Über die Iteration relleer Funktionen III

Von BÉLA BARNA (Debrecen)

Wir beschäftigen uns in diesem Teil III mit Fragen, die sich auf die Existenz von Fixpunkten höherer Ordnung[1]) und auf die irregulären Punkte beziehen. Es wird eine hinreichende Bedingung dafür gegeben, daß Zyklen von beliebiger Ordnung und irreguläre Punkte von der Mächtigkeit des Kontinuums existieren. Endlich wird ein Fall betrachtet, bei dem gewisse Fixpunkte Häufungspunkte von irregulären Iterationsfolgen[2]) sind.

Es sei $f(x)$ eine, im Intervall i stetige Funktion, von welcher das Intervall i auf sich selbst abgebildet wird, und es gebe kein Teilintervall in i, in dem $f(x)=$ $=$konst. ist.

Der iterierte Punkt erster Ordnung von x ist der Punkt (mit Abszissenwert) $x_1=f(x)$. Die Punktfolge $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=0, 1, 2, \dots)$ ist die *Iterationsfolge* des Punktes x_0. Wir verstehen unter dem *ersten iterierten Intervall* $\tau_1=[c, d]$ des Intervalls $\tau=[a, b]\subseteqq i$ das Intervall, welches von der Punkten x_1 der Punkte $x\in\tau$ gebildet wird. Es gilt $c=\inf\limits_{x\in\tau} f(x)$, $d=\sup\limits_{x\in\tau} f(x)$.

Ist das Intervall δ das erste iterierte Intervall von τ, d. h. ist $\delta=\tau_1$, dann nennt man τ das erste invers-iterierte Intervall von δ: $\delta_{-1}=\tau$. Es ist einfach zu sehen, daß wenn $[a, b]_1=[c, d]$ und σ ein Teilintervall von $[c, d]$ ist, so gibt es immer in $[a, b]$ wenigstens ein σ_{-1}-Intervall. Dies wollen wir in dem folgenden speziellen Fall anwenden:

Gilt $[a, b]_1=\begin{cases}[c, d]\\ [d, c]\end{cases}$, $f(a)=c$, $f(b)=d$, und für $x\in(a, b)$ $\begin{matrix} c<f(x)<d, \\ d<f(x)<c, \end{matrix}$ so gibt es für jedes $\sigma=[u, v]\subseteqq\begin{cases}[c, d]\\ [d, c]\end{cases}$ ein solches σ_{-1}-Intervall in $[a, b]$, in dessen Anfangspunkt $f(x)$ den einzigen $\begin{matrix}\text{kleinsten}\\ \text{größten}\end{matrix}$ Wert, im Endpunkt den einzigen $\begin{matrix}\text{größten}\\ \text{kleinsten}\end{matrix}$ Wert annimmt. Solche Intervalle — entsprechend den zwei Fällen — sind z. B.

$$\sigma_{-1}=\begin{matrix}[u_{-1}, v_{-1}] & v_{-1}=\inf\{x, f(x)=v\},\ x\in[a, b],\\ [v_{-1}, u_{-1}] & v_{-1}=\sup\{x, f(x)=v\},\ x\in[a, b],\\ & u_{-1}=\sup\{x, f(x)=u\},\ x\in[a, v_{-1}].\\ & u_{-1}=\inf\{x, f(x)=u\},\ x\in[v_{-1}, b].\end{matrix}$$

[1]) Die Grundbegriffe der hier folgenden Untersuchungen findet man z. B. in [2].

[2]) Vgl. [3], 111.

Nimmt die Funktion $f(x)$ ihren kleinsten und größten Wert (die Extremalen) in $[a, b]$ nur in den Grenzpunkten des Intervalls an, so nennen wir dieses Intervall ein *E-Intervall* (bezüglich der Funktion $f(x)$). Es gibt also zwei Typen von E-Intervallen nämlich die $E\nearrow$- und $E\searrow$-Intervalle, jenachdem ob $f(a)<f(b)$ bzw. $f(a)>f(b)$ gilt. Nach dem Vorangehenden können wir feststellen: Ist $[a, b]$ ein $E\nearrow$-, oder $E\searrow$-Intervall, und $\sigma\in[a, b]_1$, so gibt es in $[a, b]$ σ_{-1}-Intervalle von Typ $E\nearrow$, bzw. $E\searrow$.

Es sei (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $i=[0, 1]$, dann gilt für $x\in i$ $\inf f(x)=0$, $\sup f(x)=1$.

