Synthetische Behandlung einiger Fragen der endlichen projektiven Ebenen

Von ISTVÁN REIMAN (Budapest)

Herrn Prof. András Rapcsák anlässlich seines 60. Geburtstages in Verehrung gewidmet

Eine endliche projektive Ebene, in welcher der kleine Satz von Pappos—Pascal (MP-Satz) gilt, wird als MP-Ebene bezeichnet. LÜNEBURG hat mit Hilfe algebraischer Überlegungen bewiesen, daß die endlichen MP-Ebenen desarguessch sind [2].

In den endlichen MP-Ebenen von ungerader Ordnung haben keine vollständige Vierecke kollineare Diagonalpunkte. In diesen Ebenen existieren sämtliche Symmetrien (involutorische Zentralkollineationen) und sämtliche Translationen (Zentralkollineationen, bei welcher dir Achse durch das Zentrum geht). Sind a, c, p drei verschiedene Geraden durch den Punkt M, so gibt es genau eine Gerade p', daß die Symmetrie $\sigma_{C,a}$ mit der Achse a und mit auf c liegendem Zentrum C die Gerade p auf p' abbildet. Die Gerade p' ist unabhängig von der Wahl des Punktes C auf der Geraden c. In diesem Falle gibt es auch eine Symmetrie mit der Achse p (bzw. p') und auf p' (bzw. p) liegendem Zentrum C, die die Gerade c auf a abbildet. (Synthetische Beweise dieser Tatsachen siehe z.B. in [3]).

Im Folgenden geben wir einen synthetischen Beweis dafür, daß die endliche MP-Ebene von ungerader Ordnung q eine Charakteristik hat; diese Charakteristik ist eine Primzahl und die Ordnung der Ebene ist eine Primzahlpotenz. Aus unserem Gedankengang ergibt sich leicht, daß die endliche MP-Ebene desarguessch und auch pascalsch ist, falls die Ordnung eine Primzahl ist.

Für das Weitere nehmen wir an, daß die Ordnung der Ebene wenigstens 3 ist.

1. Es seien a, b, c, d vier Geraden durch den Punkt M. Man bezeichnet das Geradenpaar c, d als *harmonisch* zum Geradenpaar a, b, wenn es eine Symmetrie mit der Achse a und mit auf b liegendem Zentrum C gibt, die die Geraden c, d aufeinander abbildet. In diesem Falle sind a und b zu c und d harmonisch. Sind drei von den Geraden a, b, c, d gegeben, so ist die vierte Gerade eindeutig bestimmt.

Schneidet die Gerade g die Geraden a, b, c, d in den Punkten A, B, C, D, so bilden diese Punkte ein *harmonisches Punktquadrupel* $(A, B; C, D)$. Aus den bekannten Eigenschaften der Symmetrie folgt, daß das Punktquadrupel $(A, B; C, D)$ harmonisch ist, wenn eine Symmetrie mit dem Zentrum A und mit der Achse durch B existiert, die den Punkt C auf D abbildet. Sind drei der Punkte A, B, C, D gegeben, so ist der vierte eindeutig bestimmt. Wenn das Punktquadrupel $(A, B; C, D)$ harmonisch ist, sind auch $(A, B; D, C)$, $(B, A; C, D)$, $(B, A; D, C)$, $(C, D; A, B)$,

$(D, C; A, B)$, $(C, D; B, A)$, $(D, C; B, A)$ harmonische Quadrupel. Aus der Definition der harmonischen Punktquadrupel folgt, daß die Projektion eines harmonischen Quadrupels auf eine Gerade ein harmonisches Quadrupel bildet.

Sei $A, B; C, D$ ein harmonisches Punktquadrupel und M ein beliebiger Punkt der endlichen MP-Ebene, der nicht auf der Gerade AB liegt. Dann sind die Geraden MC und MD zu den Geraden MA und MB harmonisch.

