О структуре сплетения двух циклических групп порядков степеней простого числа.

П. Лакатош (Дебрецен)*)

§ 1. Введение.

Уже в работе Г. Поя [6] (1937) встречается понятие сплетения, однако, на значимость этого понятия для теории групп впервые указал Л. Калужин. В работе [3] он доказал, что силовские p-подгруппы симметрической группы p^n-ой (p-простое число) степени являются сплетением n-циклических групп простого порядка p. Он же описал [4] характеристические подгруппы этих групп, а А. Вейр [5] — их абелевы нормальные делители. К. Бузаши, развивая направление изучения этих структур, в [2] определил нормальные делители упомянутых групп (1969).

Настоящая работа продолжает структурные исследования Л. Калужнина, А. Вейра и К. Бузаши и использует их методы.

Факт медленного рождения предшествующих результатов указывает на сложность темы; даже такой простой случай, каким занимаемся мы в этой работе, до сих пор не рассматривался в литературе, несмотря на многочисленные статьи о сплетениях, которые появляются каждый год.

Напомним интересные для нас результаты о нильпотентных сплетениях. Х. Либек [7] определил класс нильпотентности сплетения группы A с показателем p^n (p-простое) с конечной абелевой p-группой. В случае, когда A циклическая p-группа, а B конечная абелева p-группа, А. Мельдрум решил вопрос о принадлежности выбраного элемента базиса их сплетения некоторому члену верхнего центрального ряда сплетения.

В предлагаемой работе рассматривается сплетение циклической группы A порядка p^n с циклической группой B порядка p^m, где p-простое число, n и m-произвольные натуральные числа.

Во втором параграфе статьи дается анализ общих свойств рассматриваемой группы W. Определяется центр группы, дается один удобный для дальнейщих исследований базис для коммутанта группы. Описываются некоммутативные члены верхнего центрального ряда группы, причем, как следствие, получается длина центрального ряда.

*) Piroska Lakatos (Debrecen).

В третьем параграфе сначала рассматривается случай $n=1$. Оказывается, что верхний и нижний центральные ряды в этом случае совпадают. В этом случае, и позже, в случае $m=1$, определяются все члены нижнего и верхнего центральных рядов и удобный базис в них.

§ 2

1. Сначала напомним некоторые известные свойства сплетения.

Пусть $A=\{a\}$ и $B=\{b\}$ циклические группы, порожденные элементами a и b, порядка p^n и p^m (в дальнейшем число p везде произвольное фиксированное простое, а n и m произвольные натуральные числа).
Пусть далее A_i $(i=1, 2, \dots, p^m)$-группы, изоморфные с A (с изоморфизмом $a \to a(b^i)=a_i$).
Обозначим

$$K = \underset{b^i \in B}{X} A_i. \tag{2.1}$$

Сплетением W группы A с группой B назовем расщепляющееся расширение группы K при помощи B, в котором элементы из B индуцируют автоморфизмы в K по закону

$$b^{-1}a_i b = a_{i+1} \quad (i+1 \text{ приводится по модулю } p^m). \tag{2.2}$$

Очевидно, группа K является максимальным нормальным делителем в группе W и порядок W равен $p^{n \cdot p^m + m}$.
Сплетение группы A с B будем обозначать через $A \operatorname{wr} B = W$. В дальнейшем буквы A, A_i, B, K, W, a, b, n и m везде обозначают определенные тут группы, элементы и числа. Коммутатор двух элементов x и y будем обозначать символом $[x, y]$, k-тый член нижнего центрального ряда группы W как W_k, а для k-го члена верхнего центрального ряда зафиксируем обозначение Z_k. Порядок произвольной группы G обозначим $|G|$. Напомним полезные соотношения коммутаторов в группе W, проверяемые непосредственно:

пусть $k, k' \in K, \omega \in W$ произвольные элементы, тогда

$$[k, \omega k'] = [k, \omega], \tag{2.3}$$

$$[\omega, k \cdot k'] = [\omega, k][\omega, k'], \tag{2.4}$$

$$[b^l, a_i] = a_{i+l}^{-1} \cdot a_i = [a_i^{-i}, b^l], \tag{2.5}$$

$$[b^l, a_i] = [b, a_i][b, a_{i+1}] \cdot \ldots \cdot [b, a_{i+l-1}], \tag{2.6}$$

$$[k, b^i, b^l] = [k, b^l, b^i], \tag{2.7}$$

(где индексы элементов a_j приводятся по модулю p^m).

