, localement trivial, de fibre F, de groupe structural G et d'atlas fibré $A = \{(U_i, \psi_i)\}_{i\in I}$. Les applications $\psi_i: U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ sont les homéomorphies des cartes locales, tandis que pour chaque paire $i, j \in I$, on a l'application continue $\gamma_{ij}: U_{ij} \to G$ où $\gamma_{ij} = \psi_i^{-1} \circ \psi_i$. Si la fibre type F est un espace de Banach et l'action du groupe structural G sur F, donnée par $\gamma_{ij}(x)$: $F \to F$, est linéaire, M est alors un fibré vectoriel de Banach. De plus, si la base B est une variété différentielle de modèle E et les changements de cartes $\gamma_{ij}: U_{ij} \to G \subset GL(F)$ sont des applications C^∞, on obtient une variété fibré de Banach de l'atlas vectoriel A. Si $F=E$ et $G=GL(E)$ on a le fibré tangent $T(B) = \bigcup_{x\in B} T_x(B)$, tandis que, si $F=E^*$ on a $T^*(B)$ le fibré cotangent à B. Une section X (ou ω) de $T(B)$ (ou de $T^*(B)$) est appelée le champ vectoriel (ou la forme pfaffienne) définie sur B et la valeur $\langle X_x, \omega_x\rangle$ pour chaque $x \in B$ est une fonction C^∞ sur B; on la désigné par $\langle X, \omega\rangle = \omega(X)$. Analoguement on peut considérer les fibrés tensoriels sur B et en particulier les fibrés des applications linéaires continus $L(T(B), T(B))$ et de celles bilinéaires $L_2(T(B), K)$, qui jouent un rôle important dans la géométrie des variétés différentielles de Banach, puisque les sections C^∞ dans ces fibrés nous donnent tous les objets géométriques usuels attachés à la variété base B.

7. *Les variétés hilbertiennes généralisées.* Maintenant nous considérerons la paire $B(g)$ formé par la variété C^∞ B, modelée par un espace de Hilbert généralisé $E(g)$ et par la section C^∞ g du fibré $L_2(T(B), K)$. Pour chaque $x \in B$ l'application bilinéaire continue g_x: $T_x(B) \times T_x(B) \to K$ définit le produit scalaire des vecteurs tangents à B en x ce qui est en concordance avec la métrique généralisée de E; voilà pourquoi $B(g)$ est appelée la variété hilbertienne généralisée. Pour $\dim E < \infty$ elle se réduit à l'espace Riemann généralisé de EISENHART [12—14].

Remarque. Les problème d'existence d'une structure hilbertienne généralisée sur une variété différentielle de Banach, est lié d'abord du fait que le modèle $E(g)$ doit être un espace de Banach lisse (§ 1, p. 2), puis, la variété B doit être paracompacte [28]. Cettes conditions nous assurent que la variété $B(g)$ admet C^∞ partitions de l'unité. Enfin, en suivant les etapes de la preuve du théorème 2 de la pag. 101 et suivantes de [6], ou arrive à la démonstration de l'existence de telle structure.

Maintenant nous considérons le fibré vectoriel $M \xrightarrow{\pi} B(g)$ ayant comme fibre type un espace à métrique généralisée $F(\gamma)$. Il s' en suit alors l'isomorphisme Θ_x: $F(\gamma) \to M_x = \pi^{-1}(x)$ avec la fibre locale de x, ce qui permet de doué le fibré $M(B)$ d'une métrique hilbertienne généralisée $\gamma \in L_2(M(B), K)$; cela veut dire qu-on a la forme bilinéaire γ_x: $M_x \times M_x \to K$, qui est en concordance avec la métrique γ de F. L'ensemble $\mathfrak{M}$ des sections C^∞ sur l'ouvert $U \subset B$ dans $M(B)$ est un F-module noté par $\mathfrak{M}(U)$; pour le fibré tangent $T(B)$ l'on désigne par $\mathfrak{X}(U)$ et on a le F-module des champs vectoriels sur $U \subset B$, étant en même temps K-algèbre de Lie sur le chains K par rapport au crochet. En ce qui concerne les opérateurs usuels sur $B(g)$, on a la dérivation de Lie qui agit surtout sur les F-modules des sections C^∞ dans tous les fibrés hilbertiens $M(B)$, la différentielle extérieure qui agit dans $\Lambda(B)$ — l'algèbre differentielle extérieure sur B et plus général sur $M(B)$ et la dérivation covariante ou plus général, la loi de dérivation qui agit respectivement dans $\mathfrak{X}(U)$ et dans $\mathfrak{M}(U)$. Les définitions, des propriétés de ces opérateurs ainsi que leurs expressions locales et globales on peut les voir dans [21, 28, 37]. Nous rappelons seulement le nécessaire sur les lois de dérivation, c'est-à-dire de l'opérateur linéaire $D\colon \mathfrak{X}(U)\times \mathfrak{M}(U)\to\mathfrak{M}(U)$ vérifiant:

$$D_X(f\sigma) = Xf\sigma + fD_X\sigma, \quad D_{fX}\sigma = fD_X\sigma\big(f\in F(U),\, X\in\mathfrak{X}(U),\, \sigma\in\mathfrak{M}(U)\big).$$

Il y a une dérivation hilbertienne si on a de plus

$$D_X\gamma(\sigma, \tau) = \gamma(D_X\sigma, \tau)+\gamma(\sigma, D_X\tau) \quad \big(\forall\, \sigma, \tau\in\mathfrak{M}(U),\, X\in\mathfrak{X}(U)\big).$$

En particulier, si $M = T(B)$, on a $D_X = \nabla_X$ la dérivation covariante riemanienne, vérifiante

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z)+g(Y, \nabla_X Z).$$

La connexion riemanienne ∇ sera une connexion de Levi—Civita si on a de plus

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X = [X, Y],$$

ceci veut dire que la torsion de ∇ est zéro.