Die Symmetrie mit der Achse a und mit dem Zentrum C bezeichnen wir mit $\sigma_{C,a}$. Nach Voraussetzung gibt es einen Punkt O, für welchen die Geraden OC, OD. zu OA, OB harmonisch sind und $\sigma_{A,OB}(C)=D$ gilt. Es sei $CM \cap OB = N$ (Abb. 1.)

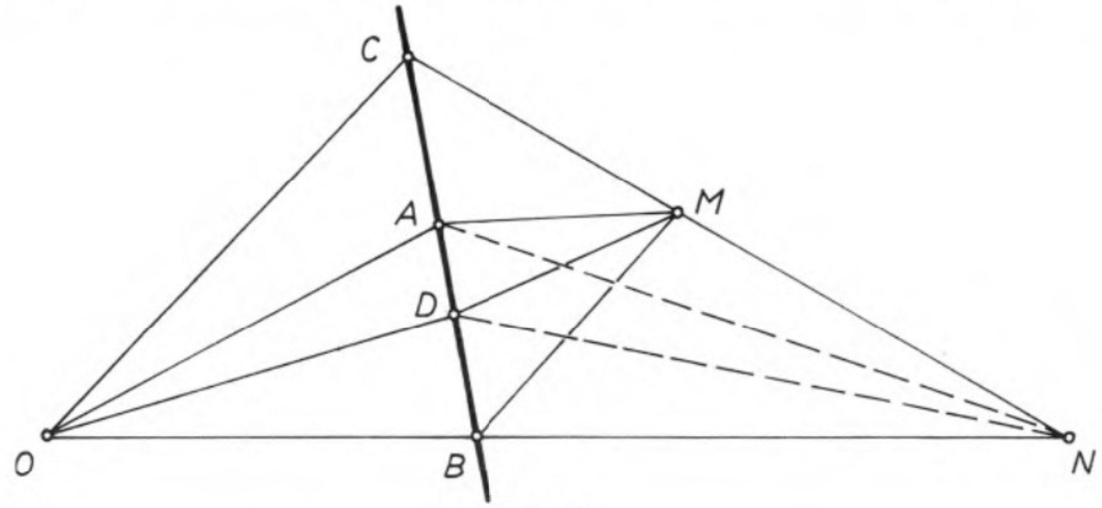

Abb. 1.

Da es $\sigma_{A,OB}(NC)=ND$ gilt sind die Geraden NA, NB zu NC, ND harmonisch und darum gilt

$$\sigma_{D,NC}(NA) = NB,$$

$$\sigma_{D,MC}(MA) = MB,$$

das heißt: die Geraden MC und MD sind zu MA und MB harmonisch.

Jetz kann man schon auf übliche Weise den folgenden Satz beweisen:

Es seien $(A, B; C, D)$ und $(A', B'; C', D')$ zwei harmonische Punktquadrupel. Die Punkte A, B, C, D können durch Zentralprojektionen in die Punkte A', B', C', D' projiziert werden. Sind in den Quadrupeln zwei entsprechende Punkte identisch, so sind die zwei Punktquadrupel perspektiv.

2. Es seien P_0, P_1, I kollineare Punkte und a eine Gerade durch I $(P_0P_1 \neq a)$. Man betrachte die Punktfolge

$$P_0, P_1, P_2 = \sigma_{P_1,a}(P_0), \ldots, P_i = \sigma_{P_{i-1},a}(P_{i-2}), \ldots, I.$$

Diese Folge ist offensichtlich durch zwei Nachbarpunkten P_{i-1}, P_i und durch I eindeutig bestimmt. Da die Anzahl der Punkte auf einer Geraden endlich ist, gibt es eine Symmetrie, z.B. $\sigma_{P_{k-1},a}$, für welche $\sigma_{P_{k-1},a}(P_{k-2})=P_0$ ist, d.h. die Folge wiederholt sich nach k Schritten.

Da die Quadrupel

$$(1) \qquad (P_{i-1}, P_{i+1}; P_i, I) \quad (i = 1, 2, \dots, k-2)$$

harmonisch sind, werden wir die Folge $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, I$ als *harmonische Skala* bezeichnen. Sind die Punktquadrupel (1) harmonisch, so bildet die Folge $P_0, P_1, \dots, \dots, P_{k-1}, I$ eine harmonische Skala.