Часто будем пользоваться следующими полезными двойственными свойствами (см. [2]).

В обозначениях $\alpha_1=a_1$, $\alpha_j=[b, \alpha_{j-1}]$, $(j=2, \dots, p^m)$

$$\text{(2.8)} \qquad \alpha_i = \prod_{\nu=1}^{i} a_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}}, \qquad i = 1, 2, \dots, p^m$$

$$\text{(2.9)} \qquad a_i = \prod_{\nu=1}^{i} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}},$$

где $C_{i-1}^{\nu-1}$-биномиальные коэффициенты.

2. Легко доказать с помощью соотношений (2.3); (2.4) и (2.5) следующие важные теоремы:

Теорема 2.1. *Группа* $W_1=[b, K]\subseteqq K$.

Теорема 2.2. *Центр* Z_1 *группы* W *является циклической группой, порожденной элементом* $z=a_1\cdot a_2\cdot \dots \cdot a_{p^m}$ *порядка* p^n.

Лемма 2.3. *Пусть* φ *такое отображение группы* K *на себя, что* $\varphi(k)=[b, k]$ *для любого* $k\in K$.

Тогда φ является эндоморфизмом группы K, ядром которого является центр группы W.

Доказателство. По (2.4) для каждого $k, k'\in K$

$$\varphi(k\cdot k') = [b, k\cdot k'] = [b, k][b, k'] = \varphi(k)\cdot\varphi(k'),$$

причем для элемента $k\in K$ ядра ψ выполняется $[b, k]=e$, поэтему $k\in Z_1$, и $\varphi^{-1}(e)=Z_1$.

Теорема 2.4. *Система элементов* $[b, a_i]=\beta_i$, $(i=1, 2, \dots, p^m-1)$ *образует базис группы* W_1, *отсюда* $|W/W_1|=p^{n+m}$.

Доказательство: Взаимный коммутант $W_1=[b, K]$ порождается взаимными коммутаторами порождающих элементов группы W, поэтому группа $[b, K]$ порождается системой элементов

$$\beta_i = [b, a_i] = a_{i+1}^{-1}\cdot a_i \qquad (i = 1, 2, \dots, p^m;\ i+1 \text{ приводится по модулю } p^m).$$

Однако

$$\beta_1\cdot\beta_2\cdot\dots\cdot\beta_{p^m-1} = \beta_{p^m}^{-1},$$

поэтому элементы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p^m-1}$ уже порождают группу W_1. Порядок группы $[b, K]=\varphi(K)$, согласно лемме 2.3, равен $p^{n(p^m-1)}$ (так как порядок ядра эндоморфизма, по теореме 2.2, равен p^n), и значит элементы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p^m-1}$ определяют минимальную «линейно независимую» систему образующих в группе W_1.

Лемма 2.5. *Пусть элементы* $\beta_\nu = a_{\nu+1}^{-1} \cdot a_\nu$ $(\nu=1, 2, \dots, p^m-1)$, $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_i = [b, \alpha_{i-1}]$ $(i=2, 3, \dots, p^m)$. *Тогда* α_i и β_ν *могут быть представлены в виде*

$$\alpha_i = \prod_{\nu=1}^{i-1} \beta_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}}, \qquad (i = 2, 3, \dots, p^m) \tag{2.10}$$

$$\beta_\nu = \prod_{i=1}^{\nu+1} \alpha_i^{(-1)^i C_{\nu-1}^{i-2}}, \qquad (\nu = 1, 2, \dots, p^m-1). \tag{2.11}$$

Доказательство. Согласно формуле (2.9)

$$\beta_\nu = a_{\nu+1}^{-1} \cdot a_\nu = \prod_{i=1}^{\nu+1} \alpha_i^{(-1)^i C_\nu^{i-1}} \cdot \prod_{i=1}^{\nu} \alpha_i^{(-1)^{\nu-1} C_{\nu-1}^{i-1}} = \prod_{i=1}^{\nu} \alpha_i^{(-1)^i (C_\nu^{i-1} - C_{\nu-1}^{i-1})} \cdot \alpha_{\nu+1}^{(-1)^{\nu+1} \cdot C_\nu^\nu} =$$

$$= \prod_{i=2}^{\nu} \alpha_i^{(-1)^i C_{\nu-1}^{i-2}} \cdot \alpha_{\nu+1}^{(-1)^{\nu+1} C_{\nu-1}^{\nu-1}} = \prod_{i=2}^{\nu+1} \alpha_i^{(-1)^i \cdot C_{\nu-1}^{i-2}}.$$