En utilisant la décomposition $g = \mathring{g}+\hat{g}$ on a $\nabla g = \nabla\mathring{g}+\nabla\hat{g}$ d'où il en résulte un théorème tripartite: si la connexion linéaire conserve la partie symétrique et ainsi celle antisymétrique, alors elle conserve encore la métrique généralisée etc. En ce qui concerne l'existence d'une connexion de Levi—Civite, en utilisant le procédé usuel de la démonstration du leme de Ricci, ou dans la recherche des symboles de Christoffel [8, 21] on arrive dans notre cas à la résolution de l'équation

$$(\sim) \qquad 2\{\mathring{g}(\nabla_Y X, Z)+\hat{g}(Y, \nabla_X Z)+\hat{g}(\nabla_Y Z, X)\} =$$

$$= Xg(Y, Z)+Yg(Z, X)-Zg(X, Y)+g([X, Y], Z)+g([Z, X], Y)-g([Y, Z], X),$$

ou de l'équation équivalente:

$$2\{\mathring{g}(\nabla_X Y, Z)+\mathring{g}(\nabla_Y Z, X)+\mathring{g}(\nabla_Z X, Y)\} =$$

$$= Xg(Y, Z)+Yg(Z, X)+Zg(X, Y)+g(Y, [X, Z])+g(Z, [Y, X])+g(X, [Z, X)].$$

On a utilisé encore les propriétés des parties $\mathring{g}$ et $\hat{g}$.

De $(\sim)$ on voit que pour $\hat{g}=0$ il y a la définition invariante des symboles de Christoffel et dans ce cas la connexion de Levi—Civita est unique [8].

Ayant maintenant les fibrés hilbertiens généralisés $T(B)$ et $M(B)$ on peut définir ordinairement les fibrés $L\big(T(B), M(B)\big)$ comme la réunion des applications linéaires continus de leurs fibres $T_x(B)\to M_x$ lesquelles sont douées à métriques g et γ respectivement. La métrique γ_L sur le nouveau fibré $L\big(T(B), M(B)\big)$ sera définie par la formule:

$$\gamma_L(H, H')(X) = \gamma\big(H(X), H'(X)\big) \quad \big(\forall\, H, H'\in\mathfrak{M}(L),\, X\in\mathfrak{X}(B)\big).$$

Si on a ∇_x et D_x les dérivations riemaniennes de $T(B)$ et $M(B)$ respectivement on peut introduire la dérivation D_X^L sur $L(T(B), M(B))$ par la formule

$$D_X^L H(Y) = D_X(H(Y)) - H(\nabla_X Y) \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{X}(B), H \in \mathfrak{M}(L)).$$

Cette dérivation conserve aussi la métrique γ_L; donc D^L est une dérivation riemanienne.

DEUXIÈME PARTIE:

Les distributions regulières sur les $\mathrm{B}(g)$

§ 3. Les distributions différentiables

8. *Préliminaire.* Dans le dernier temps on remarque l'intéret croissant pour l'étude des systèmes différentielles, surtout pour celles finie dimensionels des espaces de Hilbert ou de Banach [23]. Ces recherches s'enquadrent dans le sujet annoncé. En effet, si on a une application C^∞ différentable $y\colon U \subset E \to F$ des espaces de Banach, alors $\dfrac{dy}{dx}\colon U \subset E \to L(E, F)$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\colon U \subset E \to L_2(E, F)$ etc. seront aussi des applications C^∞. En nous bornant au premier ordre, une équation sera $\dfrac{dy}{dx} = \Phi(x, y)$. Puisque $\dfrac{dy}{dx} \in L(E, F)$, la fonction donnée $\Phi(x, y)$ va prendre ses valeurs dans $L(E, F)$, plus précis: si $V \subset E \times F$ est un ouvert, alors $\Phi\colon V \to L(E, F)$ est une fonction connue de classe C^∞; la solution de cette équation sera une fonction $C^\infty y = f(x)$ définie dans $U \subset E$ à valeurs dans F telle que $(x, f(x)) \in V (\forall X \in U)$ et $f'(x) = \Phi(x, f(x))$ $(\forall x \in U)$. En particulier, pour $F \subset E$ — un sous-espace, il y a l'inclusion $L(E, F) \subset \subset L(E, E)$; et puis plus particulier, si $F = R^n$ et E un espace de Hilbert on arrive au cas du système fini dimensionel des espaces hilbertiens.

Maintenant, si $B(g)$ est une variété généralisée et on considère la distribution différentiable $\Delta(B)$, cela veut dire qu'il est donnée l'application regulière $\Delta\colon U \subset B \to \to T(B)$, $x \to \Delta_x \subset T_x \leftarrow (B)$ où Δ_x est un sous-espace fermé de l'espace tangent, isomorphe à $F \subset E$ pour chaque $x \in B$. Alors, la distribution donnée est un sous-fibré de $T(B)$ et si $F = R^n$ nous aurons les distributions finie dimensionelles de $B(g)$ qui englobent evidemment les systèmes considérés plus haut. Mais notre intéret sera dirigé principalement vers les proprietés géométriques de cet objet assez général.

9. *La distribution complémentaire.* Soit $\Delta(B)$ une distribution regulière sur $B(g)$, c'est-à-dire un sous fibré du $T(B)$ à fibre type $F \subset E$. L'en comparant avec la définition d'une variété non-holonome de V^n rimannien [39], on voit que les deux notions sont synonimes, mais chez nous on a une telle variété sur une variété hilbertienne généralisée.

Si $\Delta(B)$ est une distribution involutive, alors la variété correspondante est holonome: par chaque point $x \in B$ passe une sous-variété B', tangente à la fibre Δ_x dans chaque $y \in U_x \subset B'$. La restriction à B' de $\Delta(B)$, à savoir $\Delta(B)/B'$, est un fibré vectoriel de base B'.

Puisque dans $T_x(B)$ nous avons à la disposition une métrique, on peut construire, dans chaque $x \in B$, l'espace complémentaire Δ_x^n et on a $T_x(B) = \Delta_x \oplus \Delta_x^n$.

L'ensemble $\bigcup_{x\in\beta} \Delta^n_x = \Delta^n(B)$ sera aussi un sous-fibré de $T(B)$ de fibre $F^n(F\oplus F^n = E)$ et on a la somme de WHITNEY $\Delta(B)\oplus\Delta^n(B) = T(B)$, où chaque terme est doué de la métrique induite g_t et g_n respectivement.