Die Projektion einer harmonischen Skala auf eine Gerade ist wieder eine harmonische Skala und zwei harmonische Skalen können mittels Zentralprojektionen ineinander projiziert werden. Sind zwei entsprechende Punkte in zwei Skalen verschiedener Geraden identisch, so sind die zwei harmonische Skalen perspektiv.

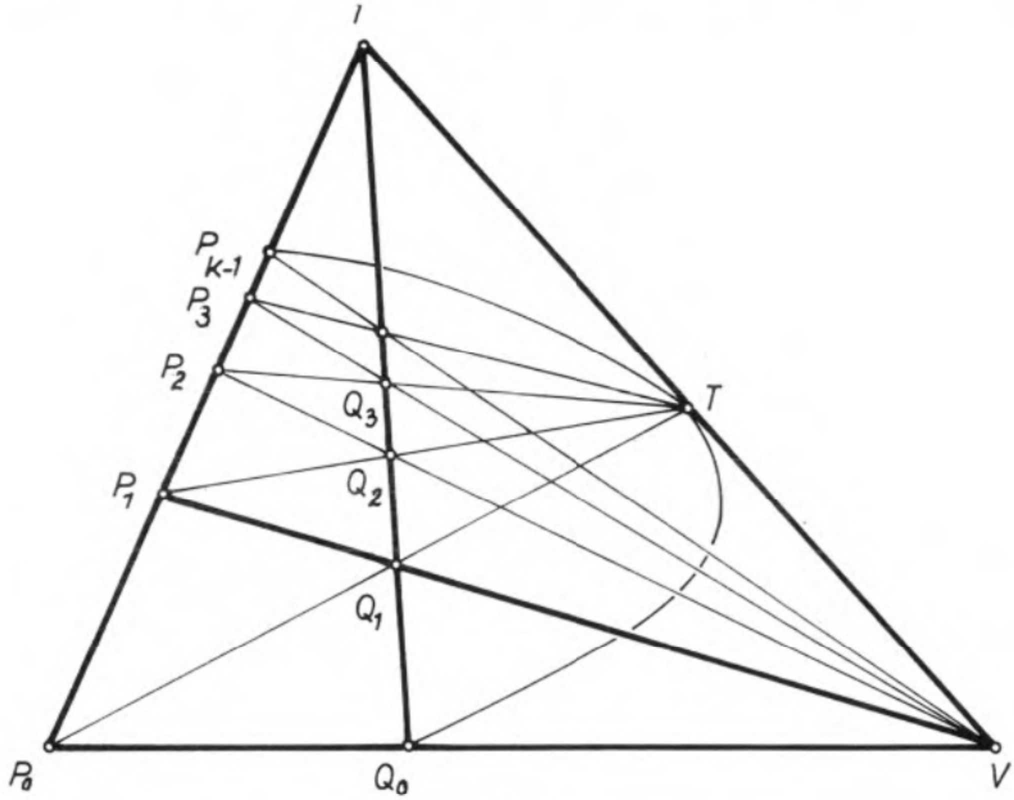

Abb. 2.

3. Betrachten wir sämtliche harmonischen Skalen der Ebene und wählen wir die kürzeste Skala $\mathcal{S}$ aus, d.h. die Skala, für welche die Schließungszahl k minimal ist.

Da zwei harmonische Skalen ineinander projiziert werden können, ist jede harmonische Skala eine Projektion der Skala $\mathcal{S}$. Folglich wiederholen sich sämtliche harmonische Skalen der Ebene nach k Schritten. Die Zahl k wird als *Charakteristik* der Ebene bezeichnet.

