К геометрии гармонических функций

Н. И. КОВАНЦОВ (Киев)

К 60-летию проф. А. Рапчака

В [1] В. К. Дзядык дал геометрическую характеристику аналитических функций комплексного переменного, показав, что условия Коши-Римана являются следствием равенства площадей над любой областью плоскости x, y трех поверхностей — двух, определяемых компонентами аналитической функции, и третьей, определяемой квадратным корнем из суммы их квадратов. В настоящей заметке мы подвергаем более детальному анализу геометрию одной отдельно взятой гармонической функции, касаясь при необходимости геометрии и пары таких функций, определяющих вместе функцию комплексного переменного. При этом наряду с чисто геометрическими вопросами мы бегло рассмотрим также и вопросы, относящиеся к представлению общего решения уравнения Лапласа через функции действительного переменного. Результаты, которые будут приведены ниже, не были отмечены ни в общей (см., например, [2—7]), ни в специальной литературе, посвященной теории аналитических функций и конформных отображений.

Пусть

$$u = u(x, y) \tag{1}$$

— уравнение поверхности в прямоугольной декартовой системе координат xyu, при этом $u(x, y)$ — гармоническая функция. (Такую поверхность мы будем также называть гармонической.) Для последней, следовательно, будет выполнено уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{2}$$

Поверхность

$$U = u + u_x\,dx + u_y\,dy + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\,(U_{xx\ldots x}\,dx^{k-1} + \ldots + u_{yy\ldots y}\,dy^{k-1}) \tag{3}$$

$$dx = x^* - x,\; dy = y^* - y$$

есть параболоид $(k-1)$-го порядка, соприкасающийся с поверхностью (1) в точке $M(x, y, u)$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Параболоид (3) пересекает поверхность (1) по кривой k касательных к которой в точке M ортогонально проектируются на плоскость xy в k прямых, делящих полный угол на $2k$ равных частей.*

Доказательство. Действительно, указанные проекции определяются следующим уравнением k-го порядка:

$$u_{xx\ldots x}\,dx^k + C_k^1 u_{xx\ldots y}\,dx^{k-1}dy + \ldots + C_k^1 u_{xy\ldots y}\,dx\,dy^{k-1} + u_{yy\ldots y}\,dy^k = 0. \tag{4}$$

Положив

$$u_{xx\ldots x} = a_k, \quad u_{yx\ldots x} = b_k, \quad dx = ds\cos\varphi_k, \quad dy = ds\sin\varphi_k$$

(φ_k есть, очевидно, угол, определяемый одной из прямых (4) с осью абсцисс) и приняв во внимание (2), мы можем переписать уравнение (4) в виде

$$a_k(\cos^k\varphi_k - C_k^2\cos^{k-2}\varphi_k\sin^2\varphi_k + C_k^4\cos^{k-4}\varphi_k\sin^4\varphi_k - \ldots) +$$
$$+ b_k(C_k^1\cos^{k-1}\varphi_k\sin\varphi_k - C_k^3\cos^{k-3}\varphi_k\sin^3\varphi_k + \ldots) = 0$$

(сократили на ds^k), или

$$a_k\cos k\varphi_k + b_k\sin k\varphi_k = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} k\varphi_k = -\frac{a_k}{b_k},$$

следовательно,

$$\varphi_k = -\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{a_k}{b_k} + \frac{\pi h}{k}, \tag{5}$$

$$h = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Теорема доказана.

В частности, проекции асимптотических касательных ($k=2$) взаимно перпендикулярны.

Наоборот, если ортогональные проекции асимптотических касательных к поверхности (1) на плоскость xy взаимно перпендукулярны, то функция $u(x, y)$ — гармоническая.

Действительно, указанные проекции определяются квадратным уравнением

$$u_{xx}\,dx^2 + 2u_{xy}\,dx\,dy + u_{yy}\,dy^2 = 0. \tag{6}$$

Прямые (6) взаимно ортогональны тогда и только тогда, когда выполнено условие (2). Утверждение доказано.

Обратим внимание на то, что в силу равенства (5) линии (4) всегда действительны. В частности, всегда действительны асимптотические направления. Обратим также внимание на то, что, как это следует из доказанного утверждения, взаимная ортогональность проекций асимптотических влечет за собой справедливость теоремы (1) для любого соприкасающегося параболоида.

