Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung im Finslerschen Raum

Von ENDRE SZOLCSÁNYI (Budapest)

Herrn Professor A. Rapcsák zum 60. Geburstag gewidmet

In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, daß wenn zu jedem Linienelement mindestens vier orthogonale Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung existieren, dann auch der vollständige Raum ein Riemannscher Raum ist.

§ 1. Der Finslersche Raum

Bekanntlich ist ein n-dimensionaler Finslerscher Raum F_n eine $(2n-1)$-dimensionale Linienelementmannigfaltigkeit, auf welcher eine Funktion $\mathscr{L}(x, v)$ definiert ist. Die Funktion $\mathscr{L}(x, v)$ ist in beiden Veränderlichen mindestens dreimal stetig differenzierbar und in der Veränderlichen $\mathbf{v}$ in erster Ordnung positiv homogen. Aus dieser Bedingung folgt, daß die Größen, die aus der Grundfunktion $\mathscr{L}$ mit Ableitung nach v^k entstehen, wo v^k Koordinaten von $\mathbf{v}$ sind, Tensoren sind. Die Ableitungen nach v^k vermindern die Ordnung der Homogenität um 1. Der metrische Grundtensor ist

$$g_{ij}(x, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathscr{L}^2(u, v)}{\partial v^i \partial v^j}. \tag{1.1}$$

Die Funktionen g_{ij} sind in den v in 0-ter Ordnung homogen.

Im Folgenden stellen wir die Formeln der Cartanschen Theorie des Finslerschen Raumes[1]) zusammen[2]):

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i} v^i = \mathscr{L} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} v^k = 0 \tag{1.4}$$

$$C_{ijk} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}. \tag{1.5}$$

---

[1]) E. Cartan [1].

[2]) δ^i_k ist das sog. Kroneckersche Symbol.

Aus der Formel (1.1) und (1.5) folgt, daß

$$C_{ijk}=\frac{1}{4}\frac{\partial^3\mathscr{L}^2(x,v)}{\partial v^i\,\partial v^j\,\partial v^k} \tag{1.5'}$$

ist. Aus (1.5′) folgt, daß der Tensor C_{ijk} symmetrisch, und (-1)-ter Ornung homogen ist. Aus (1.4) und (1.5) folgt daß

$$C_{ijk}v^i=C_{ijk}v^j=C_{ijk}v^k=0 \tag{1.6}$$

ist. Sei, noch,

$$A_{ijk}\overset{\text{def}}{=}\mathscr{L}C_{ijk}. \tag{1.7}$$

Wenn l den Einheitsvektor bezeichnet der im Linienelement (x,v) definiert ist und zu $\mathbf{v}$ parallel ist, dann gilt

$$l^i=\frac{v^i}{\mathscr{L}} \tag{1.8}$$

und

$$l_i=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}. \tag{1.8'}$$

Aus (1.6) und (1.7) bekommen wir die Formel

$$C_{ijk}l^i=C_{ijk}l^j=C_{ijk}l^k=0, \tag{1.9}$$

$$A_{ijk}l^i=A_{ijk}l^j=A_{ijk}l^k=0. \tag{1.9'}$$

Durch die Lösung der Eulerschen Ableitungsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{2}\mathscr{L}^2\right)-\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial v^i}\left(\frac{1}{2}\mathscr{L}^2\right)=0 \tag{1.10}$$

bekommen wir die Funktionen

$$G^i\overset{\text{def}}{=}\frac{d^2x^i}{ds^2}. \tag{1.11}$$

Dies gilt für

$$G^i=\frac{1}{4}g^{ji}\left(\frac{\partial^2\mathscr{L}^2}{\partial v^j\,\partial x^k}v^k-\frac{\partial\mathscr{L}^2}{\partial x^j}\right), \tag{1.12}$$

$$G_i\overset{\text{def}}{=}g_{ij}G^j \tag{1.13}$$

und

$$G_i=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\mathscr{L}^2}{\partial v^i\,\partial x^k}v^k-\frac{\partial\mathscr{L}^2}{\partial x^i}\right). \tag{1.14}$$

Natürlich sind G^i und G_i in 2-ter Ordnung homogen.

Wenn

$$G^i_k\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial G^i}{\partial v^k} \tag{1.15}$$

ist, dann gilt

$$G^i_k v^k = 2G^i. \tag{1.16}$$

Sei $\mathbf{y}$ ein beliebiger Vektor, der in (x, v) definiert ist. Das invariente Differential des Vektors $\mathbf{y}$ ist

$$Dy^i = dy^i + C_j{}^i{}_k y^j \, dv^k + \Gamma_j{}^i{}_k y^j \, dx^k, \tag{1.17}$$

oder

$$Dy_i = dy_i - C_i{}^j{}_k y_j \, dv^k - \Gamma_i{}^j{}_k y_j \, dx^k, \tag{1.17'}$$

wo

$$\Gamma_{ijk} = \gamma_{ijk} + C_{iks} G^s_j - C_{kjs} G^s_i \tag{1.18}$$

und

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right) \tag{1.19}$$

bezeichnet.

Es gilt[3]) für

$$v^j \Gamma_j{}^i{}_k = G^i_k. \tag{1.20}$$

Wir bekommen aus (1.8), (1.9) und (1.20)

$$Dl^i = dl^i + \frac{1}{\mathscr{L}} G^i_k \, dx^k. \tag{1.21}$$

Herr E. Cartan führte noch die Pfaffsche Form

$$\omega^i(d) = Dl^i \tag{1.22}$$

ein. Danach gilt

$$dv^k = l^k \, d\mathscr{L} + \mathscr{L} dl^k, \tag{1.23}$$

weswegen auch die Identität

$$C_j{}^i{}_k \, dv^k = A_j{}^i{}_k \, dl^k \tag{1.24}$$

besteht. Endlich bekommen wir auf Grund de Formeln (1.17) und (1.24) das Resultat

$$Dy^i = dy^i + \Gamma_j{}^i{}_k y^j \, dx^k + A_j{}^i{}_k y^j \, dl^k. \tag{1.25}$$

Aus (1.21) und (1.22) folgt

$$dl^k = \omega^k - \frac{1}{\mathscr{L}} G^k_r \, dx^r. \tag{1.26}$$

Wir führen die Größen

$$\Gamma^{*}{}_j{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} \Gamma_j{}^i{}_k - C_j{}^i{}_s G^s_k \tag{1.27}$$

---

[3]) S. [1], X. Formel.

eine, die nach (1.20) in der Form

$$\Gamma^{*i}_{j\ k} = \Gamma_{j\ k}^{\ i} - C_{j\ s}^{\ i}\Gamma_{r\ k}^{\ s} v^r \tag{1.27'}$$

aufgechrieben werden können. Die Größen $\Gamma^{*i}_{j\ k}$ sind in den unteren Indizes symmetrisch. Aus (1.27) und (1.20) folgt,

$$v^j \Gamma_{j\ k}^{\ i} = v^j \Gamma^{*i}_{j\ k} = G^i_k. \tag{1.28}$$

Man bekommt unter Verwendung dieser Formel

$$Dy^i = dy^i + \Gamma^{*i}_{j\ k} y^j\, dx^k + A_{j\ k}^{\ i} y^j \omega^k. \tag{1.29}$$