4. Um harmonische Skalen zu konstruieren, können wir die sogenannten charakteristische Figuren der Ebene anwenden.*)

Bezeichnen P_0, P_1, Q_0, Q_1 die Eckpunkte eines vollständigen Viereckes, so führen wir die folgenden Bezeichnungen ein (Abb. 2.):

$$P_0P_1 \cap Q_0Q_1 = I, \quad P_0Q_0 \cap P_1Q_1 = V, \quad P_0Q_1 \cap IV = T, \quad IV = a.$$

$$P_1T \cap Q_0I = Q_2, \qquad Q_2V \cap P_0I = P_2,$$

$$\dots \qquad\qquad \dots$$

$$P_iT \cap Q_0I = Q_{i+1}, \quad Q_{i+1}V \cap P_0I = P_{i+1},$$

$$\dots \qquad\qquad \dots$$

Aus der Konstruktion folgt, daß

$$\sigma_{P_i, a}(P_{i-1}) = P_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

ist. Da die Charakteristik der Ebene gleich k ist, gilt auch $P_{k-1}T \cap Q_0I = Q_k = Q_0$, d.h. die Punkte P_{k-1}, T, Q_0 sind kollinear. Die so erhaltene Figur wird die zu dem Viereck $P_0P_1Q_0Q_1$ gehörende *charakteristische Figur* (oder: *Figur* $k=0$) genannt. Aus unserer Überlegung folgt:

In der endlichen MP-Ebene von ungerader Ordnung sind bei sämtlichen Charakteristischen Figuren die Punkte P_{k-1}, T, Q_0 kollinear und sämtliche harmonische Skalen lassen sich mittels der charakteristischen Figuren konstruiert werden.

Es ist noch zu bemerken, daß die Figur $2=0$ ein vollständiges Viereck mit kollinearen Diagonalpunkten ist.

5. Die Figur $k=0$ kann auch folgendermaßen betrachtet werden: es sei τ die Translation mit der Achse a und mit dem Zentrum I, für welche $\tau(P_0)=P_1$ gilt. Nach der Konstruktion

$$\tau(P_0) = P_1,\ \tau(P_1) = P_2,\ \dots,\ \tau(P_i) = P_{i+1},\ \dots,\ \tau(P_{k-1}) = P_k = P_0,$$

oder

$$\tau(P_0) = P_1,\ \tau^2(P_0) = P_2,\ \dots,\ \tau^i(P_0) = P_i,\ \dots,\ \tau^k(P_0) = P_0.$$

Hieraus folgt der Satz:

In der endlichen MP-Ebene von ungerader Ordnung läßt sich jede harmonische Skala in der Form

$$P_0,\ \tau(P_0) = P_1,\ \dots,\ \tau^i(P_0) = P_i,\ \dots,\ \tau^k(P_0) = P_{k-1},\ I \tag{2}$$

ausdrücken: und umgekehrt: ist τ eine beliebige Translation der Ebene mit dem Zentrum I und P_0 ein beliebiger Punkt, so bildet die Punktfolge (2) *eine harmonische Skala.*

Aus dem Beweis folgt weiterhin der wichtige Satz:

Die Ordnung sämtlicher Translationen der endlichen MP-Ebene von ungerader Ordnung ist gleich der Charakteristik k.

*) Diese Figuren hat erstenmal L. Lombardo-Radice für die Definition der Charakteristik gebraucht [1], [4].

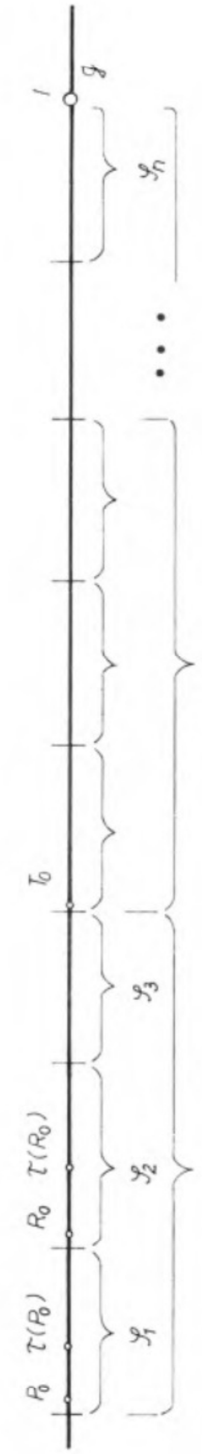

Abb. 3.

