

## Über Zentralkollineationen und Verbandspolynomfunktionen

Von DIETMAR SCHWEIGERT (Kaiserslautern)

Es ist bekannt, daß man die Zentralkollineationen eines desargueschen, projektiven Raumes als bijektive, semilineare Abbildungen in einem dazu entsprechenden Vektorraum untersuchen kann. Wir wollen hier die Zentralkollineationen unter einem anderen Aspekt betrachten, wobei wir uns auf endliche, projektive Räume, die allerdings auch nicht desarguesch sein dürfen, beschränken. Dabei gehen wir davon aus, daß jeder endliche, projektive Raum durch einen endlichen, modularen, atomistischen Verband  $V$ , in dem jedes Hyperatom mindestens drei Atome enthält, dargestellt werden kann ([8] S. 151). Im folgenden bezeichne daher  $V=(V; 0, 1, \wedge, \vee)$  einen solchen Verband, wobei wir noch zusätzlich fordern, daß  $V$  mehr als ein Hyperatom enthalte. Mit den Verbandspolynomen auf  $V$  kann man einen Typ von Verbandspolynomfunktionen ([4], [3]) auf  $V$  finden, die im folgenden als  $(a, \alpha)$ -Polynomfunktionen bezeichnet werden und zeigen, daß jede invertierbare  $(a, \alpha)$ -Polynomfunktion ([4], [5]) eine Zentralkollineation auf  $V$  ist. Umgekehrt ist jede Zentralkollineation eine invertierbare  $(a, \alpha)$ -Polynomfunktion auf  $V$ . Ferner zeigen wir, daß eine  $(a, \alpha)$ -Polynomfunktion  $p(x)$  genau dann invertierbar ist, wenn für beliebige Atome  $a, a_1, a_m$  aus  $V$  gilt: Ist  $a \equiv a_1 \vee a_m$ , dann ist  $p(a) \equiv p(a_1) \vee p(a_m)$  (vergleiche [1] S. 88).

Im folgenden gelte in  $V$  stets die Regel, daß die Operation  $\wedge$  vor der Operation  $\vee$  durchgeführt werden muß, es sei denn, daß Klammern eine andere Reihenfolge vorschreiben. Wir schreiben für zwei Elemente  $a, b \in V$  genau dann  $a \equiv b$ , wenn  $a \wedge b = a$  ist. Außerdem benützen wir öfter die Bezeichnung Punkt für Atom, Gerade für Hyperatom und Hyperebene für Antiatom ([9]). Die Axiome und Begriffe der projektiven Geometrie lassen sich dann sinngemäß übertragen. Wir verwenden folgende Definitionen und Sätze (siehe unter anderem in [8]):

Ein Verbandsautomorphismus  $\tau$  auf  $V$  heißt Zentralkollineation, wenn es ein Atom (Punkt)  $a_1 \in V$  gibt, daß für alle Hyperatome (Geraden)  $g \in V$  gilt: Ist  $a_1 \equiv g$ , dann ist  $\tau(g) = g$ .

$a_1$  nennen wir wie üblich Zentrum von  $\tau$ . Ferner gilt für jede Zentralkollineation  $\tau$  von  $V$ , daß es ein Antiatom (Hyperebene)  $\alpha \in V$  gibt, so daß  $\tau(a) = a$  für alle Atome  $a \equiv \alpha$  gilt ([8] S. 169).  $\alpha$  heißt Achse von  $\tau$ . Außerdem gilt natürliche der folgende Satz:

Jede Zentralkollineation  $\tau$  auf  $V$  ist eindeutig bestimmt durch ihr Zentrum  $a_1$ , ihre Achse  $\alpha$  und durch einen beliebigen Punkt  $a_t$  und dessen Bildpunkt  $a_{t+1} = \tau(a_t)$ , wobei  $a_t \neq a_1$  und  $a_t \not\equiv \alpha$  ist ([8] S. 175).