Пусть теперь

$$v = v(x, y) \tag{7}$$

— гармоническая функция, сопряженная с функцией $u(x, y)$ (это значит, что функция $w(x+iy)=u+iv$ есть аналитическая функция комплексного переменного). Для нее, очевидно, также справедлика теорема 1. В силу условий Коши-Римана

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{8}$$

будем иметь

$$v_{\underbrace{xx\ldots x}_{k}} = -u_{\underbrace{yx\ldots x}_{k}} = -b_k, \quad v_{\underbrace{x\ldots xy}_{k}} = u_{\underbrace{x\ldots xx}_{k}} = a_k.$$

Если ψ_k-угол, образуемый с осью абсцисс ортогональной проекцией на плоскость xy одной из касательных к линии пересечения поверхности (7) с ее соприкасающимся параболоидом $k-1$-го порядка, то, аналогично равенству (5), будем иметь соотношение

$$\psi_k = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k} + \frac{\pi h}{k}, \tag{9}$$

$$h = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Последнее равенство может быть переписано в виде:

$$\psi_k = -\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k} + \frac{\pi h}{k} + \frac{\pi}{2k} = \varphi_k + \frac{\pi}{2k}.$$

Но $\dfrac{\pi}{2k}$-половина угла между соседними прямыми (4). Это приводит к следующей теореме:

Теорема 2. *Ортогональные проекции на плоскость xy касательных к линии пересечения поверхности* (7) *с ее соприкасающимся параболоидом $k-1$-го порядка образованы биссектрисами углов между соседними проекциями на ту же плоскость касательных к линии пересечения поверхности* (1) *с ее соприкасающимся параболоидом того же порядка.*

В частности это справедливо для проекций асимптотических касательных указанных поверхностей.

Поскольку уравнения поверхностей (1) и (7) берутся относительно определенной неподвижной системы координат, то мы можем считать геометрически определенными не только единичные векторы нормалей к таким поверхностям, но и векторы их нормалей, определенные координатами

$$\mathbf{N}_1(u_x, u_y, -1), \quad \mathbf{N}_2(v_x, v_y, -1). \tag{10}$$

Назовем эти векторы ненормированными векторами нормалей. Тогда условия Коши-Римана позволяют сформулировать следующую теорему:

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием того, что две функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ есть компоненты аналитической функции комплексного переменного $w(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)$, является то, что ортогональная проекция на плоскость xy ненормированных векторов нормалей определяемых этими функциями поверхностей* (1) *и* (7) *равны по модулю (тогда и сами векторы*

$\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ равны по модулю) и взаимно перпендикулярны. При этом, если оси абсцисс и ординат расположены обычным образом (ось абсцисс направлена вправо, ось ординат — вверх), то поворот от проекции вектора $\mathbf{N}_1$ к проекции вектора $\mathbf{N}_2$ на 90° совершается против движения часовой стрелки.

Доказательство элементарно и мы его не приводим. Отметим лишь, что эта теорема может служить новой геометрической характеристикой аналитической функции комплексного переменного.

Примечание. Векторы (10) для аналитической функции комплексного переменного наклонены под одинаковыми углами к плоскости xy. Поэтому вместо того, чтобы говорить о ненормированных векторах $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$, можно говорить о единичных векторах нормалей, направленных, например, как и векторы (10), в отрицательную стророну оси аппликат.

Столь же элементарно и следующее предложение, также полностью характеризующее аналитическую функцию комплексного переменного:

Теорема 4. *Каждый цилиндр с образующими, параллельными оси аппликат, проектирует линию γ_1, определяемую уравнением $u(x, y)=c=\text{const}$, в линию на поверхности (7), вдоль которой проекция вектора $\mathbf{N}_2$ на плоскость $u=c_1$ касательна к γ_1. Подобным же образом каждый цилиндр с такими же образующими проектирует линию γ_2, определяемую уравнением $v(x, y)=c_2=$ $=\text{const}$, в линию на поверхности (1), вдоль которой проекция вектора $\mathbf{N}_1$ на плоскость $v=c_2$ касательна к γ_2. При этом модули векторов $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ должны быть равны друг другу.*

Действительно, линия, огибаемая проекцией вектора $\mathbf{N}_2$, определяется уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}.$$

В то же время линия γ_1 определяется уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}.$$

Если условия Коши-Римана выполнены, то

$$\frac{v_y}{v_x} = -\frac{u_x}{u_y}, \tag{11}$$

что доказывает теорему. Наоборот, если имеет место равенство (11), то, прибавляя к нему условие равенства модулей векторов

$$\sqrt{1+u_x^2+u_y^2} = \sqrt{1+v_x^2+v_y^2},$$

мы будем иметь

$$u_x = \pm v_y, \quad u_y = \mp v_x.$$

Получаем, таким образом, функцию (аналитическую) или функцию, комплексно сопряженную с ней.