6. *Die Charakteristik der endlichen MP-Ebene von ungerader Ordnung ist eine Primzahl.*

Zum Beweis dieses Satzes nehmen wir an, daß die Charakteristik k keine Primzahl ist, d.h. $k=rs$ (r, s ganze Zahlen sind, $r>1$, $s>1$) und betrachten wir eine beliebige Translation τ bzw. einen beliebigen Punkt P_0, der nicht auf der Translations achse liegt. Für die Translation $\varepsilon=\tau^r$ wäre die Punktfolge

$$P_0, \varepsilon(P_0), \varepsilon^2(P_0), \ldots, \varepsilon^{s-1}(P_0), I$$

eine harmonische Skala, die aber schon nach s Schritten sich

$$\varepsilon^s(P_0) = \tau^{rs}(P_0) = \tau^k(P_0) = P_0$$

wiederholen würde, da gilt. Dies aber wiederspricht unserem Satz, nach welchem die Ordnung sämtlicher Translationen gleich k ist.

7. *Die Ordnung q der endlichen MP-Ebene von ungerader Ordnung ist eine Primzahlpotenz.*

Es sei τ eine beliebige Translation der Ebene der Charakteristik p mit der Achse a und mit dem Zentrum I und g eine beliebige Gerade durch I bzw. P_0 ein Punkt der Gerade g ($P_0 \neq I$). Die Punkte $P_0, \tau(P_0), \ldots, \tau^{p-1}(P_0), I$ bilden eine harmonische Skala $\mathscr{S}_1$ (Abb. 3.). Enthält diese Folge sämtliche Punkte der Gerade, so ist die Behauptung bewiesen.

Gibt es aber wenigstens noch einen Punkt R_0, der nicht zur Skala $\mathscr{S}_1$ gehört, so bilden die Punkte

$$R_0, \tau(R_0), \ldots, \tau^{p-1}(R_0), I$$

eine harmonische Skala $\mathscr{S}_2$. $\mathscr{S}_1$ und $\mathscr{S}_2$ können außer I kein gemeinsames Element haben, weil aus $\tau^i(P_0)=\tau^j(R_0)$ folgen würde, daß $\tau^{i-j}(P_0)=R_0$ gilt, was aber im Wiederspruch zu der Definition von R_0 steht.

Wenn es außer den Punkten der Skalen $\mathscr{S}_1$ und $\mathscr{S}_2$ noch einen Punkt auf der Gerade g gibt, so kann man wieder neue harmonische Skalen herstellen und auf dieser Weise werden die Punkte der Gerade g (außer I) in die Skalen $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \ldots, \mathscr{S}_n$ aus je p Elementen eingeteilt.*) Dann ist aber p ein Teiler von q, $q=np$.

Jetzt betrachten wir die Translation ε mit der Achse a, für welche $\varepsilon(P_0)=R_0$ gilt. Die Punkte

$$P_0, \varepsilon(P_0), \varepsilon^2(P_0), \ldots, \varepsilon^{p-1}(P_0)$$

gehören dann zu verschiedenen Skalen der Skalenmenge $\{\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \ldots, \mathscr{S}_n\}$.

*) Im Folgenden wird der Punkt I nicht zu den Skalen $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \ldots, \mathscr{S}_n$ hinzugezählt.