Konstruktion einer  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion mit dem Paar  $(a_t, a_{t+1})$ : Sei  $a_1$  ein Atom von  $V$ ,  $\alpha$  ein Antiatom von  $V$  und  $a_t, a_{t+1}$  zwei verschiedene Atome von  $V$ , so daß gilt  $a_1 \vee a_t = a_1 \vee a_{t+1}$ ,  $a_t \not\equiv \alpha$ ,  $a_{t+1} \not\equiv \alpha$  und  $a_t \neq a_1 \neq a_{t+1}$ . Bei entsprechender Numerierung lassen sich die Atome von  $V$  auf folgende Weise einteilen:

$$\begin{array}{lll} a_1 & & \\ a_2, \dots, a_{r-1} & a_i \equiv \alpha & i = 2, \dots, r-1 \\ a_r, \dots, a_{t-1} & a_i \not\equiv \alpha \quad \text{und} \quad a_i \not\equiv a_1 \vee a_t & i = r, \dots, t-1 \\ a_t, \dots, a_n & a_i \not\equiv \alpha & i = t, \dots, n. \end{array}$$

Da jedes Hyperatom mindestens drei verschiedene Atome enthält, kann man zeigen, daß stets  $r < t$  gilt. Man definiert nun:

$$\begin{array}{ll} p_j(x) = x \wedge a_j & \text{für } j = 1, \dots, r-1 \\ p_j(x) = (x \wedge a_j \vee a_1) \wedge [(x \wedge a_j \vee a_t) \wedge \alpha \vee a_{t+1}] & \text{für } j = r, \dots, t-1 \\ p_j(x) = (x \wedge a_j \vee a_1) \wedge [(x \wedge a_j \vee a_r) \wedge \alpha \vee p_r(a_r)] & \text{für } j = t, \dots, n. \end{array}$$

*Definition 1.* Die Polynomfunktion  $p(x) = \bigvee_{j \in J} p_j(x)$  heißt eine  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion mit dem Paar  $(a_t, a_{t+1})$ .

*Bemerkung.* Aus der Konstruktion von  $p(x)$  geht hervor, daß die Polynomfunktion  $p(x)$  durch  $a_1$ ,  $\alpha$  und  $(a_t, a_{t+1})$  eindeutig bestimmt ist.

**Hilfsatz 1.** Sei  $p(x)$  eine  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion mit dem Paar  $(a_t, a_{t+1})$ . Dann gilt:  $p_j(a_i) = 0$  für  $j \neq i$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

**BEWEIS.** Sei  $j \neq i$ . Für  $j = 1, \dots, t-1$  berechnet man leicht, daß  $p_j(a_i) = 0$  ist. Für  $j = t, \dots, n$  erhält man  $p_j(a_i) = a_1 \wedge p_r(a_r)$ . Angenommen  $p_j(a_i) \neq 0$ , dann folgt  $a_1 \equiv p_r(a_r) = (a_r \vee a_1) \wedge [(a_r \vee a_t) \wedge \alpha \vee a_{t+1}]$ . Es genügt die Beziehung (\*):  $a_1 \equiv (a_r \vee a_t) \wedge \alpha \vee a_{t+1}$  zu betrachten. Mit der Dimensionsfunktion  $h(x)$  ([9] S. 32) ermittelt man, daß  $(a_r \vee a_t) \wedge \alpha$  ein Atom ist. Nun wendet man das Steinitz—MacLanesche Austauschaxiom ([2] S. 81) an. Es gilt:  $a_1 \vee a_{t+1} = (a_r \vee a_t) \wedge \alpha \vee a_{t+1}$ . Wegen  $a_1 \vee a_t = a_1 \vee a_{t+1}$  erhält man:  $a_1 \vee a_t \equiv (a_r \vee a_t) \wedge \alpha$  und daraus folgt unmittelbar:  $a_1 \vee a_t \equiv (a_r \vee a_t) \wedge \alpha \vee a_t$ . Nach Anwendung des modularen Gesetzes ergibt dies  $a_1 \vee a_t \equiv a_r$ , was im Widerspruch zur Konstruktion von  $p(x)$  steht.