Herr E. Cartan führte noch die äussere quadratische Form

$$\omega_i^{\ j} = \Gamma^{*j}_{i\ k}\, dx^k + A_{i\ k}^{\ j} \omega^k \tag{1.30}$$

ein. In diesem Falle gilt gleichzeitig die Beziehung

$$Dy^i = dy^i + \omega_j^{\ i} y^j. \tag{1.31}$$

Der Raum F_n ist ein metrischer Raum und die obige (Cartansche) Übertragung hebt die Länge der Vektoren auf. Deshalb ist

$$Dg_{ij} = 0. \tag{1.32}$$

Im folgenden werden wir das innere Produkt der Vektoren $y=(y^1, \ldots, y^n)$ und $z=(z^1, \ldots, z^n)$ mit $\langle y, z\rangle$ bezeichnen. In diesem Falle gilt

$$\langle y, z\rangle = g_{ij} y^i z^j. \tag{1.33}$$

Z. B. ist $\langle l, l\rangle = 1$.

Wir bezeichnen mit dem Symbol $T_{(x)}(F_n)$ den Tangentialraum des Raumes F_n im Zentrum (x) des Linienelementes (x, v). Der Tangentialraum $T_{(x)}(F_n)$ ist ein affiner Raum.

Bezeichnen wir mit $(e_i, \ldots, e_n)$ die Basis von $T_{(x)}(F_n)$ und mit $(e^{1*}, \ldots, e^{n*})$ die dazugehörige duale Basis. Wir nehmen an, daß in dieser Basis die Zerlegung

$$y = y^i e_i \tag{1.34}$$

gültig ist.

Die Tensorprodukte der Vektoren e_i und e^{i*} bilden die Basis der Tensorräume, die auf $T_{(x)}(F_n)$ definiert sind. Z. B. kann man irgendeinen Tensor T vom Typus (2,1) in der Form

$$T = T_{i\ k}^{\ j} e^{i*} \otimes e_j \otimes e^{k*} \tag{1.35}$$

aufschreiben.

Im speziellen Falle sind

$$g = g_{ij} e^{i*} \otimes e^{j*} \tag{1.36}$$

und

$$A = A_{ijk} e^{i*} \otimes e^{j*} \otimes e^{k*} \tag{1.37}$$

usw.

§ 2. Hyperflächen

Wir betrachten eine Hyperfläche F_{n-1} des Raumes F_n als die Menge der eigenen Tangentiallinienelemente. Wir nehmen an, daß die Hyperfläche F_{n-1} durch die parametrische Form

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1}) \tag{2.1}$$

gegeben ist. Das Linienelement $(u, \bar{v})$ der Hyperfläche fällt mit dem Linienelement (x, v) des Raumes zusammen, wenn

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1}) \tag{2.1'}$$

und

$$v^i = x^i_\alpha v^\alpha \tag{2.2}$$

erfüllt sind[4]). Hier ist

$$x^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}. \tag{2.3}$$

Sei $T_{(u)}(F_{n-1})$ der Tangentialraum des Raumes F_{n-1} im Zentrum $(u)=(x)$ des Linienelements $(u, \bar{v})=(x, v)$. (Das Linienelement $(u, \bar{v})$ gehört zu F_{n-1}.) Die Vektoren

$$\xi_\alpha = (x^1_\alpha, \dots, x^\mu_\alpha) \tag{2.4}$$

bilden eine Basis in $T_{(u)}(F_{n-1})$. Hier[5]) sind

$$\xi_\alpha = x^i_\alpha e_i. \tag{2.5}$$

(Wir bemerken, daß $T_{(u)}(F_{n-1})$ ein Unterraum des Raumes $T_{(x)}(F_n)$ ist, wenn $(x)=(u)$ gilt.)

Es ist klar, daß

$$\bar{v} = v^\alpha \xi_\alpha \tag{2.6}$$

und

$$v = v^i e_i \tag{2.6'}$$

sind, und die Relation (2.2) ist genau dann gültig, wenn $\bar{v}=v$ besteht[6]). Aus die (2.2) folgt unmittelbar, daß

$$\frac{\partial v^i}{\partial v^\alpha} = x^i_\alpha. \tag{2.7}$$

$T_{(u)}(F_{n-1})$ ist ein Unterraum des $T_{(x)}(F_n)$, deshalb kann jede Basis des Raumes $T_{(u)}(F_{n-1})$ zu einer Bais von $T_{(x)}(F_n)$ ergänzt werden.

---

[4]) Die lateinschen Indizes laufen von 1 bis n, die griechischen von 1 bis n—1.

[5]) S., die Formel (1.34).

[6]) Der Strich bedeutet, daß der vorliegende Vektor (oder die vorliegende Vektorklasse) auf der Hyperfläche definiert wurde.

Sei **n** der Normaleinheitsvektor der Hyperfläche in (u), der im Linienelement $(u, \bar{v})$ definiert ist, d.h. es gelten die Beziehungen

$$\langle n, n \rangle = 1, \tag{2.8}$$

$$\langle n, \xi_\alpha \rangle = 0 \tag{2.9}$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, n$ bilden eine Basis von $T_{(x)}(F_n)$.

Wir benötigen noch die zur Basis $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, n$ duale Basis. Wir werden diese mit $\xi^{\alpha *}$ $(\alpha=1, \dots, n-1)$ und mit n^* bezeichnem. Die duale Basis bildet eine Basis des dualen Raumes $T^*_{(x)}(F_n)$.

Die duale Basis wird durch die Formeln

$$\langle \xi_\alpha ; \xi^{\beta *} \rangle = \delta^\beta_\alpha \tag{2.10a}$$

$$\langle \xi_\alpha ; n^* \rangle = 0 \tag{2.10b}$$

$$\langle n ; n^* \rangle = 1 \tag{2.10c}$$

bestimmet. Es gelten die Beziehungen

$$\xi^{\beta *} = x^\beta_i e^{i *} \tag{2.11}$$

und

$$n^* = n_i e^{i *}. \tag{2.12}$$

Hier ist

$$n_i = g_{ij} n^j. \tag{2.13}$$

Aus (2.10a) folgt

$$\delta^\beta_\alpha = \langle \xi_\alpha, \xi^{\beta *} \rangle = x^i_\alpha x^\beta_j \langle e_i, e^{j *} \rangle = x^i_\alpha x^\beta_j \delta^j_i,$$

d.h.

$$x^i_\alpha x^\beta_i = \delta^\beta_\alpha. \tag{2.14}$$

Ebenso bekommen wir

$$x^i_\alpha n_i = 0 \tag{2.15a}$$

$$x^\alpha_i n^i = 0 \tag{2.15b}$$

und endlich besteht die Verbindung

$$x^i_\alpha x^\alpha_j = \delta^i_j - n^i n_j. \tag{2.16}$$

(Diese Verbindung kann man z. B. so bestimmen: die Vektoren e_i bzw. $e^{i *}$ schreiben wir mit Hilfe der Basis $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, n$ bzw. $\xi^{1 *} \xi^{2 *}, \dots, \xi^{(n-1) *}, n^*$ auf, und rechnen $\langle e_j, e^{i *} \rangle$ aus.)