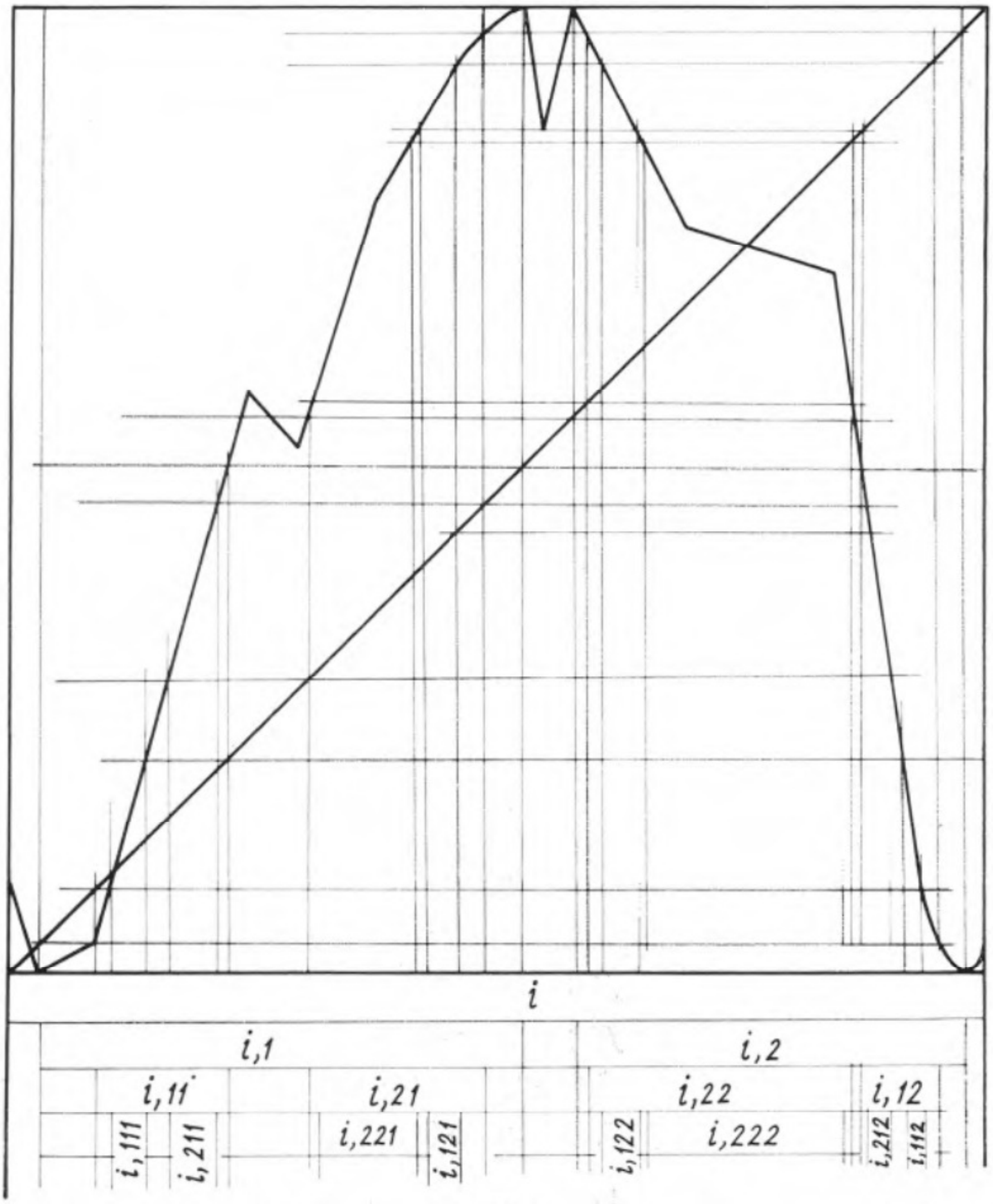

Fig. 1

In folgeden nehmen wir an:

$\mathscr{F}$: *Es gibt zwei geschlossene und voneinander fremde, vollständig*[3]) *im Innern von i liegende Teilintervalle von i, welche von f(x) auf i abgebildet werden. Es sei das links-liegende Intervall von Typ E↗, das andere E↘.*

Die beiden Teilintervalle sind also invers-iterierte Intervalle erster Ordnung von i, mit gemeinsamen Symbolen: i_{-1}-Intervalle. Wir unterscheiden diese Intervalle durch die Bezeichnung $i, 1$, bzw. $i, 2$, und wollen die ersten Invers-iterierte eines Intervalls durch hinzugefügte Ziffern 1, oder 2 bezeichnen jenachdem ob dieses Intervall in $i, 1$, bzw. in $i, 2$ liegt.