**Folgerung 1.** Sei  $p(x)$  eine  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion mit dem Paar  $(a_t, a_{t+1})$ . Ist  $b \in V$  und sind  $a_i, i \in S$ , alle in  $b$  enthaltenen Atome, dann gilt:

$$p(b) = p\left(\bigvee_{i \in S} a_i\right) = \bigvee_{i \in S} p_i(a_i) = \bigvee_{i \in S} p(a_i).$$

**Folgerung 2.** Sei  $p(x)$  eine  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion mit dem Paar  $(a_t, a_{t+1})$ . Dann bildet  $p(x)$  das Element  $a_t$  auf das Element  $a_{t+1}ab$ .

Dies beweist man mit Hilfsatz 1 und mit derselben Überlegung wie der im Beweis von Hilfsatz 1 beim Auftreten der Beziehung (\*).

*Definition 2.* Ist  $p(x)$  eine  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion mit dem Paar  $(a_t, a_{t+1})$ , dann heißt  $p(x)$  ein  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion, die  $a_t$  in  $a_{t+1}$  abbildet.

**Hilfsatz 2.** Sei  $p(x)$  eine  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion, die  $a_t$  in  $a_{t+1}$  abbildet. Dann gilt für jedes Atom  $a_j \in V$ :  $a_1 \vee a_j = a_1 \vee p(a_j)$ .

**BEWEIS.** Nach Hilfsatz 1 genügt es zu zeigen, daß  $a_1 \vee a_j = a_1 \vee p_j(a_j)$  ist. Für  $j=1, \dots, r-1$  ist dies trivial. Sei  $j=r, \dots, t-1$ . Man berechnet  $a_1 \vee p_j(a_j) = a_1 \vee a_j$ , indem man das modulare Gesetz und die Beziehung  $a_1 \vee a_t = a_1 \vee a_{t+1}$  anwendet. Ist  $j=t, \dots, n$ , benützt man zusätzlich die bereits gewonnene Beziehung  $a_1 \vee p_r(a_r) = a_1 \vee a_r$ .

**Satz 1.** Sei  $p(x)$  eine  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion, die  $a_t$  in  $a_{t+1}$  abbildet. Ist  $p(x)$  invertierbar, dann ist  $p(x)$  eine Zentralkollineation auf  $V$ .

**BEWEIS.** Sei  $g$  ein Hyperatom von  $V$  mit  $a_1 \cong g$ . Da  $V$  atomistisch ist, gibt es  $a_x, a_y \in V$  mit  $a_1 \cong g = a_x \vee a_y$ . Nach dem Steinitz—MacLaneschen Austauschaxiom ist  $a_1 \vee a_y = a_x \vee a_y = g$ . Es ist  $p(a_1 \vee a_y) = p(g)$ . Da  $p(x)$  invertierbar ist, ist  $p(x)$  nach [5] S. 241 ein Verbandsautomorphismus. Also:  $p(a_1 \vee a_y) = p(a_1) \vee p(a_y) = a_1 \vee p(a_y)$ . Nach Hilfsatz 2 gilt:  $a_1 \vee p(a_y) = a_1 \vee a_y = g$ . Also ist  $p(g) = g$  und  $p(x)$  ist eine Zentralkollineation.

**Hilfsatz 3.** Sei  $p(x)$  eine  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion von  $V$ , die  $a_t$  in  $a_{t+1}$  abbildet. Bezeichne  $M_1 = \{a_1, \dots, a_{r-1}\}$ ,  $M_2 = \{a_r, \dots, a_{t-1}\}$  und  $M_3 = \{a_t, \dots, a_n\}$ . Dann gilt: Aus  $a_i \in M_k$  folgt  $p(a_i) \in M_k$  für  $k=1, 2, 3$ .