Wir betrachten irgendeinen Tensor T des Raumes F_n, der in dem Linienelement $(u, \bar{v})$ von der Hyperfläche F_{n-1} definiert ist. Diesen Tensor T kann man gleichzeitig mittels der Basis $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, n$ und $e_1, \dots, e_n$ aufschreiben. Sei z. B. T mit den Typ (2.1). Es gilt einerseits

$$T = T_{ij}{}^k e^{i *} \otimes e^{j *} \otimes e_k, \tag{2.17}$$

und andererseits

$$
\begin{aligned}
T = {} & T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\xi^{\alpha*}\otimes\xi^{\beta*}\otimes\xi_{\gamma}+T_{n\beta}{}^{\gamma}n^{*}\otimes\xi^{\beta*}\otimes\xi_{\gamma}+T_{\alpha n}{}^{\gamma}\xi^{\alpha*}\otimes n^{*}\otimes\xi_{\gamma}+T_{\alpha\beta}{}^{n}\xi^{\alpha*}\otimes\xi^{\beta*}\otimes n+ \\
& +T_{nn}{}^{\gamma}n^{*}\otimes n^{*}\otimes\xi_{\gamma}+T_{n\beta}{}^{n}n^{*}\otimes\xi^{\beta*}\otimes n+T_{\alpha n}{}^{n}\xi^{\alpha*}\otimes n^{*}\otimes n+ \\
& +T_{nn}{}^{n}n^{*}\otimes n^{*}\otimes n.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Definition. Als hyperflächschen Tensor

$$\operatorname{pr} T \overset{\text{def}}{=} T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\xi^{\alpha*}\otimes\xi^{\beta*}\otimes\xi_{\gamma} \tag{2.19}$$

bezeichnen wir die Projektion des Tensors T auf die Hyperfläche F_{n-1}.

Lemma.

$$T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = x_{\alpha}^{i}x_{\beta}^{j}x_{k}^{\gamma}T_{ij}{}^{k}. \tag{2.20}$$

Beweis. Seien $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ irgendein fixiertes Indextripel der Indizes α, β, γ. Wir betrachten den Tensor $\xi_{\bar{\alpha}}\otimes\xi_{\bar{\beta}}\otimes\xi^{\bar{\gamma}*}$ und bestimmen den Wert, welchen er auf T annimmt. Es gilt

$$\langle T, \xi_{\bar{\alpha}}\otimes\xi_{\bar{\beta}}\otimes\xi^{\bar{\gamma}*}\rangle = T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}} \tag{I}$$

weil das Tensorprodukt und die Operation $\langle\ ,\ \rangle$ linear sind. Andererseits ist

$$\langle T, \xi_{\bar{\alpha}}\otimes\xi_{\bar{\beta}}\otimes\xi^{\bar{\gamma}*}\rangle = x_{\bar{\alpha}}^{i}x_{\bar{\beta}}^{j}x_{k}^{\bar{\gamma}}\langle T, e_{i}\otimes e_{j}\otimes e^{k*}\rangle = x_{\bar{\alpha}}^{i}x_{\bar{\beta}}^{j}x_{k}^{\bar{\gamma}}T_{ij}{}^{k}. \tag{II}$$

Aus der Formeln (I) und (II) folgt (2.20).

Wir führen die Vargasche Konvention[7])

$$n^{i}T_{ij}{}^{k} = T_{\varkappa j}{}^{k} \tag{2.21}$$

ein. Dann ist die Relation (2.18) in der koordinatischen Form

$$
\begin{aligned}
T_{ij}{}^{k} = {} & x_{i}^{\alpha}x_{j}^{\beta}x_{\gamma}^{k}T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}+n_{i}x_{j}^{\beta}x_{\gamma}^{k}T_{\varkappa\beta}{}^{\gamma}+x_{i}^{\alpha}n_{j}x_{\gamma}^{k}T_{\alpha\varkappa}{}^{\gamma}+x_{i}^{\alpha}x_{j}^{\beta}n^{k}T_{\alpha\beta}{}^{\varkappa}+ \\
& +n_{i}n_{j}x_{\gamma}^{k}T_{\varkappa\varkappa}{}^{\gamma}+n_{i}x_{j}^{\beta}n^{k}T_{\varkappa\beta}{}^{\varkappa}+x_{i}^{\alpha}n_{j}n^{k}T_{\alpha\varkappa}{}^{\varkappa}+n_{i}n_{j}n^{k}T_{\varkappa\varkappa}{}^{\varkappa}.
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

Auf der Hyperfläche F_{n-1} kann man auf zweierleier Weise die Metrik definieren, die mit der Metrik F_n in "natürlicher" Verbindung steht.

Die eine ist die sog. *innere Metrik*, die folgendermassen entsteht. Jede Kurve der Hyperfläche ist gleichzeitig Raumkurve[8]), deswegen ist notwendig, daß das Bogenmass an der Hyperfläche und in dem einbettenden Raum zusammenfällt. Um den Grundtensor g zu bestimmen, betrachten wir die Beschränkung der Funktion

$$\mathscr{L}: F_n \to \mathscr{R}$$

auf die Hyperfläche. Wir bezeichnen diese beschränkte Funktion mit L:

$$L \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}|_{F_{n-1}}.$$

[7]) Siehe [2]. S. 198, Formel (2.10).

[8]) Wir betrachten eine Kurve als eine Menge einiger Tangentiallinienelemente.

Diese Funktion ist in dem Linienelement $(u, \bar{v})$ der Hyperfläche definiert, und sie hat genau dieselben Eigenschaften wie $\mathscr{L}$. Die Koordinaten des Tensors

$$\hat{g} = \hat{g}_{\alpha\beta}\zeta^{\alpha *} \otimes \zeta^{\beta *} \tag{2.23}$$

sind durch die Formeln

$$\hat{g}_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \tag{2.24}$$

definiert.