Man bildet aus den beiden i_{-1}-Intervallen die folgenden 4 invers-iterierten Intervalle zweiter Ordnung von i auf die oben geschilderte Weise:

$$i, 11 \subset i, 1 \qquad i, 21 \subset i, 1$$
$$i, 12 \subset i, 2 \qquad i, 22 \subset i, 2.$$

Die Intervalle mit den zweiten Ziffern 1 oder 2 sind E↗-, bzw. E↘-Intervalle. Die invers-iterierten Intervalle zweiter Ordnung — mit gemeinsamen Bezeichnung i_{-2} — liegen vollständig in dem Inneren der Intervalle i_{-1}, und sind voneinander paarweise fremde Teilintervalle derselben. Es liegen nämlich die Intervalle i_{-2} mit *verschiedenen* zweiten Ziffern in verschiedenen i_{-1}-Intervallen, die getrennt liegen. Hätten die i_{-2}-Intervalle mit *gemeinsamen* zweiten Ziffern gemeinsame Punkte, dann wären die ersten iterierten Punkte derselben gemeinsame Punkte der iterierten Intervalle i_{-1}, was unmöglich ist.

Setzen wir die Bildung der invers-iterierten Intervalle fort, so bekommen wir $8i_3, 16i_4, \ldots, 2^n i_{-n}$ invers-iterierte Intervalle. Die so konstruierten i_{-n}-Intervalle werden mit Symbolen

$$i_{-n} = i, k_1 k_2 \ldots k_n, \quad k_j = 1, 2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

bezeichnet. Die „Ziffernfolgen" $k_1 k_2 \ldots k_n$ sind aus 1 und 2 gebildete Variationen mit Wiederholung, und jeder einzelnen der 2^n Variationen entspricht ein — durch das vorangehende gebildete — i_{-n}-Intervall. Wir wollen die Gesamtheit der entstandenen (geschlossenen) Intervalle i_{-n} $(n=0, 1, 2, \ldots)$ das *System I* nennen. Einige Eigenschafte dieses Systems:

A. Es ist jedes i_{-n}-Intervall ein invers-iteriertes Intervall von i, d. h. es gilt $(i_{-n})_n = i$, doch ist $i_{-(n+1)}$ im allgemeinen kein invers-iteriertes Intervall von i_{-n}. Es sind in I die Invers-iterierten erster Ordnung von $i_{-n} = i, k_1 k_2 \ldots k_n$ die beiden Intervalle

$$i, k_1 k_2 \ldots k_n 1 \quad \text{und} \quad i, k_1 k_2 \ldots k_n 2;$$

dadurch folgt, daß $i_{-(n+r)}$ dann und nur dann ein invers-iteriertes Intervall (r-ter Ordnung) von i_{-n} ist, wenn die Ziffern von i_{-n} mit den *ersten n* Ziffern von $i_{-(n+r)}$ übereinstimmen:

$$(i_{-(n+r)})_r = i, \; k_1 k_2 \ldots k_n = i_{-n} \Leftrightarrow i_{-(n+r)} = i, \; k_1 k_2 \ldots k_n k_{n+1} \ldots k_{n+r}.$$

[3]) D. h. die Grenzpunkte der Teilintervalle sind innere Punkte von i.

B. Die Intervalle i_{-n} von gleicher Ordnung sind paarweise fremd (d. h. sie haben keinen gemeinsamen inneren Punkt, oder Grenzpunkt).

C. Wir beschäftigen uns noch mit der gegenseitige Lage der Intervalle des I-Systems:

Wir sahen, daß $i_{-2} \subset i_{-1}$ dann, und nur dann, wenn die zweite Ziffer von i_{-2} mit der Ziffer von i_{-1} gleich ist.

Es gilt allgemeiner: $i_{-(n+1)} \subset i_{-n}$ dann, und nur dann, wenn die *letzten* n Ziffern in $i_{-(n+1)}$ mit den Ziffern von i_{-n} übereinstimmen.