Wäre nämlich diese Behauptung nicht richtig, so gehört z.B. $\varepsilon^r(P_0)$ und $\varepsilon^s(P_0)$ $(p > r > s)$ zur selben Skala, woraus

$$\varepsilon^r(P_0) = \tau^i \varepsilon^s(P_0),$$

und auch

$$\varepsilon^{r-s}(P_0) = \tau^i(P_0)$$

folgen würde. Da die Zahlen $r-s$ und p relativ prim sind, hätte die Gleichung

$$(r-s)x = 1+py$$

eine ganzzählige Lösung in x und y, mit den Werten

$$\tau^{ix}(P_0) = \varepsilon^{(r-s)}(P_0) = \varepsilon(P_0) = R_0.$$

Dieses Ergebnis widerspricht aber der Definition von R_0. Daraus erhält man, daß die Potenzen der Translation ε die Skala $\mathscr{S}_1$ auf p verschiedenen Skalen $\mathscr{S}_{i_1}, \mathscr{S}_{i_2}, \ldots, \ldots, \mathscr{S}_{i_p}$ der Skalenmenge $\{\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \ldots, \mathscr{S}_n\}$ abbilden. Ist $p=n$, so ist unsere Behauptung bewiesen. Ist $p \neq n$, so betrachten wir einen Punkt T_0, der nicht zu den Skalen $\mathscr{S}_{i_1}, \mathscr{S}_{i_2}, \ldots, \mathscr{S}_{i_p}$ gehört. Auf ähnliche Weise beweist man, daß die Punkte

$$T_0, \varepsilon(T_0), \ldots, \varepsilon^{p-1}(T_0)$$

zu verschiedenen und nicht zur Skalenteilmenge $\{\mathscr{S}_{i_1}, \mathscr{S}_{i_2}, \ldots, \mathscr{S}_{i_p}\}$ gehörenden Skalen gehören, uzw. So erhält man daß die Skalenmenge $\{\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \ldots, \mathscr{S}_n\}$ in disjunkte Teilmengen aus je p Elementen eingeteit wird; p ist also ein Teiler von n und p^2 ein Teiler von q.

Diesen Gedankengang fortsetzend sieht man schon leicht ein, daß die Ordnung q eine Primzahlpotenz ist.

Es läßt sich noch bemerken, daß diese Überlegung auch dann gilt, wenn sämtliche Translationen der Ebene existieren und die Ordnung der Translationen (d.h. die Charakteristik) gleich 2 ist.

8. Zum Beweis des Desarguesschen Satzes wäre es offenbar genügend zu beweisen, daß in der Ebene sämtliche Zentralkollineationen mit nichtinzidenten Zentrum und Achse existieren. Ist die Ordnung der Ebene eine Primzahl, folgt dies durch die obigen Überlegungen.

Die endlichen MP-Ebenen von ungerader Primzahlordnung ist desarguessch.

Es sei a eine beliebige Gerade der Ebene und C ein beliebiger Punkt derselben, der nicht auf a liegt (Abb. 4.). Sei P_0 ein Punkt der Ebene, der nicht auf a liegt und nicht identisch mit C ist. Betrachten wir die harmonische Skala

$$P_0, P_1 = C, P_2, \ldots, P_{p-1}, I_P,$$

wo I_p der Schnittpunkt der Geraden P_0C und a ist.

Wir definieren die Abbildungen ϱ_i $(i=2, 3, \ldots, p-1)$ auf folgender Weise:

a) $\varrho_i(P_0)=P_0$, wenn $P_0=C$, oder P_0 auf a liegt;

b) $\varrho_i(P_0)=P_i$ in den übrigen Fällen.

Da die verschiedenen Punkte der Ebene durch ϱ_i auf verschiedene Punkte abgebildet werden und die Anzahl der Punkte endlich ist, ist die Abbildung ϱ_i ein-eindeutig.