Si ∇_X est une connexion hilbertienne de $B(g)$, elle conserve la métrique et on a:

$$(:)\ \nabla_X g(Y, Z) \equiv Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0 \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)).$$

La courbure de ∇ est donné par la formule

$$R(X, Y)Z = \{[\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}\} Z.$$

Celle-ci permet d'introduire la courbure rimanienne donnée par

$$R(U, Z, X, Y) = g(R(X, Y)Z, U).$$

En particulier, si X, Y sont deux champs vectoriels, on peut y etendre la définition de la courbure sectionnelle du plane engendré par X et Y, en chaque $x\in B$. Cette expression scalaire est donné par

$$K(X, Y) = R(X, Y, X, Y) : \{g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y)\}.$$

Si X, Y sont orthonormés on a $K(X, Y) = R(X, Y, X, Y)$.

La connexion considérée ∇_X induira dans les sous-fibrés $\Delta(B)$ et $\Delta^n(B)$, les lois de dérivations D^t_X et D^n_X qui conservent les métriques induites. La courbure des D^t_X et D^n_X sera détérminée moyennant certaines restrictions de la courbure R. Toutes cettes affirmations font objet de numéro suivant.

10. *Les formules de Gauss—Weingarten.* Soit $\xi\in\mathfrak{X}(B)$ un champ vectoriel sur $B(g)$; la somme $T(B) = \Delta(B)\oplus\Delta^n(B)$impose la suivante décomposition $\xi = X + \mathfrak{N}$, où X est la componnente tangentielle et $\mathfrak{N}$-celle normale du champ ξ. Dans ce qui suit nous désignons par $X, Y, Z\ldots\in\mathfrak{X}(\Delta)$ les champs tangentiels et par $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}, \ldots$ $\ldots\in\mathfrak{X}(\Delta^n)$ les champs appartenant à la distribution normale. En utilisant la décomposition, aux champs vectoriels $\nabla_X Y$, $\nabla_X \mathfrak{N}$ nous aurons les suivantes formules

$$(G-W) \qquad \nabla_X Y = D^t_X Y + \alpha(X, Y), \quad \nabla_X \mathfrak{N} = -A_{\mathfrak{N}}(X) + D^n_X \mathfrak{N},$$

où le premier terme de la somme indique la componente tangentielle, tandis que le second — celle normale. D'où il en résulte le

Théorème. *Soient $\Delta(B)$ une distribution regulière et ∇ une connexion hilbertienne sur la variété $B(g)$. L'opérateur ∇_X engendre les suivantes quatre applications.*

1. *$D^t_X(D^n_X)$ est la loi de dérivation sur le fibré $\Delta(B)$ $(\Delta^n(B))$ induite par ∇_X qui conserve la métrique g_t (g_n); celle-ci peut être appelée la dérivation covariante interne sur $\Delta(B)$ $(\Delta^n(B))$,*
2. *L'application $\alpha : \mathfrak{X}(\Delta)\times\mathfrak{X}(\Delta)\to\mathfrak{X}(\Delta^n)$ $(A : \mathfrak{X}(\Delta^n)\times\mathfrak{X}(\Delta)\to\mathfrak{X}(\Delta))$ est un opérateur local F-bilinéaire à valeurs dans F-module $\mathfrak{X}(\Delta^n)$ $(\mathfrak{X}(\Delta))$ qui peut être appelée la dérivation covariante externe.*
3. *Les opérateurs α et A sont liés par $g(\alpha(X, Y), \mathfrak{N}) = g(A_{\mathfrak{N}}(X), Y)$.*

Les remarquables relations (G—W) constituent précisement les formules de Gauss—Weingarten exprimées sous forme invariante.

La **preuve** est immédiate. Si on remplace la première de (G—W) dans la condition (:) on trouve

$$Xg(Y, Z) - g(D^t_X Y, Z) - g(Y, D^t_X Z) - g\big(\alpha(X, Y), Z\big) - g\big(Y, \alpha(X, Z)\big) = 0.$$

Puisque les derniers deux terms sont zéro on a la premiêre affirmation. Puis, en considérant la condition $\nabla_X g(Y, \mathfrak{N})=0$ on obtient la dernière formule etc.

En particulier, si ∇ est une connexion de Levi—Civita, en exprimant que la componente normale de la torsion $T(X, Y)$ est zéro on a immédiatement

$$\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) = [X, Y]^n.$$

Théorème. *Soient $\Delta(B)$ une distribution et ∇ la connexion de Levi—Civita sur $B(g)$. $\Delta(B)$ sera involutive si et seulement si la forme bilinéaire α est symétrique.*

En effet, si Δ est une distribution involutive, alors conforme le critère de Frobenius on a $[X, Y]\in\mathfrak{X}(\Delta)$ pour chaque paire de $X, Y\in\mathfrak{X}(\Delta)$, c'est-à-dire $[X, Y]^n=0$, d'où affirmation directe; la reciproque est immédiate.

Nous nous arretons un peu au cas d'une distribution involutive finie dimensionelles $\Delta(B)$. Si $\dim \Delta(B) = p$, on peut choisir une sous-base orthonormé $X_a\in\mathfrak{X}(\Delta)$, $a=1, \dots, p$ de $\Delta(B)$. Maintenant la forme quadratique $\alpha(X, X)$ à valeurs dans $\mathfrak{X}(\Delta^n)$, permet d'etendre à $\Delta(B)$ la notion de la courbure moyenne. Dans chaque point $x\in B$ celle-ci cera donné par la formule

$$K_m(\Delta) = \sum_{a=1}^{p} \alpha(X_a, X_a).$$

Si $\dim B<\infty$ on retrouve l'expression usitée de la courbure moyenne [36]. Puisque la $K_m(\Delta)$ est la trace de la forme α, elle sera encore une section dans le fibré normal $\Delta^n(B')$ où B' est la variété intégrale p-dimensionelle de $\Delta(B)$. Si dans chaque point $x\in B'$ on a $K_m(\Delta)=0$ alors la sous-variété B' peut être appelée minimale. Dans le cas $p=1$, la distribution $\Delta(B)$ est donnée par un champ unitaire u qui satisfait la condition $\alpha(u, u)=0$; par suit on a $\nabla_u u=0$. Donc les lignes vectorielles du champ u sont les géodésiques de ∇. Dans le cas $p>1$ de la relation $\nabla_X X = D^t_X X+\alpha(X, X)$ il suit un théorème tripartite et en particulier résulte: une variété intégrale complétement géodésique $\big(\nabla_X X=D^t_X X=0\big)$ est en même temps minimale.