Die Behauptung kann durch vollständige Induktion bewiesen werden. Es sei

$$i_{-(n+1)} = i, k_1 k_2 \dots k_n k_{n+1},$$

$$i_{-(n+2)} = i, l_1 l_2 \dots l_n l_{n+1} l_{n+2}.$$

Im Fall

(1) $$i_{-(n+2)} \subset i_{-(n+1)}$$

müssen die letzten Ziffern gleich sein, weil beide Intervalle gleichzeitig in i, 1 oder in i, 2 liegen. Also gilt

(2) $$k_{n+1} = l_{n+1}.$$

Weiterhin folgt aus (1):

$$(i_{-(n+2)})_1 \subset (i_{-(n+1)})_1,$$

also

$$i, l_1 l_2 \dots l_{n+1} \subset i, k_1 k_2 \dots k_n,$$

woraus, durch die Induktionsannahme,

$$l_2 = k_1,\ l_3 = k_2, \dots, l_{n+1} = k_n$$

folgt. Durch (2) erhalten wir

$$i_{-(n+2)} = i, l_1 k_1 k_2 \dots k_n k_{n+1}$$

und dies führt zum Ergebnis: Ein Intervall $i_{-(n+r)}$ liegt dann und nur dann im Intervall i_{-n}, wenn die *letzten* n Ziffern in $i_{-(n+r)}$ mit den Ziffern von i_{-n} identisch sind:

$$i_{-(n+r)} \subset i_{-n} = i,\ k_1 k_2 \dots k_n \Leftrightarrow i_{-(n+r)} = i,\ l_1 l_2 \dots l_r k_1 k_2 \dots k_n.$$

Aus dem vorigen folgt, daß die Intervalle i_{-n} mit demselben Index paarweise fremd sind, und daß zwei Intervalle aus I mit verschiedenen Indizes n und m entweder fremd sind, oder das Intervall höherer Ordnung liegt vollständig im anderen.

Die Lage allgemein eines Intervalles i_{-n} und der darinliegenden zwei $i_{-(n+1)}$-Intervalle zeigt das Schema:

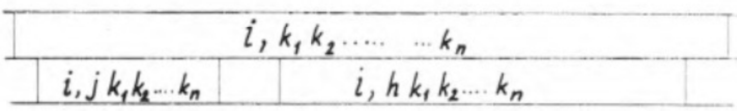

Fig. 2

Nun, wir betrachten eine unendliche Folge der ineinanderliegenden invers-iterierten Intervalle, d. h. eine solche, für die

$$i_{-1} \supset i_{-2} \supset \ldots \supset i_{-n} \supset \ldots$$

besteht. Nach dem vorangehenden — besonders nach der Eigenschaft **C** — können diese Intervalle in der Form

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} i_{-1} = i, k_1 \\ i_{-2} = i, k_2 k_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_{-n} = i, k_n k_{n-1} \ldots k_2 k_1 \end{cases}$$

symbolisiert werden. Aus der Geschlossenheit der Intervalle folgt, daß sie einen nichtleeren Durchschnitt haben, der ein geschlossenes Intervall, oder ein Punkt ist. Wir nennen diesen Durchschnitt den *Kern* dieser *einhüllende* Intervallfolge i_{-n}:

$$w = \bigcap_{n=1}^{\infty} i_n$$

und als Bezeichnung werden wir die aus den ersten Ziffern in (3) bestehende Folge

$$w = \{k_1 k_2 \ldots k_n \ldots\}$$

verwenden. (Das diesen Kern einhüllende einzige invers-iterierte Intervall i_{-n} ist also

$$i_{-n} = i, \; k_n k_{n-1} \ldots k_1$$

d. h. das Intervall aus I, dessen Ziffernfolge durch die „umgekehrte" Folge der ersten n Ziffern von w gebildet wird.)

Aus der Definition des Kernes und aus der Lage der Intervalle des Systems, durch **B** und **C** folgt, daß diese Ziffernfolge den Kern eindeutig bestimmt. Wenn w und w' (wenigstens) einen gemeinsamen Punkt enthalten, so sind sie identisch, und sie haben dieselbe Zifferfolge[4]).

Die Punkte von i_0 $(=i)$, welche in irgendeinem Kern liegen, nennen wir *Kernpunkte*. Die Punkte, welche in keinem Kern enthalten sind, nennen wir *endlich bedeckte Punkte*. Ist einen solchen Punkt einhüllendes Intervall höchster Ordnung ein i_ν so ist dieser Punkt ein äußerer Punkt sämtlicher Intervalle i_{-n}, $n=\nu+1, \nu+2, \ldots$. Dann liegt dieser Punkt in einem, zwischen zwei Intervallen $(\nu+1)$-ter Ordnung liegenden (offenen) Intervall. Daraus folgt, daß *kein endlich-bedeckter Punkt Häufungspunkt von Kernpunkten ist.*