**BEWEIS.** Für  $k=1$  gilt die Behauptung trivial. Sei  $k=2$ . Dann zeigt man zunächst mit der Dimensionsfunktion  $h(x)$ , daß  $p(a_i)$  ein Atom ist. Dann bleibt zu zeigen:  $p(a_i) \not\cong \alpha$  und  $p(a_i) \not\cong a_1 \vee a_t$ . Man berechnet mit Hilfe des modularen Gesetzes, daß  $p(a_i) \wedge \alpha = a_i \wedge \alpha = 0$  ist. Man nehme an, daß  $a_1 \vee a_t \cong p(a_i)$  ist. Dann gilt natürlich  $a_1 \vee a_t \cong p(a_i) \vee a_1 = a_i \vee a_1$  nach Hilfsatz 2. Also hat man  $a_i \cong a_1 \vee a_t$ , was im Widerspruch zur Voraussetzung  $a_i \in M_2$  steht. Sei nun  $k=3$ , dann zeigt man wiederum mit Hilfe von  $h(x)$ , daß  $p(a_i)$  ein Atom ist. Wiederum findet man mit Hilfe des modularen Gesetzes:  $p(a_i) \wedge \alpha = a_i \wedge \alpha = 0$ .

**Satz 2.** Sei  $\tau$  eine Zentralkollineation auf  $V$  mit dem Zentrum  $a_1$ , der Hyperebene  $\alpha$  und gelte für  $a_t, a_{t+1} \in V$  mit  $a_t \not\cong \alpha$  und  $a_t \neq a_1$ , daß  $\tau(a_t) = a_{t+1}$  ist. Die  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion  $p(x)$ , die  $a_t$  in  $a_{t+1}$  abbildet, ist dann invertierbar.

**BEWEIS.** Wir zeigen zunächst, daß  $p(a_i) = \tau(a_i)$  für alle Atome  $a_i \in V$  ist. Aus  $a_i \cong a_1 \vee a_i$ , folgt  $\tau(a_i) \cong \tau(a_1 \vee a_i)$ . Da  $a_1 \cong a_1 \vee a_i$  und  $\tau$  eine Zentralkollineation ist, folgt:  $\tau(a_i) \cong a_1 \vee a_i$ .  $\tau(a_i)$  ist ein Atom und nach dem Steinitz—MacLaneschen Austauschaxiom gilt: \*\*)  $a_1 \vee \tau(a_i) = a_1 \vee a_i$  Fallunterscheidung:

- 1)  $i=1, \dots, r-1$ . Nach [8] S. 171 gilt dann  $\tau(a_i) = a_i = p(a_i)$
- 2)  $i=r, \dots, t-1$ . Wegen Folgerung 1:  $p(a_i) = p_i(a_i)$

$$p_i(a_i) = (a_i \vee a_1) \wedge [(a_i \vee a_t) \wedge \alpha \vee a_{t+1}].$$

Nun ist  $\tau((a_i \vee a_t) \wedge \alpha) = (\tau(a_i) \vee a_{t+1}) \wedge \alpha$ . Andererseits:  $(a_i \vee a_t) \wedge \alpha \cong \alpha$ . Also ist nach [8] S. 171  $\tau((a_i \vee a_t) \wedge \alpha) = (a_i \vee a_t) \wedge \alpha = (\tau(a_i) \vee a_{t+1}) \wedge \alpha$ . Wir haben demnach:  $p(a_i) = (\tau(a_i) \vee a_1) \wedge [(\tau(a_i) \vee a_{t+1}) \wedge \alpha \vee a_{t+1}] = (\tau(a_i) \vee a_1) \wedge (\tau(a_i) \vee a_{t+1})$  wegen \*\*) und nach Anwendung des modularen Gesetzes. Man sieht sofort, daß  $p(a_i) \cong \tau(a_i)$  ist. Da nun  $h(p(a_i)) = 1$  nach Hilfsatz 3, folgt  $p(a_i) = \tau(a_i)$