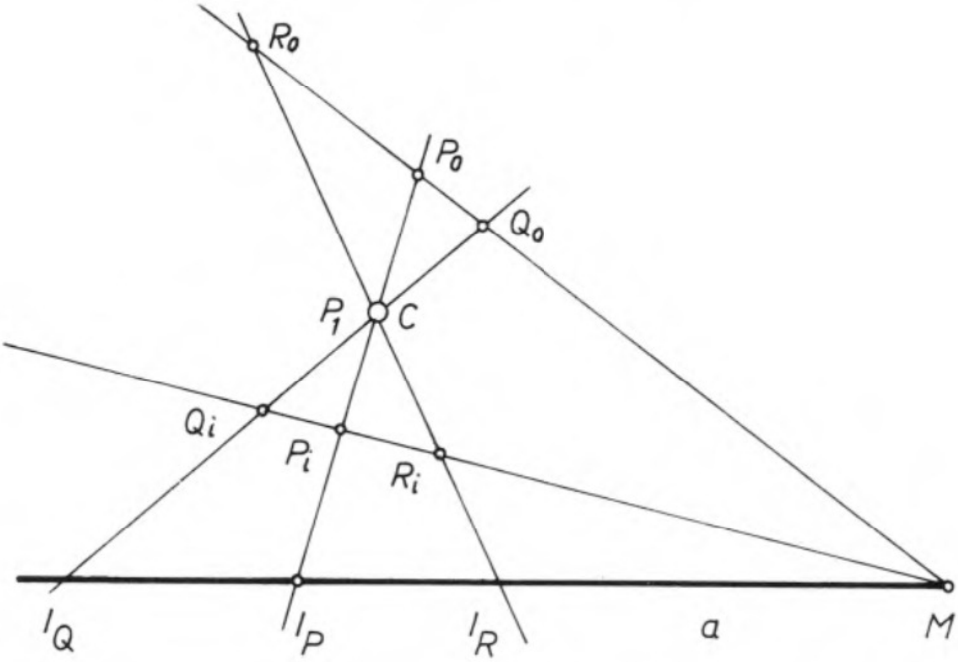

Abb. 4.

Sind die Punkte P_0, Q_0, R_0 kollinear und geht die Gerade P_0Q_0 durch C, so sind auch $\varrho_i(P_0)$, $\varrho_i(Q_0)$, $\varrho_i(R_0)$ kollinear. Sind die Punkte P_0, Q_0, R_0 kollinear, geht aber die Gerade P_0Q_0 nicht durch den Punkt C, dann sind die Projektionen der Skala $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}, I_P$ aus dem Schnittpunkt M der Geraden P_0Q_0 und a auf die Gerade Q_0C, bzw. R_0C:

$$Q_0, Q_1 = C, \ldots, Q_{p-1}, I_Q, \quad \text{bzw.} \quad R_0, R_1 = C, \ldots, R_{p-1}, I_R,$$

darum sind aber die Punkte $P_i = \varrho_i(P_0)$, $Q_i = \varrho_i(Q_0)$, $R_i = \varrho_i(R_0)$ kollinear. Dies bedeutet aber, daß die Abbildung ϱ_i eine Kollineation, d.h. Zentralkollineation ist.

Im Falle $q=p$ sind die Zentralkollineationen ϱ_i sämtliche nichtidentischen Zentralkollineationen mit der Achse a und mit dem Zentrum C, womit unser Satz bewiesen ist.

9. Es läßt sich im Falle $q=p$ ein andere synthetischer Beweis für den allgemeinen Desarguesschen Satz geben, wenn man erkennt, daß der Desarguessche Satz eine Folgerung des Pappos—Pascalschen Satzes ist. Auf übliche Weise läßt sich nämlich der Satz beweisen:

In der endlichen MP-Ebene der Ordnung p (p ist eine ungerade Primzahl) gilt der allgemeine Satz von Pappos—Pascal.

Es seien die Punkte *1, 2, 3, 4, 5, 6* die Eckpunkte eines Pappos—Pascalschen Sechseckes (Abb. 5.), die Punkte *1, 3, 5* liegen auf der Gerade a, die Punkte *2, 4, 6*, auf der Gerade b und es sei $a \cap b = I$, $12 \cap 45 = X$, $23 \cap 56 = Y$, $34 \cap 61 = Z$.