Aus (2.1′) und (2.2) folgt

$$L(u, \bar{v}) = \mathscr{L}(x(u), v(u, \bar{v})). \tag{2.25}$$

Nach den Formeln (2.24), (2.25), (2.1′), (2.2) und (2.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2(u, \bar{v})}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathscr{L}^2(x(u), v(u, \bar{v}))}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathscr{L}^2(x, v)}{\partial v^i \partial v^j} x^i_\alpha x^j_\beta = g_{ij} x^i_\alpha x^j_\beta. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Die andere Weise ist die sog. *Induzierte Metrik*. Diese Metrik bekommen wir folgendermassen. Wir betrachten das Linienelement $(u, \bar{v})$ der Hyperfläche F_{n-1} und wir projizieren auf die Hyperfläche den Grundtensor g des Raumes F_n. Natürlich ist der Tensor g in dem Linienelement $(x, v) = (u, \bar{v})$ definiert. Die Metrik auf der Hyperfläche die der Tensor pr g ergibt ist die sog. induzierte Metrik.

Es ist

$$\operatorname{pr} g = \tilde{g}_{\alpha\beta}\zeta^{\alpha *} \otimes \zeta^{\beta *}. \tag{2.27}$$

Nach (2.20)

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = x^i_\alpha x^j_\beta g_{ij}. \tag{2.28}$$

Aus (2.26) und (2.28) folgt, daß

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta}$$

d.h.

$$\hat{g} = \operatorname{pr} g.$$

Also fallen die innere und die induzierte Metrik einer Hyperfläche zusammen.

§ 3. Die innere und induzierte Übertragung

In diesem Paragraphen stellen wir nach O. Varga [3] kurz die wichtigsten Formeln der inneren und induzierten Übertragung zusammen. Wir können die Geometrie auf einer Hyperflächen auf zweierleie Weise definieren.

I. Das invariante Differential eines Vektors $\mathbf{y}$, der in dem Linienelement $(u, \bar{v})$ der Hyperflächen F_{n-1} definiert ist, ist durch die Formel

$$\overset{(1)}{D}y^\alpha = dy^\alpha + \Gamma_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma} y^\beta du^\gamma + C_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma} y^\beta dv^\gamma \tag{3.1}$$

definiert. Die Größen $\Gamma_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma}$ und $C_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma}$ sind hier die Übertragungsparameter. Diese Parameter definieren wir mit Hilfe der Funktion L genau so, wie die Parameter $\Gamma_{j}{}^{i}{}_{k}$ und $C_{j}{}^{i}{}_{k}$ mit Hilfe der Grundfunktion $\mathscr{L}$.

Definition. Die *innere Geometrie der Hyperflächen* ist eine Finslersche Geometrie, die wir mit Hilfe des metrischen Grundtensors $\operatorname{pr} \underset{(1)}{g}$ definieren und wo die innere Übertragung mit Hilfe des invarianten Differentials $\overset{(1)}{D}$ definiert ist.

Die Grundformeln der inneren Geometrie bekommen wir aus der Formeln (1.1)—(1.32), wenn wir — formal — die lateinschen Indizes durch griechischen Indizes, die Grundfunkton $\mathscr{L}$ durch die Grundfunktion L und endlich den invariante Differentialoperator D durch den Operator $\overset{(1)}{D}$ ersetzen.

Die folgenden Formeln sind auch gültig:

$$C_{\alpha\beta\gamma} = x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma C_{ijk} \tag{3.2}$$

$$A_{\alpha\beta\gamma} = x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma A_{ijk}. \tag{3.3}$$

Wir heben noch die folgenden Formeln heraus:

$$\overline{\omega}^\alpha(d) = \overset{(1)}{D} l^\alpha = dl^\alpha + \frac{1}{L} G^\alpha_\gamma \, du^\gamma \tag{3.4}$$

und

$$\overset{(1)}{D} y^\alpha = dy^\alpha + \Gamma^{*}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma} y^\beta du^\gamma + A_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma} y^\beta \overline{\omega}^\gamma. \tag{3.5}$$

Nehmen wir an, daß

$$x^i_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \tag{3.6}$$

ist. Dann sind die Beziehungen

$$G_\alpha = x^i_\alpha G_i + \tfrac{1}{2} g_{ik} x^i_\alpha x^k_{\mu\gamma} v^\mu v^\gamma \tag{3.7}$$

$$G^\beta = x^\beta_j G^j + \tfrac{1}{2} x^\beta_k x^k_{\mu\gamma} v^\mu v^\gamma \tag{3.8}$$

$$G^\alpha_\beta = x^\alpha_i x^j_\beta G^i_j + x^\alpha_k x^k_{\beta\gamma} v^\gamma \tag{3.9}$$

$$\gamma_{\alpha\beta\gamma} = \gamma_{ijk} x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma + C_{ijk} x^j_\beta x^k_\gamma x^i_{\alpha\mu} v^\mu + C_{ijk} x^i_\alpha x^j_\beta x^k_{\gamma\mu} v^\mu - C_{ijk} x^i_\alpha x^k_\gamma x^j_{\beta\mu} v^\mu + g_{ij} x^j_\beta x^i_{\alpha\gamma} \tag{3.10}$$

gültig. Wir führen die *Cartansche Konvention*

$$l^\alpha T_{\alpha\beta}{}^\gamma = T_{0\beta}{}^\gamma \tag{3.11}$$

ein[9]). Dann ist[10])

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = {} & \Gamma_{ijk} x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma + (C_{kjs} G^m_i - C_{iks} G^m_j) x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma n^s n_m + \\ & + A_{ijk} x^j_\beta x^k_\gamma x^i_{\alpha 0} + A_{ijk} x^i_\alpha x^j_\beta x^k_{\gamma 0} - A_{ijk} x^i_\alpha x^k_\gamma x^j_{\beta 0} + g_{ij} x^j_\beta x^i_{\alpha\gamma} \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\Gamma^*_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - C_{\alpha\beta\mu} G^\mu_\gamma \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^*_{\alpha\beta\gamma} = {} & \Gamma^*_{ijk} x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma + A_{ijk} x^j_\beta x^k_\gamma x^i_{\alpha 0} - A_{ijk} x^i_\alpha x^k_\gamma x^j_{\beta 0} + \\ & + (C_{ijs} G^m_k - C_{kjs} G^m_i - C_{iks} G^m_j) x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma n_m n^s + \\ & + A_{ijm} x^i_\alpha x^j_\beta x^s_{\gamma 0} n^m n_s + g_{ij} x^j_\beta x^i_{\alpha\gamma}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

[9]) Siehe [1] IV. No. 10.

[10]) Siehe (1.27).

II. *Die Geometrie der induzierten Übertragung* definieren wir folgendermassen:

Definition. 1° Der metrische Grundtensor der induzierten Übertragung ist pr g.