Dans le cas d'une distribution p-dimensionelle sur $B(g)$ on peut parler encore d'une courbure (scalaire) de $\Delta(B)$ et de la sous-variété (intégrale) B'. Celle-ci sera définie par la formule $K_s(\Delta) = \sum_{a<b=1}^{p} K(X_a, X_b)$ où $K(X_a, X_b)$ est la courbure sectionnelle de direction planaire définie par la paire X_a, X_b de la sous-base choisie, et alors on a $K_S(\Delta) = \sum_{a<b=1}^{p} R(X_a, X_b, X_a, X_b)$. Cette dèfinition est evidemment indépendente de la sous-base de $\Delta(B)$; dans le cas de $\dim B<\infty$ elle a été utilisée dans [38].

11. *Les courbures des dérivations covariantes internes.* Soit ∇_X la dérivation covariante d'une connexion riemannie de $B(g)$ et D^t_X, D^n_X les dérivations internes sur $\Delta(B)$ et $\Delta^n(B)$; nous désignerons par R, R^t et R^n leurs courbures. Rappelons que $R(X, Y)Z$ est un endomorphisme de $\mathfrak{X}(B)=\mathfrak{X}(\Delta)\oplus\mathfrak{X}(\Delta^n)$ et qu'on a la décomposition $\zeta=Z+\mathfrak{N}$ pour chaque $\zeta\in\mathfrak{X}(B)$; en l'appliquant aux champs $R(X, Y)Z$, $R(X, Y)\mathfrak{N}$ on a le

Théorème. *Dans les hypothèses précisés plus haut il y a la suivante décomposition remarquable*

$$(G-C)\qquad \begin{aligned} \{R(X,Y)Z\}^t &= R^t(X,Y)Z+Q(X,Y)Z \\ \{R(X,Y)\mathfrak{N}\}^n &= R^n(X,Y)\mathfrak{N}+S(X,Y)\mathfrak{N} \end{aligned}$$

$$(\forall X, Y, Z, U\in \mathfrak{X}(\Delta),\ \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'\in \mathfrak{X}(\Delta^n))$$

où $Q(X, Y):\mathfrak{X}(\Delta)\to\mathfrak{X}(\Delta)$ et $S(X, Y):\mathfrak{X}(\Delta^n)\to\mathfrak{X}(\Delta^n)$ sont les formes F-bilinéaires alternées ayant valeurs respectivement dans le F-modules $\mathfrak{X}(\Delta)$ et $\mathfrak{X}(\Delta^n)$.

La preuve résulte sans difficulté si on applique deux fois les formules (G—W) et utilise l'expression de la courbure hilbertienne. Alors les relations (G—C) de plus haut prendront la forme

$$(G-C')\qquad \begin{aligned} R(U,Z,X,Y) &= R^t(U,Z,X,Y)+g_n(\alpha(X,Z),\alpha(Y,U))-g_n(\alpha(Y,Z),\alpha(X,U)), \\ R(\mathfrak{N}',\mathfrak{N},X,Y) &= R^n(\mathfrak{N}',\mathfrak{N},X,Y)-g_t([A_{\mathfrak{N}},A_{\mathfrak{N}'}]X,Y), \end{aligned}$$

d'où il suit toutes les affirmations du théoréme.

Cas particulier: si $B(g)=E(g)$ est une espace de Hilbert généralisé et $\Delta(E)$ est une distribution involutive, de la première de (G—C′) on déduit que

$$R^t(U,Z,X,Y)=g(\alpha(Y,Z),\alpha(X,U))-g(\alpha(X,Z),\alpha(Y,U)),$$

ce qui donne la liaison entre la courbure riemanienne de la variété intégrale B' et la deuxième forme quadratique fondamentale α de B.

§ 4. Les distributions de A. Myller

12. Dans chaque distribution $\Delta(B)$ sur $B(g)$ il y a toujours des sous-distributions involutives $D(B)\subset\Delta(B)$ la fibre $H\subset F$ de laquelle est un sous-espace fermé de F. Si $\dim\Delta=p$ et $\dim D=q$, alors on a $1\leqq q<p<\infty$ parceque pour $q=1$, la distribution D est toujours involutive; pour le cas général, la théorie d'Elie Cartan sur les systèmes en involution confirme l'existence d'une telle sous-distribution. La paire $D\subset\Delta$ sera par définition une M-distribution parceque cette notion englobe tant la configuration de Myller [31], quant aussi celle de la M-distribution structurale [18—19].

La métrique $g_t^{\,\prime}$ de la distribution $\Delta(B)$ nous permet d'introduire la sous-distribution normale $D^\nu(B)$ ainsi qu-on a la décomposition $D+D^\nu=\Delta$ laquelle nous conduit à la somme de Whitney

$$D(B)\oplus D^\nu(B)+\Delta^n(B)=T(B).$$

Convenons a désigner par $X, Y, \ldots\in\mathfrak{X}(D), \xi, \eta, \ldots\in\mathfrak{X}(D^\nu)$ et par D^τ et D^ν la scision de la connexion interne D^t de la $\Delta(B)$. En utilisant les formules (G—W)

$$\nabla_X Y=D^t_X Y+\alpha(X,Y),\quad \nabla_X\xi=D^t_X\xi+\alpha(X,\xi),\quad \nabla_X\mathfrak{N}=-A_{\mathfrak{N}}(X)+D^n_X\mathfrak{N},$$

adaptées à la nouvelle configuration on arrive aux suivantes égalités interessantes:

$$M(G-W)\quad \begin{array}{ll} \nabla_X Y = D^{\tau}_X Y + \beta(X, Y) + \alpha(X, Y), & A_{\mathfrak{N}}(X) = A^{\tau}_{\mathfrak{N}}(X) + A^{\nu}_{\mathfrak{N}}(X), \\ \nabla_X \xi = -B_{\xi} X + D^{\nu}_X \xi + \alpha(X, \xi), & \text{où} \quad g_n(\alpha(X, Y), \mathfrak{N}) = g_t(A^{\tau}_{\mathfrak{N}}(X), Y), \\ \nabla_X \mathfrak{N} = -A^{\tau}_{\mathfrak{N}} X - A^{\nu}_{\mathfrak{N}} X + D^n_X \mathfrak{N}, & g_n(\alpha(X, \xi), \mathfrak{N}) = g_t(A^{\nu}_{\mathfrak{N}}(X), \xi). \end{array}$$

Dans cettes formules chaque terme appartient à une des distributions D, D^{ν}, Δ^n.