Die ersten Iterierte $(i_{-n})_1$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ der einhüllenden Intervalle eines Kernes

$$w = \{k_1 k_2 \ldots k_n \ldots\}$$

sind auch ineinander liegende Intervalle des Systems I und der von diesen eingehüllte Kern ist *das erste Iterierte des Kernes* w:

$$w_1 = \{k_2 k_3 \ldots k_n \ldots\}.$$

[4]) Kerne, mit verschiedenen Ziffernfolgen sind „verschieden", d. h. sie haben keinen gemeinsamen Punkt. — Zwei Ziffernfolge nennt man „gleich", wenn die entsprechenden Ziffern gleich sind. Die nicht-gleiche Ziffernfolgen sind „verschieden".

Dies ist offenbar der erste iterierte Punkt, oder Intervall des Punktes, bzw. des Intervalls w.

So können wir die Iterierte w_m des Kernes w — die gleichzeitig mit w einzelne Punkte, oder Intervalle sind — in der Form

$$w_m = \{k_{m+1}k_{m+2}\ldots\}$$

darstellen.

Die Kerne mit periodischer Ziffernfolgen spielen eine besondere Rolle.

Es sei p eine natürliche Zahl. Eine p-gliedrige „Periode" nennen wir eine p-gliedrige Ziffernfolge

$$P = k_1k_2\ldots k_p,$$

wenn diese *nicht* durch ein Nacheinander einer einzigen „kürzeren" Ziffernfolge aufgeschrieben werden kann.[5])

Z. B. ist 12 21 eine viergliedrige Periode, aber ist 12 12 keine Periode. Aus der Definition folgt, daß jede endliche Ziffernfolge entweder eine Periode ist, oder durch Wiederholung einer Periode entsteht. Jede Ziffer selbst, und jede primzahlgliedrige Ziffernfolge die verschiedene Ziffern enthält, ist eine Periode.

Wir beweisen: *Wenn $P=k_1k_2\ldots k_p$ $(p>1)$ eine Periode ist, so ist die zyklische Permutation $P_1=k_2k_3\ldots k_pk_1$ auch eine Periode.* — Dies ist einleuchtend, wenn p eine Primzahl ist. Wenn p eine zusammengesetzte Zahl bedeutet, und P_1 keine Periode ist, so kann sie in gewisse, d-gliedrige gleiche Ziffernfolgen in der Form

$$P_1 = k_2k_3\ldots k_dk_{d+1}|k_{d+2}k_{d+3}\ldots k_{2d+1}|\ldots|k_{p-d+2}\ldots k_pk_1$$

aufgeteilt werden, wo die nacheinander folgenden Teilfolgen gleich sind, d. h. es gilt

$$k_i = k_j, \quad \text{wenn} \quad i \equiv j \pmod d.$$

Daraus folgt also, daß P selbst in gleiche d-gliedrigen Teilfolgen aufgeteilt werden kann, entgegen der Annahme, daß P eine Periode ist.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens folgt: *Ist P eine Periode, so sind die zyklischen Permutationen $P_r=k_{r+1}k_{r+2}\ldots k_pk_1\ldots k_r$ auch Perioden.*

Wir können noch mehr behaupten: *Ist P eine Periode, so sind die zyklischen Permutationen P_r $(r=1, 2, \ldots, p-1)$ von P verschiedene Perioden.*

Beweis. Es sei d der größte gemeinsame Teiler von p und r, $p=\lambda d$, $r=\mu d$, dann ist $\lambda>\mu$ und λ und μ sind relative Primzahlen. Teilen wir die Periode P in d-gliedrige Teilfolgen ein:

$$P = k_1k_2\ldots k_d|k_{d+1}\ldots k_{2d}|\ldots \quad |k_{p-d+1}\ldots k_p,$$

und es sei

$$\mathcal{P}_h = k_{(h-1)d+1}k_{(h-1)d+2}\ldots k_{hd}, \qquad h = 1, 2, \ldots, \lambda.$$

Schreiben wir — entsprechend dieser Aufteilung —

$$P = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\ldots\mathcal{P}_{\mu-1}\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_{\mu+1}\ldots\mathcal{P}_\lambda.$$

Dann ist

$$P_r = \mathcal{P}_{\mu+1}\mathcal{P}_{\mu+2}\ldots\mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_1\ldots\mathcal{P}_\mu$$

[5]) Mit anderem Wortgebrauch: „primitive Periode", s. [1], 73.