Представляют интерес формулы, возникающие при преобразовании системы координат xy. Найдем их. Для этого, полагая $dx=ds\cos\varphi$, $dy=$

$= ds \sin \varphi$, запишем разложение гармонической функции в ряд в следующем виде

$$u = a_0 + (a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi)\, ds + \tfrac{1}{2}(a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi)\, ds^2 + \dots . \tag{12}$$

Если систему xy подвергнуть преобразованию

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b \end{aligned} \tag{13}$$

и положить

$$dx' = ds \cos \varphi', \quad dy' = ds \sin \varphi',$$

то, дифференцируя (13), будем иметь

$$\cos \varphi = \cos \varphi' \cos \alpha - \sin \varphi' \sin \alpha,$$

$$\sin \varphi = \cos \varphi' \sin \alpha + \sin \varphi' \cos \alpha,$$

следовательно,

$$\varphi = \varphi' + \alpha. \tag{14}$$

Внося это в (12), будем иметь

$$\begin{aligned} u &= a_0 + \big(a_1 \cos (\varphi' + \alpha) + b_1 \sin (\varphi' + \alpha)\big)\, ds + \\ &+ \tfrac{1}{2}\big(a_2 \cos 2(\varphi' + \alpha) + b_2 \sin 2(\varphi' + \alpha)\big)\, ds^2 + \dots . \end{aligned} \tag{15}$$

Еслу записать это равенство в виде

$$u = a_0' + (a_1' \cos \varphi' + b_1' \sin \varphi')\, ds + \tfrac{1}{2}(a_2' \cos 2\varphi' + b_2' \sin 2\varphi')\, ds^2 + \dots . \tag{16}$$

то получим искомые формулы преобразования для коэффициентов a_k, b_k:

$$a_k' = a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha, \quad b_k' = -a_k \sin k\alpha + b_k \cos k\alpha. \tag{17}$$

То обстоятельство, что в результате преобразования (13) гармоническую функцию удалось представить с помощью разложения (16), по форме в точности совпадающего с разложением (12), свидетельствует о том, что преобразование (13) переводит гармоническую функцию в гармоническую. Этого, разумеется, и следовало ожидать, так как указанным свойством обладают любые конформые преобразования плоскости xy, а преобразование (13) конформно. Этот факт позволит нам сформулировать нижеследующую теорему для двух любых взаимно перпендикулярных плоскостей, ортогональных плоскости xy, хотя для доказательства мы возьмём лишь плоскости xz и yz:

Теорема 5. *Поверхность* (1) *является гармонической тогда и только тогда, когда любые два смещения в плоскости xy, вдоль которых характеристики ее касательных плоскостей лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях, ортогональных к плоскости xy, — когда эти смещения взаимно перпендикулярны.*

Доказательство. Продифференцировав уравнение касательной плоскости

$$u_x(X - x) + u_y(Y - y) - (Z - u) = 0, \tag{18}$$

получим

$$(u_{xx}\,dx+u_{xy}\,dy)(X-x)+(u_{xy}\,dx+u_{yy}\,dy)(Y-y)=0. \tag{19}$$

Из (18) и (19) находим угловые коэффициенты характеристики:

$$\begin{gathered} l=-(u_{xy}\,dx+u_{yy}\,dy), \quad m=u_{xx}\,dx+u_{xy}\,dy, \\ n=u_y(u_{xx}\,dx+u_{xy}\,dy)-u_x(u_{xy}\,dx+u_{yy}\,dy). \end{gathered} \tag{20}$$

Характеристика параллельна плоскости yz, если $l=0$, следовательно, смещение определяется равенством

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{u_{xy}}{u_{yy}}. \tag{21}$$

Аналогично, характеристика параллельна плоскости xz, если $m=0$, т.е. для смещения

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{u_{xx}}{u_{xy}}. \tag{22}$$

Сопоставляя (21) и (22), замечаем, что смещения взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $u_{xx}=-u_{yy}$, т.е. когда поверхность (1) гармоническая. Утверждение доказано.

Столь же просто доказательство следующей теоремы:

Теорема 6. *Повепхность (1) является гармоничецкой тогда и только тогда, когда производные ненормированного вектора ее нормали в двух произвольных взаимно перпендикулярных направлениях взаимно ортогональны.*

Для доказательства достаточно взять направления осей абсцисс и ординат. Мы имеем

$$\mathbf{N}_{1x}(u_{xx},u_{xy},0), \quad \mathbf{N}_{1y}(u_{xy},u_{yy},0).$$

Отсюда видно, что равенство

$$\mathbf{N}_{1x}\mathbf{N}_{1y}=u_{xx}u_{xy}+u_{xy}u_{yy}=0$$

справедливо тогда и только тогда, когда $u_{xx}+u_{yy}=0$.