2° Den invarianten Differentialoperator der induzierten übertragung bekommen wir folgendermassen: Sei $\mathbf{y}$ ein Vektor, der in dem Linienelement $(u, \bar{v})$ der Hyperfläche definiert ist. Wir betrachten das invarianten Differential Dy dieses Vektors im Raum F_n. Nun projizieren wir den räumlichen Vektor Dy auf die Fläche F_{n-1}. Sei

$$\overset{(2)}{D}y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{pr} Dy. \tag{3.15}$$

O. Varga hat in der Arbeit [3] gezeigt, daß das Cartansche invariante Differential in diesem Falle

$$\overset{(2)}{D}y^\alpha = dy^\alpha + K_\beta{}^\alpha{}_\gamma y^\beta du^\gamma + C_\beta{}^\alpha{}_\gamma y^\beta dv^\gamma \tag{3.16}$$

ist, wo auch

$$K_\beta{}^\alpha{}_\gamma = x^i_{\beta\gamma} x^\alpha_i + C_j{}^i{}_k x^\alpha_i x^j_\beta x^k_{\mu\gamma} v^\mu + \Gamma_j{}^i{}_k x^\alpha_i x^j_\beta x^k_\gamma \tag{3.17}$$

gilt. Es gilt auch

$$\overset{(2)}{D}y_\alpha = dy_\alpha - K_\alpha{}^\beta{}_\gamma y_\beta du^\gamma - C_\alpha{}^\beta{}_\gamma y_\beta dv^\gamma. \tag{3.18}$$

Wir definieren das invariante Differential eines beliebigen Tensors in üblicher Weise. Wir bekommen die Gleichung

$$\overset{(2)}{D}g_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.19}$$

Sei der Vektor $\mathbf{y}$ in dem Linienelement $(u, \bar{v}) \in F_{n-1}$ definiert und sei $(x, v) = (u, \bar{v})$. Dann ist

$$Dy^i = (x^i_{\alpha\beta} + C_j{}^i{}_k x^j_\alpha x^k_{\mu\beta} v^\mu + \Gamma_j{}^i{}_k x^j_\alpha x^k_\beta) y^\alpha du^\beta + C_j{}^i{}_k x^j_\alpha x^k_\beta y^\alpha dv^\beta + x^i_\alpha dy^\alpha. \tag{3.20}$$

Diese Relation folgt aus (1.17) mit Hilfe der Gleichungen

$$dx^k = x^k_\beta du^\beta \tag{3.21}$$

$$dx^i_\alpha = x^i_{\alpha\beta} du^\beta \tag{3.22}$$

$$dv^k = x^k_{\mu\beta} v^\mu du^\beta + x^k_\beta dv^\beta. \tag{3.23}$$

Wir bekommen aus (1.29)

$$Dx^i_\alpha = dx^i_\alpha + \Gamma^{*i}_j{}_k x^j_\alpha dx^k + A_j{}^i{}_k x^j_\alpha \omega^k. \tag{3.24}$$

Aus den Formeln (3.20)—(3.24) folgt

$$Dy^i = (x^i_{\alpha\beta} + \Gamma^{*i}_j{}_k x^j_\alpha x^k_\beta) y^\alpha du^\beta + A_j{}^i{}_k x^j_\alpha y^\alpha \omega^k + x^i_\alpha dy^\alpha. \tag{3.25}$$

Nach der Formel (3.15) bekommt man,

$$\overset{(2)}{D}y^\alpha = x^\alpha_i Dy^i \tag{3.26}$$

und aus (3.25), (3.26)

$$\overset{(2)}{D}y^\alpha = dy^\alpha + \hat{K}^{*\alpha}_\beta{}_\gamma y^\beta du^\gamma + A_\beta{}^\alpha{}_\gamma y^\beta \bar{\omega}^\gamma, \tag{3.27}$$

wo [11])

$$\hat{K}^{*\alpha}_{\beta\ \gamma} \stackrel{\text{def}}{=} x^\alpha_i (x^i_{\beta\gamma} + \Gamma^{*i}_{j\ k} x^j_\beta x^k_\gamma) \tag{3.28}$$

$$\hat{K}^{*\alpha}_{\beta\ \gamma} = \hat{K}^{*\alpha}_{\gamma\ \beta} \tag{3.29}$$

und

$$\overline{\omega}^\gamma = x^\gamma_k \omega^k \tag{3.30'}$$

bzw.

$$\overline{\omega}^\gamma = \overset{(2)}{D} l^\gamma \tag{3.30}$$

sind. Aus (3.18) bzw. aus (3.27) folgt, daß

$$\overline{\omega}^\gamma = dl^\gamma + K_\beta{}^\gamma{}_\alpha l^\beta du^\alpha \tag{3.31}$$

und

$$\overline{\omega}^\gamma = dl^\gamma + \hat{K}^{*\gamma}_{\beta\ \alpha} l^\beta du^\alpha \tag{3.32}$$

gültig sind. O. VARGA hat in [3] noch die folgenden Größen eingeführt:

$$\overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} (x^i_{\alpha\beta} + \Gamma_j{}^i{}_k x^j_\alpha x^k_\beta + C_j{}^i{}_k x^j_\alpha x^k_{\beta\mu} v^\mu) n_i \tag{3.33}$$

und den symmetrischen Tensor

$$\overset{(2)}{\Theta} \stackrel{\text{def}}{=} \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta} \xi^{\alpha *} \otimes \xi^{\beta *} \tag{3.34}$$

wo

$$\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ijk} x^i_\alpha x^j_\beta n^k \tag{3.35}$$

ist. Es gilt die folgende Relation:

$$\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta} v^\alpha = 0. \tag{3.36}$$

Er führt noch die Normalkrümmungsform

$$O_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta} v^\alpha \tag{3.37}$$

und die Normalkrümmung

$$N \stackrel{\text{def}}{=} O_\beta v^\beta \tag{3.38}$$

ein. Diese Größen erfüllen die folgenden wichtigen Relationen

$$O_\beta = (x^i_{\alpha\beta} v^\alpha + G^i_k x^k_\beta) n_i \tag{3.39}$$

$$N = \overset{(1)}{\Theta}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \tag{3.40}$$

$$N = (x^i_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta + 2G^i) n_i. \tag{3.41}$$

[11]) Die Größen $\hat{K}^{*\alpha}_{\beta\ \gamma}$ sind nicht identisch mit $K^{*\alpha}_{\beta\ \gamma}$, die von O. VARGA in [3] bzw. [4] eingeführt wurden.