auch eine Periode (wie wir vorher festgestellt haben), daher gibt es unter den $\mathscr{P}_k$ wenigstens zwei verschiedene. Wir zeigen: $P \neq P_r$. Schreibt man nämlich P_r in der Form

$$P_r = \mathscr{P}_{\mu+1}\mathscr{P}_{\mu+2} \dots \mathscr{P}_{2\mu}\mathscr{P}_{2\mu+1} \dots \mathscr{P}_{\mu+\lambda},$$

wo $\mathscr{P}_q = \mathscr{P}_s$ gilt, wenn $q \equiv s \pmod{\lambda}$ ist. Aus der Gleichheit $P = P_r$ folgt

$$\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_{\mu+1} = \mathscr{P}_{2\mu+1} = \dots = \mathscr{P}_{(\lambda-1)\mu+1}.$$

Da aber λ, μ relativ prim sind, bestimmen die Indizes hier eine vollständige Restfolge mod λ, und so gilt $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_s$ $(s=2, 3, \dots, \lambda)$, was unmöglich ist.

Wenn die Ziffernfolge eines Kernes von einer Ziffer an durch Wiederholung einer Periode entsteht, dann nennt man sie, und den Kern selbst *periodisch*. Gehört k_1 zur Periode, so spricht man über einen „reinperiodischen Kern", sonst heißt er „gemischtperiodisch".

Hilfssatz 1. *In jedem reinperiodischen Kern mit p-gliedriger Periode gibt es einen Fixpunkt p-ter Ordnung.*

Beweis. Ist der Kern

$$w = \{\overline{k_1 k_2 \dots k_p} \dots\},$$

dann ist $w_p = w$, d. h. die Punktmenge w wird durch die Funktion $f_p(x)$ auf sich selbst abgebildet. Daraus folgt, daß $f_p(x)$ in w wenigstens einen Fixpunkt erster Ordnung hat, z. B. gilt $f_p(\check{x}) = \check{x}$. Dieser Punkt $\check{x}$ ist ein Fixpunkt p-ter Ordnung von $f(x)$. Dazu muß man einsehen, daß $\check{x} \neq \check{x}_n$ für $n=1, 2, \dots, p-1$ gilt. Dies folgt einfach daraus, daß $\check{x}_n \in w_n$, und daß die Periode der iterierten Kerne $w_1, w_2, \dots, w_{p-1}$ zyklische Permutationen der Periode von w sind, also gilt $w \neq w_n$ $(n=1, 2, \dots, p-1)$. So folgt $\check{x} \neq \check{x}_n$ für $n=1, 2, \dots, p-1$.

Satz 1. *Gilt die Annahme $\mathscr{F}$, so gibt es bei der Grundfunktion $f(x)$ Zyklen von beliebiger Ordnung.*

Beweis. Es gibt nämlich reinperiodische Kerne mit beliebigen Perioden. Jede p-gliedrige Periode bestimmt mit ihren zyklischen Permutationen einen Zyklus von Fixpunkten p-ter Ordnung.

Hilfssatz 2. *Liegt im Kern w ein Fixpunkt (irgendwelcher Ordnung), so ist w reinperiodisch.*

Beweis. Es sei dieser Fixpunkt $\check{x}$ von p-ter Ordnung. Wegen $\check{x} \in w$ gilt $\check{x}_p \in w_p$, also hat $\check{x} = \check{x}_p$ zur Folge, daß $\check{x}$ gemeinsamer Punkt von w und w_p ist, woraus $w = w_p$ folgt. Deshalb besteht die Ziffernfolge von w aus Wiederholung einer p-gliedrigen Ziffernfolge; sie ist eine Periode, oder besteht aus gleichen Perioden. Hieraus folgt die Behauptung.

Bemerkung. Wenn die Ordnungszahl des Fixpunktes $\check{x}$ eine Primzahl ist, so ist w reinperiodisch mit p-gliedriger Periode. Ist $\check{x}$ ein Fixpunkt erster Ordnung, so ist der Kern von der Form $\{kkk\dots\}$, $k=1$ oder $k=2$.

Hilfssatz 3. *Liegt im Kern w ein singulärer Punkt, welcher kein Fixpunkt ist, so ist w gemischtperiodisch.*

Beweis. Es sei x ein invers-interierter Punkt m-ter Ordnung des Fixpunktes $\check{x}$, d. h. $x=\check{x}_{-m}$, und $\check{x}\in w=\{k_1 k_2 \ldots\}$. Dann ist $x_m=\check{x}\in w_m=\{k_{m+1}k_{m+2}\ldots\}$, und ist w_m nach dem vorigen Hilfssatz reinperiodisch. Dadurch folgt, daß w selbst gemischt-periodisch ist.