13. *Les formules de Darboux—Ribaucour.* Maintenant nous nous arretons au cas particulier dim $D=1$; la distribution $D(B)$ est donnée par un champ unitaire $u\in\mathfrak{X}(B)$. Rappelons que pour les lignes vectorielles du champ u on peut définir par réccurence les repères canoniques de divers ordres finis et les formules de Frenet correspondantes [23] $\nabla_u u = \varkappa_1 u_1, \ldots \nabla_u u_\alpha = -\varkappa_\alpha u_{\alpha-1} + \varkappa_{\alpha+1} u_{\alpha+1}$ $(\alpha=0, 1, 2, \ldots <\infty$, $u=u_0$, $x_0=0)$, où u_α est la normale, $\varkappa_\alpha$ — la courbure d'ordre α de la ligne vectorielle $\Gamma\subset\Delta$. Au commencement, nous décomposons u selon D^{ν} et Δ^n, à savoir $u_1 = \cos\varphi\xi_1 + \sin\varphi\mathfrak{N}_1$ et désignons $u=\xi_0$, $\mathfrak{N}_0=0$, $g(\xi_0, \xi_1)=0$. En utilisant maintenant les formules $M(G—W)$ du numéro précédent il y a

$$\nabla_{\xi_0}\xi_1 = D^t_{\xi_0}\xi_1 + \alpha(\xi_0, \xi_1), \quad \nabla_{\xi_0}\mathfrak{N}_1 = -A_{\mathfrak{N}_1}(\xi_0) + D^n_{\xi_0}\mathfrak{N}_1 \quad \text{avec}$$
$$g(\alpha(\xi_0, \xi_1), \mathfrak{N}_1) = g(A_{\mathfrak{N}_1}\xi_0, \xi_1).$$

En utilisant le formules de Frenet on a $D^t_{\xi_0}\xi_1 = -\varkappa^1_g\xi_0 + \varkappa^2_g\xi_2$, $D^n_{\xi_0}\mathfrak{N}_1 = -\varkappa^1_n\mathfrak{N}_0 + \varkappa^2_n\mathfrak{N}_2$ où ξ_i, $\mathfrak{N}_i$ $(i=0, 1, 2)$ sont les verseurs tangent et normal d'ordre i à $\Gamma\subset\Delta$, tandis pue $\varkappa^i_g$, $\varkappa^i_n$ sont les courbures géodésique et normale d'ordre i de la ligne Γ situé sur la variété non holonome B_Δ définie par $\Delta(B)$. Puis, on applique l'induction complète ce qui nous conduit aux formules récursives pour les dérivations covariantes internes de la $\Delta(B)$ donnée et de la complémentaire $\Delta^n(B)$. On arrive ainsi aux suivantes formules de Darboux—Ribaucour, relatives à une ligne Γ située sur la distribution (B):

$$(D-R)\quad \begin{array}{c} D^t_{\xi_0}\xi_i = -\varkappa^i_g\xi_{i-1} + \varkappa^{i+1}_g\xi_{i+1}, \quad D^n_{\xi_0}\mathfrak{N}_a = -\varkappa^a_n\mathfrak{N}_{a-1} + \varkappa^{a+1}_n\mathfrak{N}_{a+1} \\ g(\alpha(\xi_0, \xi_i), \mathfrak{N}_a) = g(A_{\mathfrak{N}_a}\xi_0, \xi_i) \quad \text{où} \quad A_{\mathfrak{N}_a}\xi_0 = A^i_a\xi_i. \\ \left.\begin{array}{c} a = 1, 2, \ldots, \xi_0 = e_0 \\ i = 0, 1, 2, \ldots, \mathfrak{N}_0 = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \end{array}$$

Si on a: dim $B(g)<\infty$, B l'espace Riemann, la distribution $\Delta(B)$ involutive, on retrouve les formules établies dans [32].

§ 5. Sur la Géométrie d'un champ unitaire

14. Dim $\Delta^n(B)=1$. A un champ unitaire $u\in\mathfrak{X}(B)$ d'une variété $B(g)$ on peut associer la congruence $\{\gamma\}$ de ses lignes vectorielles et l'hypersurface non-holonome B_u, normale à la congruence. Autrement dit à u nous associerons la distribution $\Delta(B)$ ayant codim $\Delta=1$ et celle complémentaire $\Delta^n(B)$ engendrée par u. Pour l'étude locale de cette configuration on associe d'abord à chaque ligne γ les voisinages de divers ordres d'un point $x\in\gamma\subset B$ et les formules de Frenet correspondantes.

Nous supposons que le champ u est générique. Cela veut dire qu'à l'ordre premier on suppose $\nabla_u u \neq \lambda_0 u$ c'est-à-dire nous excluerons les champs géodésiques. Alors on a $\nabla_u u = \varkappa_1 u_1$, où u_1 est la normale et $\varkappa_1$ la courbure d'ordre premier de la ligne γ.

Puisque $u_1 \in \mathfrak{X}(B_u)$ nous avons trouvé un champ des directions tangentes à la B_u. A l'etape suivante nous excluerons aussi le cas $\nabla_u u_1 = \lambda_1 u_1$ c'est à dire les lignes γ le long desquelles la normale u_1 est transportée par parallélisme, etc.