3)  $i=t, \dots, n$

$$p(a_i) = p_i(a_i) = (a_i \vee a_1) \wedge [(a_i \vee a_r) \wedge \alpha \vee p_r(a_r)] = (\tau(a_i) \vee a_1) \wedge [(a_i \vee a_r) \wedge \alpha \vee \tau(a_r)]$$

wegen \*\*) und weil nach dem Fall 2)  $p_r(a_r) = \tau(a_r)$  gilt. Nach [8] S. 171 ist  $\tau((a_i \vee a_r) \wedge \alpha) = (a_i \vee a_r) \wedge \alpha$ . Also:  $(\tau(a_i) \vee \tau(a_r)) \wedge \alpha = (a_i \vee a_r) \wedge \alpha$ . Wir haben demnach:

$$p(a_i) = (\tau(a_i) \vee a_1) \wedge [(\tau(a_i) \vee \tau(a_r)) \wedge \alpha \vee \tau(a_r)] = (\tau(a_i) \vee a_1) \wedge (\tau(a_i) \vee \tau(a_r))$$

nach Anwendung des modularen Gesetzes.

Also gilt  $p(a_i) \cong \tau(a_i)$  und wie oben folgt  $p(a_i) = \tau(a_i)$ . Nun wollen wir noch zeigen, daß für  $b \in V \setminus \{0\}$  gilt:  $p(b) = \tau(b)$ .  $p(b) = p(\bigvee_{i \in S} a_i)$ . Dabei mögen in  $\{a_i | i \in S\}$  alle in  $b$  enthaltenen Atome auftreten. Nach der Folgerung 1 gilt dann:  $p(b) = p(\bigvee_{i \in S} a_i) = \bigvee_{i \in S} p(a_i) = \bigvee_{i \in S} \tau(a_i) = \tau(b)$ . Damit ist alles gezeigt.

**Hilfsatz 4.** Sei  $p(x)$  eine  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion auf  $V$ , die  $a_t$  in  $a_{t+1}$  abbildet.  $p(x)$  ist auf den Atomen bijektiv.

**BEWEIS.** Man betrachte zu  $p(x)$  die  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion  $q(x)$  auf  $V$ , die  $a_{t+1}$  in  $a_t$  abbildet. Die Konstruktion von  $q(x)$  sei analog zu der von  $p(x)$  mit dem Unterschied, daß man für  $a_r$  das Atom  $p_r(a_r)$  wählt und  $a_t$  mit  $a_{t+1}$  vertauscht. Man kann mit Hilfe des modularen Gesetzes  $q(p(a_i)) = a_i$  für alle Atome  $a_i \in V$  zeigen. Desgleichen  $p(q(a_i)) = a_i$ .

**Hilfsatz 5.** Sei  $p(x)$  eine  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktion auf  $V$ , die  $a_t$  in  $a_{t+1}$  abbildet. Dann folgt aus der Bedingung:

(\*) Ist  $a \cong a_1 \vee a_m$ , dann ist  $p(a) \cong p(a_1) \vee p(a_m)$  für beliebige Atome  $a, a_1, a_m \in V$  die allgemeinere Bedingung:

(\*\*) Ist  $a \cong \bigvee_{j \in S} a_j$ , dann ist  $p(a) \cong \bigvee_{j \in S} p(a_j)$  für beliebige Atome  $a, a_j \in V$ .

**BEWEIS.** Für  $|S|=2$  gilt die Behauptung. Setzen wir voraus, daß die Bedingung (\*\*) für alle  $S$  mit  $|S| < n$  gelte. Sei dann  $a \in b$  und  $b = \bigvee_{j \in S} a_j$  mit  $|S|=n$  und  $n > 2$ .

$b = \bigvee_{j \in S \setminus \{k\}} a_j \vee a_k$  für ein  $k \in S$ . Setze  $\bigvee_{j \in S \setminus \{k\}} a_j = b_1$  und betrachte  $(a \vee a_k) \wedge b_1 \vee a_k = (a \vee a_k) \wedge (b_1 \vee a_k) \cong a$ . Fallunterscheidung:

1)  $(a \vee a_k) \wedge b_1 = a \vee a_k$

2)  $(a \vee a_k) \wedge b_1 = \bar{a}$  ein Atom von  $V$ .

Der Fall 3)  $(a \vee a_k) \wedge b_1 = 0$  tritt nicht auf.

