Über eine Klasse von linear kompakten Ringen

Von DINH VAN HUYNH in Hanoi (z. Z. in Halle)

Unter einem Ring verstehen wir in dieser Arbeit einen assoziativen (nicht notwendig kommutativen) Ring, unter dem Radikal das JACOBSONsche. Was die Terminologie betrifft, halten wir uns stets an diejenige der Arbeiten [2], [3] von H. LEPTIN. Jedoch wollen wir die wichtigsten Bezeichnungen aufführen. $\sum^{\oplus}$ bezeichnet die modultheoretische komplette direkte Summe; $\boxplus$ stellt die ringtheoretische direkte Zerlegung dar, $\sum^{\boxplus}$ bezeichnet die ringtheoretische komplette direkte Summe. Als Topologie in einer kompletten direkten Summe von topologischen Ringen (topologischen R-Linksmoduln) wählen wir stets wie in [2], [3] die Tychonoffsche. Einen *im engeren Sinne linear kompakten* Ring bezeichnen wir der Kürze halber als einen i. e. S. l. k. Ring (siehe [2], [3]).

Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn Prof. A. KERTÉSZ gilt der folgende Satz

R sei ein artinscher Ring (d. h. R genüge der Minimalbedingung für Linksideale). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) *Ist $x \in R$ mit $x^2=0$, so ist x mit jedem Idempotent in R vertauschbar;*

(ii) *R ist die ringtheoretische direkte Summe endlich vieler vollständig primärer artinscher Ringe und eines artinschen Radikalringes.*

Das Ziel dieser kurzen Arbeit ist es, den entsprechenden Satz für i. e. S. l. k. Ringe zu beweisen.

Satz. *R sei ein i. e. S. l. k. Ring. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Ist $x \in R$ mit $x^2=0$, so ist x mit jedem Idempotent in R vertauschbar;*

(ii) *R ist die ringtheoretische komplette direkte Summe vollständig primärer i. e. S. l. k. Ringe und eines i. e. S. l. k. Radikalringes.*

BEWEIS. Ein Ring R heißt *vollständig primär*, wenn R ein Einselement besitzt und der Faktorring von R nach seinem Radikal ein Schiefkörper ist.

(i)$\Rightarrow$(ii): Ist e Idempotent in R, so gilt $(er-ere)^2=0$ für jedes $r \in R$. Wegen (i) gilt

$$e(er-ere) = er-ere = (er-ere)e = ere-ere = 0.$$

Es ist also $er=ere$. Analog gilt auch $re=ere$. Folglich ist $er=re$, e liegt also im Zentrum von R. (Bezüglich dieses Beweisgedankens vgl. [1], S. 201.)

Es sei $J(R)=J$ das Radikal von R. Ist $R=J$, so gilt schon (ii). Es sei nun $R \neq J$. J ist abgeschlossen in R und transfinit r-nilpotent (vgl. [2], Satz 8 u. 9). Nach [2] (Satz 13) besitzt der Faktorring R/J ein Einselement $\bar{e}$. Nach [3] (4.1) hat R ein Idempotent e mit $e \in \bar{e}$.

Es sei $Re \overset{\text{def}}{=} \{re \mid \forall r \in R\}$ und $R(1-e) \overset{\text{def}}{=} \{r-re \mid \forall r \in R\}$. Da $re=er$ für jedes $r \in R$ gilt, sind Re und $R(1-e)$ Ideale von R. Es gilt einerseits $exe=x$ für jedes $x \in Re = eRe$. Andererseits ist die Multiplikation mit e von links und rechts in R eine stetige Abbildung. Daher ist eRe abgeschlossen in R. Die Abgeschlossenheit von $R(1-e)$ beweisen wir wie bei R. Wiegandt [5]. Ist $xe=0$ $(x \in R)$, so gilt $x=x-xe$, x gehört also zu $R(1-e)$. Gehört x nicht zu $R(1-e)$, so ist $xe \neq 0$. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation gibt es eine Umgebung U von x so, daß Ue das Nullelement nicht enthält. Daher gilt $U \cap R(1-e)=\emptyset$. Die Menge $R \setminus R(1-e)$ ist also offen. Damit ist $R(1-e)$ abgeschlossen.

Es gilt $eRe \cap R(1-e)=(0)$. Andererseits gilt $r=re+(r-re)$ für jedes $r \in R$. Folglich ist die Zerlegung

$$R = eRe \boxplus R(1-e) \tag{1}$$

gültig. Diese direkte Zerlegung ist sogar topologisch. Es gilt offenbar $R(1-e) \subseteqq J$. Nach [2] (Satz 5) sind die beiden direkten Summanden von R in (1) selbst i. e. S. l. k. Ringe.