O. VARGA beweist ebenfalls in [3], daß für die Hyperfläche F_{n-1} dann und nur dann $O_\alpha=0$ ist, wenn $N=0$ gilt.

Er definiert die Größen

$$K^\sigma_\beta \overset{\text{def}}{=} K_\alpha{}^\sigma{}_\beta v^\alpha \tag{3.42}$$

$$K^\sigma \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} K^\sigma_\beta v^\beta. \tag{3.43}$$

Er findet die folgenden Beziehungen zwischen dem inneren und dem induzierten Zusammenhang[12]):

$$K^\alpha = G^\alpha \tag{3.44}$$

$$G^\alpha_\beta = K^\alpha_\beta + \frac{1}{2L} \overset{(2)}{\Theta}{}^\alpha_\beta N \tag{3.45}$$

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \frac{N}{2L}(\overset{(2)}{\Theta}{}^\sigma_\alpha C_{\sigma\beta\gamma} - \overset{(2)}{\Theta}{}^\sigma_\beta C_{\alpha\sigma\gamma}) + \frac{1}{L}(O_\beta \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\gamma} - O_\alpha \overset{(2)}{\Theta}_{\beta\gamma}). \tag{3.46}$$

Aus den vorigen folgt — nach O. VARGA — daß es für die Übereinstimmung des inneren und induzierten Zusammenhangs notwendig und hinreichend ist, das $N=0$ gilt, oder, daß der Tensor $\overset{(2)}{\Theta}$ gleich null ist. Er zeigt noch folgendes: Die Hiperflächen, für welche $N\equiv 0$ gültig ist, sind nichts anderes als die sog. Totalgeodätischenflächen. Die Hyperflächen, für welche N identisch null ist, sind durch Relation

$$A_{ijk} t^j n^k = \alpha n_i \tag{3.47}$$

gekennzeichnet, wo $\mathbf{t}$ ein beliebiger Hyperflächenvektor, und

$$\alpha = A_{ijk} n^i t^j n^k \tag{3.48}$$

ist. (Natürlich muß man bei allen Größen dasselbe Linienelement $(u, \bar{v})$ nehmen.) Endlich zeigt er, daß im Falle, wenn, die Totalgeodätischenflächen unbeschränkt existieren, der Raum F_n ein Finslerscher Raum mit Konstanter Krümmung ist. In dem Falle, wenn die Flächen für welche $\overset{(2)}{\Theta}\equiv 0$ gilt unbeschränkt existieren ist der Raum ein Riemannscher.

§ 4. Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung

Ein Hyperflächen F_{n-1} ist dann nur dann Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung, wenn man sie so parametrisieren kann, daß der Grundtensor der Flächen schon von $\bar{v}$ unabhängig ist, d.h.

$$g_{\alpha\beta}(u, \bar{v}) = g_{\alpha\beta}(u). \tag{4.1}$$

Aus der Relation (4.1) folgt

$$C_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0 \tag{4.2}$$

[12]) Zu den Formeln (3.45) und (3.46) bemerken wir, daß bei Herrn O. VARGA der Koeffizient 1/2 nicht auftritt. Dies ist aber ein unwesentlicher Fehler.

und

$$A_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0. \tag{4.3}$$

Diese Bedingungen sind auch hinreichend. (Bekannt ist das Ergebnis von Herrn DEICKE, daß die Relation $A_\alpha \overset{\text{def}}{=} A_\alpha{}^\beta{}_\beta \equiv 0$ auch eine hinreichende Bedingung ist.)

Wir bekommen neben der Beachtung der Relationen (4.2) und (4.3) auch die Beziehungen

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^*_{\alpha\beta\gamma} = \gamma_{\alpha\beta\gamma}. \tag{4.4}$$

Diese sind in Indizes α, γ symmetrisch und von $\bar{v}$ unabhängig.

Aus E. CARTAN [1], (XV) folgt, daß auch

$$G_{\alpha\beta\gamma} = \gamma_{\alpha\beta\gamma} \tag{4.4'}$$

gilt, wo

$$G_\alpha{}^\beta{}_\gamma \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 G^\beta}{\partial v^\alpha \partial v^\gamma}$$

(die sog. *Berwaldschen Übertragungsparameter* sind.) Aus (3.18) und (4.2) ergibt sich

$$\overset{(2)}{D} y^\alpha = dy^\alpha + K_\beta{}^\alpha{}_\gamma y^\beta du^\gamma. \tag{4.5}$$

Aus (3.27) und (4.3) folgt

$$\overset{(2)}{D} y^\alpha = dy^\alpha + \hat{K}^{*\alpha}_\beta{}_\gamma y^\beta du^\gamma. \tag{4.6}$$

Auf Grund der Relationen (4.5) und (4.6) sind die Beziehungen

$$K_\beta{}^\alpha{}_\gamma = \hat{K}^{*\alpha}_\beta{}_\gamma \tag{4.7}$$

$$K_{\beta\alpha\gamma} = \hat{K}^*_{\beta\alpha\gamma} \tag{4.7'}$$

gültig. Wir haben bekommen, daß die Größen $K_\beta{}^\alpha{}_\gamma$ in den unteren und $K_{\alpha\beta\gamma}$ in den äußeren Indizes symmetrisch sind. Aus (3.46) folgt

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{L}(O_\beta \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\gamma} - O_\alpha \overset{(2)}{\Theta}_{\beta\gamma}). \tag{4.8}$$

Infolge der Symmetrie $K_{\alpha\beta\gamma}$ und aus den Relationen (4.4) und (4.8) ergibt sich

$$O = K_{\alpha\beta\gamma} - K_{\gamma\beta\alpha} = \underbrace{\Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\gamma\beta\alpha}}_{=0} + \frac{1}{L}(O_\beta \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\gamma} - O_\alpha \overset{(2)}{\Theta}_{\beta\gamma}) -$$

$$-\frac{1}{L}(O_\beta \overset{(2)}{\Theta}_{\gamma\alpha} - O_\gamma \overset{(2)}{\Theta}_{\beta\alpha}) = \frac{1}{L}(O_\gamma \overset{(2)}{\Theta}_{\beta\alpha} - O_\alpha \overset{(2)}{\Theta}_{\beta\gamma}).$$

Aus dieser Relation folgt

$$O_\gamma \overset{(2)}{\Theta}_{\beta\alpha} - O_\alpha \overset{(2)}{\Theta}_{\beta\gamma} = O. \tag{4.9}$$

Unter Beachtung der Symmetrie des Tensors $\overset{(2)}{\Theta}$ bekommen wir aus (4.9), daß

(4.9′) $$O_\beta \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\gamma} - O_\alpha \overset{(2)}{\Theta}_{\beta\gamma} = 0$$

ist. Substituieren wir die Verbindung (4.9′), in (4.8), dann bekommen wir die Relation

(4.10) $$K_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}.$$

Aus dieser folgt, daß

(4.10′) $$K_\alpha{}^\beta{}_\gamma = \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$$

ist.

Auf dem Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung, fallen also sowohl die Parameter der inneren Übertragung als auch die Parameter der induzierten Übertragung mit den Riemannschen — Christoffelschen Symbolen $\gamma_{\alpha\beta\gamma}$ zusammen.

Aus (3.42) und aus der Transkription der Formel (1.20) und unter Verwendung von (4.10′) bekommen wir

(4.11) $$G^\alpha_\beta = v^\gamma \Gamma_\gamma{}^\beta{}_\alpha = v^\gamma K^\beta_{\gamma\alpha} = K^\beta_\alpha.$$

Endlich folgt aus dieser Formel auf Grund von (3.45), daß

(4.12) $$\frac{1}{2L} \overset{(2)}{\Theta}{}^\alpha_\beta N = 0$$

bzw.