В заключение скажем несколько слов об общем решении уравнения (2). Возвращаясь к дифференциалам dx, dy в разложении (12), мы можем переписать это разложение в виде:

$$\begin{aligned} u= {} & a_0+a_1\,dx+\frac{1}{2}a_2\,dx^2+\ldots-\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{1}{2}a_3\,dx+\ldots\right)dy^2+\ldots+ \\ & +\left(b_1+b_2\,dx+\frac{1}{2}b_3\,dx^2+\ldots\right)dy-\frac{1}{3!}\left(b_3+\frac{1}{2}b_5\,dx+\ldots\right)dy^3+\ldots. \end{aligned} \tag{23}$$

Положив

$$\begin{gathered} a_0+a_1\,dx+\frac{1}{2}a_2\,dx^2+\ldots=f(x), \\ b_0+b_1\,dx+\frac{1}{2}b_2\,dx^2+\ldots=\varphi(x) \end{gathered} \tag{24}$$

(b_0 — некоторый коэффициент), мы можем записать (23) следующим образом

$$
\begin{aligned}
u &= f(x) - \frac{1}{2} f''(x)\, dy^2 + \frac{1}{4!} f^{\mathrm{IV}}(x)\, dy^4 - \ldots + \\
&+ \varphi'(x)\, dy - \frac{1}{3!} \varphi'''(x)\, dy^3 + \frac{1}{5!} \varphi^{\mathrm{V}}(x)\, dy^5 - \ldots .
\end{aligned} \tag{25}
$$

Таково общее решение уравнения Лапласа, выраженное через две произвольные функции одного аргумента. Представление (25) не выводит за пределы поля действительных чисел.

Легко понять, что функция

$$
\begin{aligned}
v &= f'(x)\, dy - \frac{1}{3!} f'''(x)\, dy^3 + \frac{1}{5!} f^{\mathrm{V}}(x)\, dy^5 - \ldots - \\
&- \varphi(x) + \frac{1}{2} \varphi''(x)\, dy^2 - \frac{1}{4!} \varphi^{\mathrm{IV}}(x)\, dy^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{26}
$$

сопряжена с функцией (25) (для этих функций выполнены условия Коши-Римана). По функции $u(x, y)$ определяется однопараметрическая совокупность функций $v(x, y)$. Параметром этой совокупности как раз и является коэффициент b_0, который входит в функцию $\varphi(x)$.

Примечание. В виде, аналогичном (25), может быть представлено решение общего уравнения Лапласа в n-мерном пространстве

$$
u_{x^1 x^1} + \ldots + u_{x^n x^n} = 0. \tag{27}
$$

В соответствии с теоремой Ковалевской общее решение этого уравнения имеет произвол, определяемый двумя функциями $n-1$-го аргумента. Это решение таково

$$
u = f - \frac{1}{2} a_2\, dx^{n^2} + \frac{1}{4!} a_4\, dx^{n^4} - \ldots + b_1\, dx^n - \frac{1}{3!} b_3\, dx^{n^3} + \ldots \tag{28}
$$

Здесь f, φ — произвольные функции от $x^1, \ldots, x^{n-1}$, а коэффициенты $a_2, a_4, \ldots, b_1, b_3, \ldots$ определяются равенствами

$$
\begin{aligned}
&a_2 = f_{x^1 x^1} + \ldots + f_{x^{n-1} x^{n-1}}, \qquad b_1 = \varphi, \\
&a_4 = a_{2x^1 x^1} + \ldots + a_{2x^{n-1} x^{n-1}}, \quad b_3 = b_{1x^1 x^1} + \ldots + b_{1x^{n-1} x^{n-1}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{29}
$$

Цитированная литература

[1] В. К. Дзядык, Геометрическое определение аналитических функций, *Успехи математических наук,* т. **15**, в. 1 (91), 1960.
[2] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, изд.-во «Наука», *Москва,* 1967—68.
[3] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного Гостехиздат, *Москва—Ленинград,* 1952.
[4] А. В. Бицадзе, Лекции по теории функций комплексного переменного, *Новосибирск,* 1967.
[5] В. И. Лаврик, В. Н. Савенков, Справочник по конформным отображениям, изд.-во «Наукова думка» *Киев*, 1970.
[6] П. Ф. Фильчаков, Приближенные методы конформных отображений, изд.-во «Наукова думка», *Киев*, 1964.
[7] Р. Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, изд.-во иностранной литературы, *Москва,* 1953.

Кованцов Николай Иванович,
Киев-101, ул. Ломоносова, 55, кв. 10.

(Поступило 28. XI. 1973.)