Maintenant nous utilisons le formules (G—W), en considérant $\mathfrak{N} = u$ — le champ normale à la B_u, et les verseurs $e, e_1, \ldots$ tangents à B_u (qui peuvent être par exemple $u_1, u_2, \ldots$ les normales succesives à γ). Nous avons alors

$$(\cdot) \qquad \nabla_e e_1 = D^t_e e_1 + \alpha(e, e_1), \quad \nabla_e u = -A_u(e) + D^n_e u, \quad \nabla_u e = -A_e(u) + D^t_u e$$

et encore $g(A_u(e), e_1) = \varphi(e, e_1), g(u, u) = 1, \alpha(e, e_1) = \varphi(e, e_1)u$.

Soit Γ une ligne situé sur B_u, donnée par $x = x(s)$; le verseur tangent à Γ sera $e = \dfrac{dx}{ds} = \dot{x}(s)$ où ds est élément de son arc. Les dernières formules deviennent

$$\nabla_e e = D^t_e e + \alpha(e, e) \quad \text{et} \quad \alpha(e, e) = \varphi(e, e)u.$$

Par consequence, d'ici on peut définir les suivants invariants de la configuration $\Gamma \subset B_u$:

$$(:) \qquad \|\nabla_e e\| = \varkappa_a(\Gamma) \quad \|D^t_e\| = \varkappa_g(\Gamma), \quad \varphi(e, e) = \varkappa_n(e).$$

La première fonction est la corbure $\varkappa_1$ de Γ; si $\varkappa_a = 0$, la ligne Γ est une autoparalléle de la connexion ∇. La deuxième $\varkappa_g$ est appelée la courbure géodésique de la Γ sur B_u; si $\varkappa_g = 0$, on dit que Γ est une géodésique de la variété. La dernière $\varkappa_n$ est appelée la courbure normale de la direction e tangente à B_u. Si $\varkappa_n = 0$, on dit que e est une direction asymptotique sur B_u; puisque on a $\varphi(e, e) = 0$ alors il en résulte que l'ensemble des directions asymptotiques dans $x \in B$ de la varété B_u engendre un hypercône de deuxième ordre. Le problème relatif aux directions principales sur B_u, c'est-à-dire de trouver telles directions tangentes à B_u pour lesquelles la courbure normale est un extremum est assez difficile parceque il conduit à un système linéaire infini. Enfin, si la deuxième forme φ de la B_u est conforme à la métrique induite g_t, la B_u sera localement spherique.

De la formule (:) on a l'inegalité $\varkappa_a(\Gamma) \leqq \varkappa_g(\Gamma) + \varkappa_n(\Gamma)$ d'où on a la consequence si Γ est en même temps une géodésique et une asymptotique sur la variété B_u elle sera encore une autoparallelle de la connexion ∇.

Un autre remarque suit de la formule $(\cdot)$ et notamment: si vecteur $A_u(e)$ tangent à B_u, a la direction e, $A_u(e) = \lambda e$, cette condition est equivalente à

$$(!) \qquad (\nabla_e u, e, u) = 0.$$

Or, cette relation montre que la normale u de la hypersurface B, lelong de la ligne $\Gamma \subset B_u$ engendre une surface développable. On trouve ainsi une propriété bienconnue (O. Rodrigues) d'une ligne de courbure sur une surface; donc on a obtenu une extension de celle-ci sur la variété B_u.

Jusqu'ici on peut dire que, du voisinage d'ordre deux de la B_u est liée la deuxième forme quadratique φ; à une ligne Γ sur B_u on peut associer les invariant-des courbures-à l'aide desquelles il est possible d'introduire familles des lignes remarquables. Si on prend $e = u_1$ ou $u_2, \ldots,$ alors les invariants considérés serondt 'ordre plus elevé. Puisque l'étude d'une variété non holonome est conçu par la connaissance des propriétés de ses lignes il en résulte que l'esquisse de plus haut est un commencement de cet étude.

En conclusion, on peut dire que la géométrie locale d'un champ sur $B(g)$ se réduit à l'étude différentiel de la congruence $\{\gamma\}$ qui est indissoluble lié à l'étude de la variété normale B_u.

La dernière *remarque* se refère à la torsion de la varété B_u et à l'holonomie de celle ci. En ce but nous utiliserons l'isomorphisme canonique $T(B)\to T^*(B)$ donné par la métrique g, qui permet d'associer au champ u la forme de Pfaff ω_u. Alors, l'isomorphisme inverse associera à la $d\omega_u$ un bivecteur et à la $d\omega_u\wedge\omega_u$ un trivecteur. Le premier donne la possibilité de lier au champ une courbure sectionnelle et le deuxième de concevoir la notion de la torsion pour la variété non holonome B_u. L'annulation de cette dernière donne la caracterisation de l'holonomie de la B_u. Analytiquement cette condition s'exprime par la relation $d\omega_u\wedge\omega_u=0$.

§ 6. Sur la M-distribution bidimensionelle

15. *Dans ce cas* $\dim \Delta(B)=2$ *et par suite* $\dim D(B)=1$. La distribution $D(B)$ est donné par un champ unitaire u et la $\Delta(B)$ sera connue si on a encore un champ unitaire $\bar{u}$, par exemple orthogonal à u et on a $g(u,\bar{u})=0$. Dans ce qui suit nous supposons que $B(g)$ est hilbertienne et ∇ est la connexion de Levi—Civita.

D'abord nous ecrivons les formules de Frenet de γ: $\nabla_u u=\varkappa_1 u_1$, $\nabla_u u_1=-\varkappa_1 u+$ $+\varkappa_2 u_2$. On a evidemment $u_1=\sin\varphi\xi_1+\cos\varphi\mathfrak{N}_1$ ($\mathfrak{N}_1$ sera la première normale au plan Δ_x). Puisque $\nabla_u u=\varkappa_g^1\bar{u}+\varkappa_n^1\mathfrak{N}_1$ il suit $\varkappa_g^1=\varkappa_1\sin\varphi$, $\varkappa_n^1=\varkappa_1\cos\varphi$.