(4.13) $$N \overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta} = 0$$

ist. Dazu, daß eine Hyperfläche F_{n-1} zur Riemannschen Metrik wird, ist eine notwendige Bedingung, daß die Relation (4.13) erfüllt ist. Jetzt beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 1. *Nehmen wir an, daß zu einem Linienelement (x, v) des Finslerschen Raumes F_n $(n \geqq 4)$ mindestens vier aufeinander orthogonale Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung existieren. Dann ist der Tensor A des Raumes F_n, der in den Linienelement definiert ist, gleich* 0.

Beweis. 1° Betrachten wir das Linienelement (x, v) und die aufeinander orthogonalen Hyperflächen F^0_{n-1}, F^1_{n-1}, F^2_{n-1} und F^3_{n-1}, die das Linienelement enthalten. Seien sie mit Riemannscher Maßbestimmung versehen. Natürlich ist

$$(x, v) \in \bigcap_{i=0}^{3} T_{(x)}(F^i_{n-1}).$$

Sei ξ_1 ein Einheitsvektor[13]), der zu $\mathbf{v}$ parallel ist und $\mathbf{n}$ ein Normaleinheitsvektor der Hyperebene $T_{(x)}(F^0_{n-1})$, der in (x, v) definiert ist. Wir wählen die Einheitsvektoren $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}$ so, daß sie aufeinander und auch den $\mathbf{n}$ Vektor orthogonal sind. Außerdem können wir noch voraussetzen daß die Hyperebenen $T_{(x)}(F^0_{n-1})$, $T_{(x)}(F^1_{n-1})$, $T_{(x)}(F^2_{n-1})$, $T_{(x)}(F^3_{n-1})$ in dieser Reihenfolgedurch die Basisvektoren

[13]) Die Metrik wird aus dem fixierten Linienelement (x, v) gewonnen.

$(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$; $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, n)$; $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-3}, \xi_{n-1}, n)$; $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-4}, \xi_{n-2}, \xi_{n-1}, n)$ aufgespannt werden. Die Vektoren $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, n$ bilden eine orthonormierte Basis in dem Raum $T_{(x)}(F_n)$. Betrachten wir jetzt den Tensor A des Raumes F_n, welcher im Linienelement (x, v) gegeben worden ist. Zerlegen wir den Tensor A mit Hilfe der Tensorprodukte der Vektoren $\xi^{1*}, \ldots, \xi^{(n-1)*}, n^*$. Es ist

$$\begin{aligned}(4.14)\qquad A = {} & A_{\alpha\beta\gamma}\xi^{\alpha*}\otimes\xi^{\beta*}\otimes\xi^{\gamma*} + A_{n\beta\gamma}n^*\otimes\xi^{\beta*}\otimes\xi^{\gamma*} + A_{\alpha n\gamma}\xi^{\alpha*}\otimes n^*\otimes\xi^{\gamma*} + \\ & + A_{\alpha\beta n}\xi^{\alpha*}\otimes\xi^{\beta*}\otimes n^* + A_{nn\gamma}n^*\otimes n^*\otimes\xi^{\gamma*} + A_{n\beta n}n^*\otimes\xi^{\beta*}\otimes n^* + \\ & + A_{\alpha nn}\xi^{\alpha*}\otimes n^*\otimes n^* + A_{nnn}n^*\otimes n^*\otimes n^*.\end{aligned}$$

2° Wir definieren wir die Projektionsoperatoren Π_i $(i=0, 1, 2, 3)$ folgendermaßen: wenn T ein Tensor in dem (x, v) definiert ist, dann sei $\Pi_i(T)$ die Projektion des Tensors auf F^i_{n-1}.

Weil F^i_{n-1} $(i=0, 1, 2, 3)$ Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung sind, deswegen gelten die Beziehungen

$$(4.15)\qquad \Pi_i(A) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

gleichzeitig.

3° Weil

$$(4.16)\qquad \Pi_0(A) = A_{\alpha\beta\gamma}\xi^{\alpha*}\otimes\xi^{\beta*}\otimes\xi^{\gamma*}$$

gilt, deshalb ist

$$(4.17)\qquad A_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad \textit{wenn} \quad \alpha;\beta;\gamma \leqq n-1$$

4°

$$\begin{aligned}(4.18)\qquad \Pi_1(A) = {} & A_{\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma}\xi^{\tilde\alpha*}\otimes\xi^{\tilde\beta*}\otimes\xi^{\tilde\gamma*} + A_{n\tilde\beta\tilde\gamma}n^*\otimes\xi^{\tilde\beta*}\otimes\xi^{\tilde\gamma*} + A_{\tilde\alpha n\tilde\gamma}\xi^{\tilde\alpha*}\otimes n^*\otimes\xi^{\tilde\gamma*} + \\ & + A_{\tilde\alpha\tilde\beta n}\xi^{\tilde\alpha*}\otimes\xi^{\tilde\beta*}\otimes n^* + A_{nn\tilde\gamma}n^*\otimes n^*\otimes\xi^{\tilde\gamma*} + A_{n\tilde\beta n}n^*\otimes\xi^{\tilde\beta*}\otimes n^* + \\ & + A_{\tilde\alpha nn}\xi^{\tilde\alpha*}\otimes n^*\otimes n^* + A_{nnn}n^*\otimes n^*\otimes n^*,\end{aligned}$$

wo $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma \leqq n-2$ sind. Die Tensorprodukte, die auf der rechten Seite der Zerlegung (4.18) auftreten, bilden eine Basis des entsprechenden Tensorraumes. Deshalb ist das Verschwinden aller Koeffizienten nach (4.15) notwendig.

5° Die Zerlegung der Tensoren $\Pi_2(A)$ und $\Pi_3(A)$ erfolgt ähnlich. Der Unterschied ist nur, daß die Indizes $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma$ im Falle $\Pi_2(A)$ die Werte $1, \ldots, n-3, n-1$ und im Falle $\Pi_3(A)$ die Wert $1, \ldots, n-4, n-2, n-1$ annehmen.

6° Aus (4.16), (4.17) und (4.18) folgt, daß diejenigen Koeffizienten der Zerlegung (4.14) in welchen der Index n überhaupt nicht, oder genau dreimal auftritt, verschwinden, d.h.

$$(4.19)\qquad A_{\alpha\beta\gamma} = 0$$

$$(4.20)\qquad A_{nnn} = 0.$$

Jetzt werden wir diejenige Koeffizienten untersuchen, in welchen der Index n genau einmal bzw. genau zweimal vorkommt.