Mit R_1 bezeichnen wir den Ring eRe. R_1 ist also ein i. e. S. l. k. Ring mit dem Einselement e. J_1 sei das Radikal von R_1. Es gilt $J_1=eJe$. Nach [2] gilt

$$\bar{R}_1 \overset{\text{def}}{=} R_1/J_1 = \sum_{\nu \in \Gamma}^{\oplus} \bar{R}_1 \bar{e}_\nu .$$

Dabei ist $\langle \bar{e}_\nu \rangle_{\nu \in \Gamma}$ ein vollständiges System von orthogonalen Idempotenten in $\bar{R}_1$, und $\bar{R}_1 \bar{e}_\nu$ sind minimale Linksideale von $\bar{R}_1$. Nach [3] (4.4) besitzt $\langle \bar{e}_\nu \rangle_{\nu \in \Gamma}$ ein System $\langle e_\nu \rangle_{\nu \in \Gamma}$ orthogonaler idempotenter Vertreter in R_1, $e_\nu \in \bar{e}_\nu$. Nach [3] (Satz 14) gilt

$$R_1 = \sum_{\nu \in \Gamma}^{\oplus} R_1 e_\nu .$$

Da $e_\nu r = r e_\nu$ für jedes $r \in R_1$, $\nu \in \Gamma$, und $e_\nu e_\mu = 0$ für $\nu \neq \mu$ gilt, folgt

$$R_1 = \sum_{\nu \in \Gamma}^{\boxplus} e_\nu R_1 e_\nu . \tag{2}$$

Die $e_\nu R_1 e_\nu$ $(\nu \in \Gamma)$ sind also abgeschlossene Ideale von R_1 (und offenbar welche von R). Nach [2] (Satz 5) und wegen der Zerlegung (2) sind $e_\nu R_1 e_\nu$ selbst i. e. S. l. k. Ringe.

Das Radikal von $e_\nu R_1 e_\nu$ ist $e_\nu J_1 e_\nu$. Es gilt $\bar{R}_1 \bar{e}_\nu = \bar{e}_\nu \bar{R}_1 \bar{e}_\nu \cong e_\nu R_1 e_\nu / e_\nu J_1 e_\nu$. $\bar{R}_1 \bar{e}_\nu$ ist einerseits ein ringtheoretischer direkter Summand von $\bar{R}_1$. Andererseits ist es ein minimales Linksideal von $\bar{R}_1$. Folglich enthält $\bar{R}_1 \bar{e}_\nu$ als ein Ring nur zwei voneinander verschiedene Linksideale. Nach [1] (Satz 2.9) ist $\bar{R}_1 \bar{e}_\nu$ ein Schiefkörper. Daher ist jedes $e_\nu R_1 e_\nu$ vollständig primär.

Wegen $ee_\nu = e_\nu e = e_\nu$ gilt $e_\nu R_1 e_\nu = e_\nu R e_\nu$. Setzen wir dieses in (2) und weiterhin (2) in (1) ein, so erhalten wir

$$R = \sum_{\nu \in \Gamma}^{\boxplus} e_\nu R e_\nu \boxplus N \tag{3}$$

mit $N \overset{\text{def}}{=} R(1-e)$, einem i. e. S. l. k. Radikalring. Somit gilt (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i): R sei ein Ring mit der Eigenschaft (ii), besitze also die Zerlegung (3). Ist $e' \neq 0$ ein Idempotent in $e_\nu R e_\nu$, so gilt in $\bar{e}_\nu \bar{R} \bar{e}_\nu \overset{\text{def}}{=} e_\nu R e_\nu / e_\nu J e_\nu$ $\bar{e}' = \bar{e}_\nu$, d. h. $e' - e_\nu$ liegt in $e_\nu J e_\nu$. Es gilt ferner $(e' - e_\nu)^2 = e' - e_\nu$. Da $e_\nu J e_\nu$ als ein Radikalring kein von Null verschiedenes Idempotent enthalten kann, muß $e' - e_\nu = 0$, d. h. $e' = e_\nu$ gelten. e_ν ist daher das einzige von Null verschiedene Idempotent in $e_\nu R e_\nu$. Ist f ein Idempotent in R, so besitzt f die Darstellung

$$f = \sum_{\mu \in \Lambda} e_\mu \quad (\Lambda \subseteqq \Gamma).$$

Daher liegt f im Zentrum von R, insbesondere gilt (i).

Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

Dieser Satz hat bestätigt, daß man sich bei dem Studium der i.e . S. l. k. Ringe mit der Eigenschaft (i) auf die Untersuchung der vollständig primären i. e. S. l. k. Ringe und der i. e. S. l. k. Radikalringe besehränken kann. Für die Struktur der i.e. S.l.k. Radikalringe verweisen wir auf die Arbeit [4] von R. WIEGANDT.

Aus dem Satz folgt unmittelbar die

Folgerung. Jeder kommutative i. e. S. l. k. Ring ist die ringtheoretische komplette direkte Summe vollständig primärer i. e. S. l. k. Ringe und eines i. e. S. l. k. Radikalringes.

Im Zusammenhang mit dieser Folgerung vergleiche man mit [6] (Theorem 5). Als eine weitere Folgerung betrachten wir den Fall, daß die Topologie in R *diskret* ist. In diesem Falle erhalten wir den oben erwähnten Satz von A. KERTÉSZ.

Literatur

[1] A. KERTÉSZ, Vorlesungen über artinsche Ringe, *Budapest—Leipzig* 1968.
[2] H. LEPTIN, Linear kompakte Moduln und Ringe, *Math. Zeitschr.* **62** (1955), 241—267.
[3] ———, Linear kompakte Moduln und Ringe II, *Math. Zeitschr.* **66** (1957), 289—327.
[4] R. WIEGANDT, Über transfinit nilpotente Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966), 101—104.
[4] R. WIEGANDT, Über transfinit nilpotente Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966), 101—114.
[5] ———, Über halbeinfache linear kompakte Ringe, *Studia Sci. Math. Hung.* **1** (1966), 31—38.
[6] D ZELINSKY, Rings with ideal nuclei, *Duke Math. Journ.* **18** (1951), 431—442.

(Eingegangen 7. Oktober 1973.)