Il est utile de considérer encore le verseur $n_2=-\cos\varphi\bar{u}+\sin\varphi\mathfrak{N}_1$ et alors on aura

$$u_2=\sin\psi\, n_2+\cos\varphi v_2,\quad \nabla_u u_1+\varkappa_1 u_1=\varkappa_2(\sin\psi n_2+\cos\psi v_2).$$

Si on désigne par $\varkappa_\gamma^2=\varkappa_2\sin\psi$, $\varkappa_v^2=\varkappa_2\cos\psi$ il en résulte $\varkappa_\gamma^2+\nabla_u\varphi=\tau_g^1$ et $\varkappa_v^2 v_2=$ $=\sin\varphi\beta(u,\bar{u})+\cos\varphi\varkappa_n^2\mathfrak{N}_2$ puisque

$$\nabla_u\bar{u}=-\varkappa_g^1 u+\alpha(u,\bar{u}),\quad \nabla_u\mathfrak{N}_1=-\varkappa_n^1 u-\tau_g^1\bar{u}+D_u^n\mathfrak{N}_1\quad\text{et}\quad \alpha(u,\bar{u})=\tau_g^1\mathfrak{N}_1+B(u,\bar{u}).$$

Ainsi nous arrivons aux formules

$$\begin{aligned}
&\nabla u-\varkappa_g^1\bar{u}-\varkappa_n^1\mathfrak{N}_1=0,\\
&\nabla_u\bar{u}+\varkappa_g^1 u-\tau_g^1\mathfrak{N}_1=\beta(u,\bar{u})\in\mathfrak{N}(\Delta^n)\\
&\nabla_u\mathfrak{N}_1+\varkappa_n^1 u+\tau_g^1\xi_1=-\varkappa_2\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}v_2-\operatorname{tg}\varphi\beta(u,\bar{u})\in\mathfrak{X}(\Delta^n).
\end{aligned}$$

Si $\psi=0$, il y a $\beta(u,\bar{u})=0$, $\tau_g^1=\varkappa_2+\nabla_u\varphi$ et alors on retrouve les formules de Darboux—Ribaucour sous forme classique.

Puisque ∇ est la connexion de Levi—Civita nous avons $[u,\bar{u}]^n=\alpha(u,\bar{u})-\alpha(\bar{u},u)$; en général on a $[u,\bar{u}]=-\varkappa_g^1 u-D_{\bar{u}}^t u+\alpha(u,\bar{u})-\alpha(\bar{u},u)$. Parsuite, dans ce cas la torsion T_Δ de la distribution Δ peut être mésurée par l'ecart de la symétrie de l'application $\alpha:\mathfrak{X}(\Delta)\times\mathfrak{X}(\Delta)\to\mathfrak{X}(\Delta^n)$; autrement dit cet ecart est mésuré par la partie antisymétrique de la forme α. Donc on peut écrire $T_\Delta=\tau_g^1\mathfrak{N}_1-\bar{\tau}_g^1\overline{\mathfrak{N}}_1+\beta(u,\bar{u})-\beta(\bar{u},u)$. Si $\Delta(B)$ est involutive on a $T_\Delta=0$ et $\alpha(u,\bar{u})=\alpha(\bar{u},u)$.

Puisque $\alpha(u,u)=\varkappa_n^1\mathfrak{N}_1$ et $\alpha(\bar{u},\bar{u})=\bar{\varkappa}_n^1\overline{\mathfrak{N}}_1$ la courbure moyenne de la distribution sera donnée par $K_m(\Delta)=\varkappa_n^1\mathfrak{N}_1+\bar{\varkappa}_n^1\overline{\mathfrak{N}}_1$. Si $\varkappa_n^1=\bar{\varkappa}_n^1=0$ c'est-à-dire on a sur B_Δ directions asymptotiques orthogonales, Δ sera minimale en B; on retrouve ainsi un resultat classique des surfaces minimales. Mais ici on peut avoir la suivante situation $\overline{\mathfrak{N}}_1=\varepsilon\mathfrak{N}_1$ ($\varepsilon=\pm 1$). Dans ce cas la courbure moyenne est $K_m(\Delta)=$ $=(\varkappa_n^1+\varepsilon\bar{\varkappa}_n^1)\mathfrak{N}_1$. Si notre distribution est minimale on a la relation scalaire $\varkappa_n^1+\varepsilon\bar{\varkappa}_n^1=0$ en retrouvant aussi un autre propriété caractéristique d'une surface minimale.

Enfin nous nous proposons d'evaluer la courbure sectionnelle en direction planaire Δ. Preablablement nous calculerons la courbure de la dérivée covariante interieure D^t. Elle est donnée par

$$R^t(u,\bar{u})\bar{u}=D_u^t(D_{\bar{u}}^t\bar{u})-D_{\bar{u}}^t(D_u^t\bar{u})-D_{[u,\bar{u}]^t}^t\bar{u}.$$

Or $[u,\bar{u}]=\nabla_u\bar{u}-\nabla_{\bar{u}}u$ et parsuite $[u,\bar{u}]^t=\bar{\varkappa}_g'\bar{u}-\varkappa_g^1u$.
Alors il y a

$$R^t(u,\bar{u})\bar{u}=D_u^t(\bar{\varkappa}_g^1u)-D_{\bar{u}}^t(-\varkappa_g^1u)-D_{\bar{\varkappa}_g'\bar{u}-\varkappa_g'u}^t\bar{u}.$$

Après des calculs on obtient l'expression

$$R^t(u,\bar{u})\bar{u}=D_u^t\bar{\varkappa}_g^1+D_{\bar{u}}^t\varkappa_g^1-(\varkappa_g^1)^2-(\bar{\varkappa}_g^1)^2\}u.$$

Puisque $K(u,\bar{u})=g(R^t(u,\bar{u})\bar{u},u)$ on arrive en definitif à la formule importante pour la courbure sectionnelle

$$K(\Delta)=\frac{d\bar{\varkappa}_g^1}{ds}+\frac{d\varkappa_g^1}{d\bar{s}}-(\varkappa_g^1)^2-(\bar{\varkappa}_g^1)^2.$$

Elle s'exprime seulement par les courbures géodésiques des lignes sur $\Delta(B)$. Donc on a une nouvelle extension du théorème d'egregium de Gauss, aux distribution bidimensionelles d'une variété hilbertienne.