7° Aus der Bedingung $\Pi_1(A)=0$ bekommen wir, daß

$$A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}n} = 0 \quad (\tilde{\alpha};\, \tilde{\beta} \leqq n-2) \tag{4.21}$$

sind. Aus $\Pi_2(A)=0$ folgt

$$A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}n} = 0 \quad (\tilde{\alpha};\, \tilde{\beta} \leqq n-3 \text{ bzw. } \tilde{\alpha};\, \tilde{\beta} = n-1). \tag{4.22}$$

Wir haben bis jetzt bekommen, daß die Koefizienten $A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}n}$ alle verschwinden, höchstens mit Ausnahme der Koefizienten $A_{(n-1)n(n-2)}$ und $A_{(n-2)n(n-1)}$. Aber wir bekommen aus der Zerlegung des Tensors $\Pi_3(A)$, daß

$$A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}n} = 0 \tag{4.23}$$

gilt, wenn $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \leqq n-4$, bzw. $n-3 < \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \leqq n-1$ sind. Aus diesem Ergebnis folgt

$$A_{(n-1)n(n-2)} = A_{(n-2)n(n-1)} = 0. \tag{4.23'}$$

Aus (4.21), (4.22), (4.23) und (4.23') ergibt sich

$$A_{\alpha\beta n} = 0. \tag{4.24}$$

Genau so kann man

$$A_{\alpha n\gamma} = 0 \tag{4.25}$$

und

$$A_{n\beta\gamma} = 0 \tag{4.26}$$

bekommen.

8° Wir betrachten jetzt diejenigen Koeffizienten, in welchen der Index n genau zweimal auftritt. Aus der Relation $\Pi_1(A)=0$ folgt

$$A_{\tilde{\alpha}nn} = 0 \quad (\tilde{\alpha} \leqq n-2). \tag{4.27}$$

Aus $\Pi_2(A)=0$ folgt

$$A_{\tilde{\alpha}nn} = 0 \quad (\tilde{\alpha} \leqq n-3,\ \tilde{\alpha} = n-1). \tag{4.28}$$

Auf Grund von (4.27) und (4.28) ergibt sich

$$A_{\alpha nn} = 0. \tag{4.29}$$

Genau so kann man

$$A_{n\alpha n} = 0, \tag{4.30}$$

$$A_{nn\alpha} = 0. \tag{4.31}$$

bekommen.

So erhalten wir aus den Relationen (4.14), (4.19), (4.20), (4.24)—(4.26), (4.29)—(4.31), daß $A=0$ ist.

Aus Satz 1 folgt unmittelbar:

Satz 2. *Wenn zu jedem Linienelement (x, v) des Finslerschen Raumes $F_n (n \geqq 4)$ mindestens vier orthogonale Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung existieren, die das Linienelement (x, v) enthalten, dann ist der Raum F_n ein Riemannscher Raum.*

Satz 3. *Wenn in jedem Punkt (x) des Finslerschen Raumes F_n mindestens ein Linienelement (x, v) existiert, so daß zu jeder $(n-1)$ — Stellung, die das Linienelement (x, v) enthält, genau eine Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung, existiert dann ist der Raum F_n ein Riemannscher Raum.*

Beweis. 1° Zuerst nehmen wir an, daß $n > 4$ ist. Sei jetzt $(x, \underset{(1)}{v})$ ein beliebiges Linienelement. Wir wissen, daß der Durchschnitt von vier mindestens 4-dimensionalen, orthogonalen Hyperebenen mindestens 2-dimensionale ist. Deshalb existieren mindestens vier orthogonale $(n-1)$-Stellungen, Linienelemente (x, v) und $(x, \underset{(1)}{v})$ enthalten. In diesem Falle ist der Tensor A, der in $(x, \underset{(1)}{v})$ definiert, ist identisch 0.

2° Sei $n=4$. Dann betrachten wir den Vektor

$$\mathbf{a} = (A^1, \ldots, A^n),$$

wo

$$A^i = g^{ij} A_j$$

und

$$A_j = A_j{}^k{}_k$$

sind. Das Verschwinden des Vektors $\mathbf{a}$ charakterisiert die Riemannschen Räume. Sei wiederum $(x, \underset{(1)}{v})$ ein beliebiges Linienelement und sei der Vektor $\mathbf{a}$ in diesem Linienelement definiert. Mindestens zwei orthogonale Hyperebenen existieren in diesem Linienelement, die auch noch das Linienelement (x, v) enthalten. Bezeichnen wir diese Hyperebenen mit P_1 und P_2. Sei $\Pi_1(\mathbf{a})$ bzw. $\Pi_2(\mathbf{a})$ die Projektion des Vektors $\mathbf{a}$ auf P_1 bzw. P_2. Nach unserer Annahme existieren Hyperflächen, F^1_{n-1} und F^2_{n-1}, mit Riemannscher Maßbestimmung, die die Hyperebene P_1 bzw. P_2 berühren. Es ergibt sich

$$\Pi_1(\mathbf{a}) = \Pi_2(\mathbf{a}) = 0,$$

weswegen auch $\mathbf{a}=0$ erfüllt ist.

3° Sei endlich $n=3$. In diesem Falle ist es notwendig das folgende zu bedenken: Der Raum ist ein Riemannscher Raum, wenn die Indikatrix (in allem Punkten) eine Kugel ist. Die Indikatrix der Hyperfläche F_{n-1} (in dem Punkt (x)) wird von der Tangentialebene der Hyperfläche aus der Indikatrix des Raumes ausgeschnitten. In unserem Falle sie sind alle Kreise. Es ist bekannt, daß wenn jeder (dieselbe Gerade enthaltende) Ebenendurchschnitt einer zentralsymmetrischen konvexen Hyperfläche, ein Kreis ist, die Hyperfläche ein Kugel ist.

Bemerkung. Auf diese Weise bekommen wir einen neuen Beweis der Verallgemeinerung des Elementargeometrischen Satzes.

Wenn eine Hyperfläche Riemannsch ist, dann ist nach (4.13) dort $N\overset{(2)}{\Theta}_{\alpha\beta} = 0$. Diese Relation kann so erfüllt werden, daß $N \equiv 0$, oder $\overset{(2)}{\Theta} \equiv 0$ (oder $N \not\equiv 0$ und $\overset{(2)}{\Theta} \not\equiv 0$) ist. Der zweite Fall hat für uns keine Bedeutung.[14]) Falls die Riemannschen Hyperflächen mit der Bedingung $N \equiv 0$, unbeschränkt existieren dann ist F_n ein Riemannscher Raum mit konstanter Krümmung.[15])

Literatur

[1] E. Cartan, Les espaces de Finsler. (Actualités Scientifiques et industrielles 79.) *Paris*, 1934.
[2] O. Varga, Zur Differentialgeometrie der Hyperfiächen in Finslerschen Räumen. *Deutsche Math.* **6**. (1941.) 192—212.
[3] O. Varga, Über den inneren und induzierten Zusammenhang für Hyperflächen in Finslerschen Räumen. *Publ. Math. (Debrecen)* **8**. (1961), 000—000.
[4] O. Varga, Hyperflächen mit Minkowskischer Maßbestimmung in Finslerschen Räumen. *Publ. Math. (Debrecen)* **11**. (1964), 301—309.

(Eingegangen am 14 Februar 1974)

[14]) Siehe unsere Anmerkung nach der Formel (3.48).
[15]) Siehe O. Varga [3].