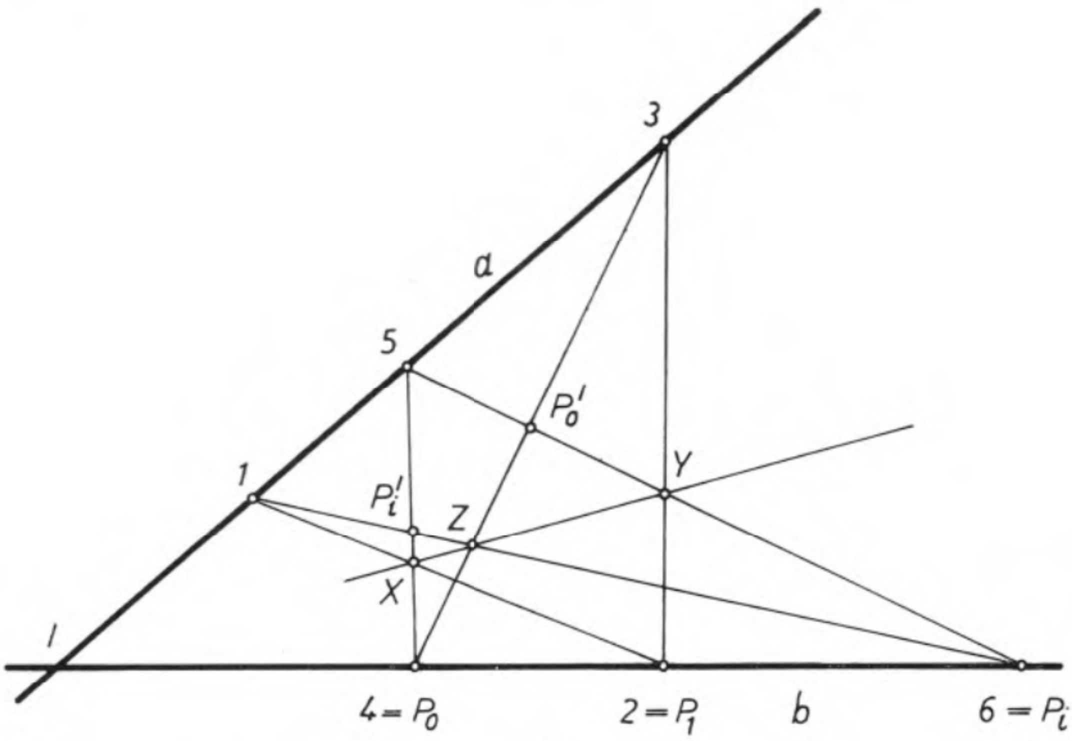

Abb. 5.

Wir betrachten die durch die Punkte $P_0=4$, $P_1=2$ und I bestimmte harmonische Skala $\mathcal{S}$. Da sämtliche Punkte der Gerade b zu dieser Skala gehören, sei nun der Punkt 6 der i-te Punkt P_i der Skala. Es sei $\mathcal{S}'$ die Projektion der Skala $\mathcal{S}$ aus dem Punkt 1 auf die Gerade 45 und $\mathcal{S}''$ die Projektion der $\mathcal{S}$ aus dem Punkte 3 auf die Gerade 56. Die Projektionen der Punkte P_0, P_1, P_i, I sind $P_0, X, P_i', 5$, bzw. $P_0', Y, P_i, 5$. Die Projektionskalen $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ haben den gemeinsamen Punkt 5, darum sind die Skalen $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ perspektiv und die Geraden 34, XY, 61 gehen durch den punkt Z, voraus unmittelbar folgt, daß die Punkte X, Y, Z kollinear sind.

Literatur

[1] L. Lombardo—Radice, Su alcuni caratteri dei piani grafici. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova,* **24** (1955), 312—345.

[2] H. Lüneburg, Über die beiden Sätze von Pappos. *Arch. Math.* **11** (1960), 339—341.

[3] I. Reiman, Sui piani micropascaliani finiti. *Rend. Accad. Naz. Lincei, ser.* 8. **44** (1968), 216—224.

[4] B. Segre, Lectures on modern geometry, *Roma,* 1959.

(Eingegangen am 17. Januar 1974.)