Travaux cités

[1] T. Ya, Azizov, et I. S. Iohvidov, Les opérateurs linéaires dans les espaces hilbertiens à G-métrique (en russe). *Uspehi mat. nauc,* **26**, (1971), No 4, 43—92.

[2] S. M. Bahrah, La théorie des hypersurfaces de l'espace euclidien généralisé et les espaces riemaniens généralisés de première classe. *Izvestia Vouzov,* (1960), No **3**, 54—61. (en russe).

[3] S. M. Bahrah, Les espaces riemaniens généralisés conforme-euclidiens. (en russe). *Izvestia Vouzov*, (1965), No **6**, 22—26.

[4] S. M. Bahrah, Quelques problèmes de l'espace euclidien généralisé à *n* dimension. (en russe). *Izvestia Vouzov*, 1958, No **6/7**, 7—16.

[5] H. Cartan, Formes différentielles, *Paris*, 1967.

[6] Y. Choquet-Bruhat, Géométrie différentielle etc. *Paris,* 1968.

[7] R. Coock, Infinite matrices and sequence space, *London*, 1950.

[8] M. Craioveanu, Contribuţii la studiul unor structuri geometrice pe varietăţi infinit dimensionale (Thèse), *Universitatea Iaşi,* 1970.

[9] E. B. Dynkin, Algèbres de Lie normées et groupes analytiques (en russe), *Uspehi mat. nauc,* **5**, (1950), No 1, 135—186.

[10] R. E. Edwards, Functional Analysis, *New York*, 1965.

[11] A. Einstein, Théorie de la gravitation généralisée, *Paris*, 1951.

[12] L. P. Eisenhart, General Riemann Spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **37**, (1951), No 5, 311.

[13] L. P. Eisenhart, Generalised Spaces of general Relativity, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **46**, (1960), No 12, 1602—4.

[14] L. P. Eisenhart, Generalised Riemannian Geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **48**, (1962), 1529 et **49**. (1963), 18—19.

[15] Gh. Gheorghiev, Despre geometria intrinsecă a unui cîmp de vectori, *St. şi Cercet. Mat., Iaşi* **2**. (1951), 1—21.

[16] Gh. Gheorghiev, Cîteva probleme geometrice legate de un cîmp de vectori unitari, *Bul. Acad. Rom., Mat.-Fiz.* **6**, (1954), 101—123.
341—346.

[17] Gh. Gheorghiev et I. Popa, Espaces à deux métriques données, *Anal. St. Univ, Iasi* **12** (1966) 341—346.

[18] Gh. Gheorghiev, Sur les distributions structurales d'un pseudogroupe de Lie, *Rendiconti Sem. Mat. Padova*, **39**, (1967), 35—46.

[19] Gh. Gheorghiev, Sur les distributions structurales d'une *G*-structure, *Anal. St. Univ. Iaşi*, **14**, (1968), 81—97.

[20] Gh. Gheorghiev, Sur les groupes de Lie-Banach, *Revue. roum. de Mathematiques* **15**, (1970), 1611—1623.

[21] Gh. Gheorghiev et V. Oproiu, Geometrie diferenţială I, II, *Editura Universităţii Iaşi*, 1971,

[22] Gh. Gheorghiev, Sur la dérivation de Lie dans les variétés de Banach, *Coll. Math.* **26**. (1972), 9—19.

[23] Gh. Gheorghiev, Sur la géométrie des distributions finie dimensionelles d'une variété de Hilbert, *Matematicheskie struktury*, *Sofia*, 1974, 57—68.

[24] Yu. P. Guinsburg et I. S. Iohvidov, Recherches sur les Géométrie des espaces infinis dimensionels à métrique bilinéaire *(en russe)*, *Uspehi mat. nauc.* **17**, 4 (1962), 2—56.

[25] H. V. Haahti, Zur Verallgemeinerung des Spur Operators, *Annal. Acad. Sci. Fennicae*, A, No **369**, 466.

[26] V. A. Hatzkewicz, Sur quelques propriétés géométriques et topologiques des espaces normés à métrique indéfinie *(en russe)*, *Izvestia Vouzov*, (1973), № 6, 97—102.

[27] A. N. Kolmogorov et S. V. Fomin, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, *Moskva*, 1968.

[28] S. Lang, Introduction to differential manifolds, *New York*, 1962.

[29] A. Maltzev, Eléments d'algébre linéaire *(en russe)*, *Moskwa*, 1948.

[30] V. D. Milman, La théorie géométrique des espaces de Banach I *(en russe) Uspehi Mat. Nauc.* **25**, (1970), № 3, 113—179.

[31] R. Miron, Configuraţii Myller în spaţii riemanniene, *Studii şi Cercet. Mat. Iaşi*, **12**, (1961), 315—340.

[32] R. Miron, Sur la géométrie des courbes des variétés V^m immergées dans les espaces de Riemann V^n, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **254**, (1962), 1189—1191.

[33] R. Miron, Asupra spaţiilor Riemann generalizate, *Bul. Inst. Pedagogic, Univ. Iaşi* (1969), 395—398.

[34] V. Murgescu, Contribuţii la studiul apaţiilor cu torsiune *(Thèse)*, Universitatea Iaşi, 1968.

[35] R. Ouzilou, Sur une axiomatique métrique de la géométrie, *Publ. Dép. Math. Lyon*, **7**, (1970), No 1, 1—39.

[36] J. Simons, Minimal varieties, *Ann. of Math.* **88**, (1968), 62—105.

[37] W. Slebodzinski, Exterior forms and their applications, *Monografie math.* No **52**, Warszawa, 1970.

[38] Gr. Stanilov, Eine Verallgemeninerung der Schnittkrümmung, *Arch. Math.* (Basel) **21**, (1970), 424—428.

[39] Gh. Vrânceanu, Les espaces non holonome, *Mémorial des sciences mathématiques*, No **76**, Paris, 1936.

[40] J. R. Wanstone, Connection satisfiyng a generalised Ricci lemma, *Canad. J. Math.* **16**, (1964), 449—560.

(Reçu le 27 octobre 1973.)