Hilfssatz 4. *Liegt im Kern w ein regulärer Punkt, so ist w periodisch.*

Beweis. Ist dieser regulärer Punkt x, und gehört er zu einem Zyklus p-ter Ordnung, so besteht die Iterationsfolge (x_n) (von einem genügend großen n an) aus p Teilfolgen von der Form $(x_{m+kp})=((x_m)_{kp})$ und jede dieser Teilfolgen strebt zu einem der Fixpunkte des Zyklus. Es sei

$$\lim x_{mp}=\check{x} \tag{4}$$

ein Punkt des Zyklus. Da die Punkte x_n Kernpunkte sind, ist jeder Häufungspunkt der Folge (x_n) auch Kernpunkt, da — wie wir oben festgestellt haben — endlich-bedeckte Punkte nicht Häufungspunkte von Kernpunkten sein können. Nach Hilfssatz 2 ist der Kern w in welchem $\check{x}$ liegt, reinperiodisch:

$$\check{x}\in\check{w}=\{\overline{l_1 l_2 \ldots l_q}\ldots\},$$

wo q ein Teiler von p ist. Deshalb liegt $\check{x}$ in dem einhüllenden Intervall q-ter Ordnung des Kernes:

$$\check{x}\in i,\ l_q l_{q-1}\ldots l_2 l_1.$$

Nach (4) gibt es m_0, wofür

$$x_{mp}\in i,\ l_q l_{q-1}\ldots l_2 l_1, \quad \text{wenn} \quad m>m_0. \tag{5}$$

Ist andererseits der den Punkt x enthaltenden Kern

$$w=\{k_1 k_2 \ldots\},$$

so besteht

$$x_{mp}\in w_{mp}=\{k_{mp+1}k_{mp+2}\ldots\},$$

und deshalb liegt x_{mp} in jedem einhüllenden Intervall dieses Kernes, also auch im invers-iterierten Intervall q-ter Ordnung

$$x_{mp}\in i,\ k_{mp+q}k_{mp+q-1}\ldots k_{mp+1}. \tag{6}$$

(5) und (6) bedeuten, daß x_{mp} für $m>m_0$ gemeinsamer Punkt der betreffenden Intervalle ist. Diese sind also i_{-q}-Intervalle des Systems I mit einem gemeinsamen Punkt, d. h. sie sind identisch. So folgt

$$\begin{aligned} k_{mp+1}&=l_1\\ k_{mp+2}&=l_2\\ &\cdots\cdots\\ k_{mp+q}&=l_q \end{aligned}$$

wenn nur $m>m_0$. Also gilt

$$w=\{k_1 k_2\ldots k_{mp}\overline{l_1 l_2\ldots l_q}\ldots\}$$

d. h. w ist periodisch.

Hilfssatz 5. *Die Punkte eines aperiodischen Kerns sind irregulär.*

BEWEIS. Nach den Hilfssätzen 2, 3 und 4 sind die Kerne in welchem singuläre, oder reguläre Punkte liegen, periodisch. So liegen in aperiodischen Kernen nur irreguläre Punkte.

Satz 2. *Gilt die Annahme $\mathcal{F}$ so ist bei der Grundfunktion f die Menge der irregulären Punkte von der Mächtigkeit des Kontinuums.*

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus dem vorigen Hilfssatz angesichts der Tatsache, daß die Menge der aperiodischen Kerne, bzw. die der aperiodischen Ziffernfolgen das Kontinuum zur Mächtigkeit hat, und daß zu jeder Ziffernfolge ein (wenigstens einen Punkt enthaltender) Kern gehört.

Wir beschäftigen uns noch mit einem besonderen Typ von aperiodischen Kernen.
Es sei P eine p-gliedrige Periode ($p \geqq 1$) und

$$\underbrace{PP \dots P}_{\varrho_\nu} \quad (\varrho_\nu > 1) \tag{7}$$

eine durch die Wiederholung derselben entstehende Ziffernfolge. Es sei nun w ein aperiodischer Kern in dessen Ziffernfolge unendlich oft die Periodenfolgen von Typ (7) vorkommen. Dieser Kern hat also die Form

$$w = \{k_1 k_2 \dots \underbrace{PP \dots P}_{\varrho_1} \dots \underbrace{PP \dots P}_{\varrho_\nu} \dots\}, \quad \nu \to \infty. \tag{8}$$

Es gibt zwei Fälle:

A. *Die Folge ϱ_ν ($\nu = 1, 2 \dots$) ist nicht beschränkt.* Steht die Ziffernfolge (7) unmittelbar der m_ν-ten Ziffer in (8), so ist

$$w_{m_\nu} = \{\underbrace{PP \dots P}_{\varrho_\nu} \dots\}.$$

Das einhüllende Intervall der Ordnung $p \cdot \varrho_\nu$ dieses Kernes ist das invers-iteriertes Intervall

$$i_{-p \cdot \varrho_\nu} = i, \ \underbrace{\overleftarrow{P}\overleftarrow{P} \dots \overleftarrow{P}}_{\varrho_\nu}, \tag{9}$$

wo $\overleftarrow{P}$ die Periode[6]) bedeutet, welche die Ziffern der Periode P in umgekehrter Reihenfolge enthält.

Ist also der irreguläre Punkt $x \in w$, so gilt

$$x_{m_\nu} \in i_{-p \cdot \varrho_\nu}.$$

Andererseits sind die Intervalle (9) einhüllende Intervalle des Kernes

$$\check{w} = \{PP \dots P \dots\}.$$

Da dieser reinperiodisch ist, hat $\check{w}$ wenigstens einen Fixpunkt p-ter Ordnung. Besteht $\check{w}$ nur aus diesem Punkt, so streben mit unendlich wachsendem ν die Längen der Intervalle (9) nach Null, und so gilt

$$\lim_{\nu \to \infty} x_{m_\nu} = \check{x}.$$

Es folgt also der

---

[6]) Es ist nämlich mit $\overleftarrow{P}$ auch P eine Periode.

Satz 3. *Gilt die Annahme $\mathcal{F}$, und ist ein Fixpunkt p-ter Ordnung der einziger Punkt des Kernes $\breve{w}=\{PP\dots P\dots\}$, so kann man (unendlich viele) irreguläre Punkte angeben, deren Iterationsfolge (x_n) den Fixpunkt zum Häufungspunkt hat.*

Im Fall

B. *Die Folge ϱ_ν $(\nu=1, 2, \dots)$ ist beschränkt.* Gilt in (8) diese Beschränktheit, d. h. existiert unter den Wiederholungszahlen ϱ_ν der Periode P eine größte Zahl R_P, so *gibt es für $x\in w$ im periodischen Kern*

$$\breve{w} = \{PP \dots P \dots\}$$

keinen Häufungspunkt der Folge (x_n).

Die Intervalle

$$i_{-qp} = i,\ \underbrace{\overleftarrow{P}\overleftarrow{P} \dots \overleftarrow{P}}_{q} \tag{10}$$

sind nämlich Umgebungen eines jeden Punktes in $\breve{w}$. Andererseits nach (8)

$$x_m \in w_m = \{k_{m+1}k_{m+2} \dots \underbrace{PP \dots P}_{\varrho_\mu} \dots \underbrace{PP \dots P}_{\varrho_{\mu+1}} \dots\},$$

und die einhüllenden Intervalle dieses Kernes sind

$$i_{-n} = i,\ \dots \underbrace{\overleftarrow{P}\overleftarrow{P} \dots \overleftarrow{P}}_{\varrho_{\mu+1}} \dots \underbrace{\overleftarrow{P}\overleftarrow{P} \dots \overleftarrow{P}}_{\varrho_{\mu}} \dots k_{m+2}k_{m+1}. \tag{11}$$

Die Intervalle (10) und (11) sind aber getrennt liegende Intervalle, da die letzten pq Ziffern von (11) können nicht mit den Ziffern von (10) übereinstimmen, wenn nur $qp > R_P$ ist. Mit den Intervallen (11) liegen also auch die Punkte $x_m \in i_{-n}$ außer den Umgebungen (10) des Kernes $\breve{w}$.

Es folgt also der

Satz 4. *Gilt die Annahme $\mathcal{F}$, und liegt ein irregulärer Punkt x in einem Kern, wobei die Folge der Wiederholungszahlen eines jeden Periode für sich beschränkt ist, so sind die Häufungspunkte der Iterationsfolge (x_n) irreguläre Punkte.*

Literatur

[1] O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Zweite Auflage. (1929) *Leipzig* und *Berlin*,

[2] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen I, II. *Publ. Math. (Debrecen)* **7** (1960), 16—40. **13** (1966), 169—172.

[3] I. Berg, Über irreguläre Iterationsfolgen *Publ. Math. (Debrecen)* **17** (1970), 111—115.

(Eingegangen am 17. Januar 1974.)