Aus 1) ergibt sich:  $a \cong (a \vee a_k) \wedge b_1$ , also  $a \cong b_1$ . Nach Induktionsvoraussetzung  $p(a) \cong \bigvee_{j \in S \setminus \{k\}} p(a_j)$ . Also ist:  $p(a) \cong \bigvee_{j \in S} p(a_j)$ .

Aus 2) ergibt sich:  $p(a) \cong p(\bar{a}) \vee p(a_k)$  wegen (\*). Nun ist  $\bar{a} \cong b_1$  und daher gilt nach Induktionsvoraussetzung  $p(\bar{a}) \cong \bigvee_{j \in S \setminus \{k\}} p(a_j)$ . Insgesamt also  $p(a) \cong \bigvee_{j \in S} p(a_j)$ .

**Satz 3.** Sei  $p(x)$  eine  $(a_1, \alpha)$ -Polynomfunktionen auf  $V$ , die  $a_t$  in  $a_{t+1}$  abbildet. Seien  $a, a_1, a_m$  Atome von  $V$ . Die Bedingung (\*): Ist  $a \cong a_1 \vee a_m$ , dann gilt  $p(a) \cong p(a_1) \vee p(a_m)$  ist notwendig und hinreichend dafür, daß  $p(x)$  invertierbar ist.

BEWEIS. Wir zeigen, daß  $p(x)$  surjektiv ist. Sei  $b \in V$ . Nach Hilfsatz 4 ist  $p(x)$  bijektiv auf der Menge der Atome von  $V$ . Also gilt für  $b \neq 0$ :  $b = \bigvee_{j \in S} p(a_j) \cong p(\bigvee_{j \in S} a_j)$ . Setze  $d = \bigvee_{j \in S} a_j$  und sei  $d = \bigvee_{j \in S} a_j$  eine Darstellung von  $d$ , wobei in  $\{a_i | i \in \bar{S}\}$  jedes in  $d$  enthaltene Atom vorkommt. Es gilt natürlich  $S \subseteq \bar{S}$  und weiter:  $p(d) = \bigvee_{j \in S} p(a_j)$  nach Folgerung 1  $\bigvee_{j \in S} p(a_j) = \bigvee_{j \in S} p(a_j) \vee \bigvee_{j \in S \setminus S} p(a_j)$ . Sei nun  $k \in \bar{S} \setminus S$ , dann gilt  $a_k \cong \bigvee_{j \in S} a_j = d$ . Nach Hilfsatz 5 folgt daraus:  $p(a_k) \cong \bigvee_{j \in S} p(a_j)$ . Also hat man  $p(d) = p(b)$  und  $p(x)$  ist surjektiv auf  $V$ . Alles andere folgt aus der Endlichkeit von  $V$  und [5] S. 241.

### Literaturverzeichnis

- [1] E. ARTIN, *Geometric Algebra New York*, 1957.
- [2] G. BIRKHOFF, *Lattice theory 3<sup>rd</sup> edition Providence*, 1967.
- [3] G. GRÄTZER, *Lattice theory San Francisco*, 1971.
- [4] H. LAUSCH and W. NÖBAUER, *Algebra of Polynomials North Holland (in Druck)*.
- [5] H. MITSCH, Über Polynome und Polynomfunktionen auf Verbänden *Monatsh. Math.* **74**, (1970), 239—243.
- [6] W. NÖBAUER, Über die Operation des Einsetzens in Polynomringen *Math. Ann.* **134** (1958) 248—256.
- [7] D. SCHWEIGERT, Über endliche, ordnungspolynomvollständige Verbände *Monatsh. Math.* erscheint.
- [8] O. TAMASCHKE, *Projektive Geometrie Mannheim*, 1969.
- [10] G. SZÁSZ, *Einführung in die Verbandstheorie Budapest*, 1962.

ANSCHRIFT DES VERFASSERS: MATHEMATISCHES INSTITUT D. UNIVERSITÄT  
PFAFFENBERGSTRASSE 95  
D 675 KAISERSLAUTERN

(Eingegangen am 24. Okt. 1973.)