Мы получили соотношение (2.11). Также по формуле (2.8)

$$\alpha_i = \prod_{\nu=1}^{i} a_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}} = a_1 \prod_{\nu=2}^{i} a_\nu^{(-1)^{\nu-1} (C_{i-2}^{\nu-2} + C_{i-2}^{\nu-1})} =$$

$$= a_1 \cdot a_2^{-1} \cdot \prod_{\nu=2}^{i-1} a_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} \cdot \prod_{\nu=2}^{i-1} a_{\nu+1}^{(-1)^\nu C_{i-2}^{\nu-1}} = \prod_{\nu=1}^{i-1} \beta_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}}.$$

Замечание. Символы β_ν и α_i будут обозначать в дальнейшем элементы, введенные в предыдущей лемме.

Теорема 2.6. *Элементы* $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p^m}$ *образуют базис группы* W_1.

Доказательство. Согласно теореме 2.4 элементы β_ν $(\nu=1, 2, \dots, p^m-1)$ образуют базис группы W_1. Эти элементы можно выразить по соотношению (2.11) с помощью элементов α_i $(i=2, 3, \dots, p^m)$. Таким образом теорема доказана.

Лемма 2.7. *Пусть* p *простое и* k *целое число, которое записывается в виде*

$$k = k_1 \cdot p^{l-1} + k_2 \cdot p^{l-2} + \dots + k_{l-1} \cdot p + k_l, \qquad (k_i < p;\ i = 1, 2, \dots, l).$$

Если $p^s \| k$, *но* $p^{s+1} \not| k$ *для некоторого* s, *то* $p^{l-s} \| C_{p^l}^k$, *но* $p^{l-s+1} \not| C_{p^l}^k$.

Доказательство. Очевидно в этом случае

$$C_{p^l}^k = \frac{p^l \cdot (p^l - 1) \cdot \dots \cdot (p^l - (k-1))}{k \cdot 1 \cdot \dots \cdot k-1} \quad \text{и} \quad k \leqq p^l.$$

Для любого числа $1 \leqq \alpha \leqq k-1$ и j $p^j \| d$ тогда и только тогда, если $p^j \| p^l - d$, что доказывает лемму.

Лемма 2.8. *Для элемента* $z=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{p^m}$ *центра* Z_1

$$z=\prod_{\nu=1}^{p^m}\alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1}C^\nu_{p^m}}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Легко проверяется, что

$$a_1^{p^m-1}\cdot a_2^{-1}\cdot a_3^{-1}\cdot\ldots\cdot a_{p^m}^{-1}=\beta_1^{p^m-1}\cdot\beta_2^{p^m-2}\cdot\ldots\cdot\beta_{p^m-2}^2\cdot\beta_{p^m-1}=z^{-1}\cdot\alpha_1^{p^m}.$$

Отсюда, используя соотношение (2.11) и свойства биномиальных коэффициентов,

$$\begin{aligned}
z^{-1}\cdot\alpha_1^{p^m}&=\alpha_2^{p^m-1}\cdot\alpha_2^{\binom{1}{0}(p^m-2)}\cdot\alpha_3^{-\binom{1}{1}(p^m-2)}\cdot\alpha_2^{\binom{2}{0}(p^m-3)}\cdot\alpha_3^{-\binom{2}{1}(p^m-3)}\cdot\\
&\quad\cdot\alpha_4^{\binom{2}{2}(p^m-3)}\cdot\ldots\cdot\alpha_2^{\binom{p^m-2}{0}}\cdot\alpha_3^{-\binom{p^m-2}{1}}\cdot\ldots\cdot\alpha_{p^m-1}^{-\binom{p^m-2}{p^m-3}}\cdot\alpha_{p^m}^{\binom{p^m-2}{p^m-2}}=\\
&=\alpha_2^{\sum_{i=0}^{p^m-2}\binom{i}{0}+\sum_{i=0}^{p^m-3}\binom{i}{0}+\ldots+\sum_{i=0}^{1}\binom{i}{0}+\binom{0}{0}}\cdot\alpha_3^{-\left(\sum_{i=1}^{p^m-2}\binom{i}{1}+\sum_{i=1}^{p^m-3}\binom{i}{1}+\ldots+\sum_{i=1}^{2}\binom{i}{1}+\binom{1}{1}\right)}\cdot\\
&\quad\cdot\ldots\cdot\alpha_{p^m-1}^{\sum_{i=p^m-3}^{p^m-2}\binom{i}{p^m-3}+\binom{p^m-3}{p^m-3}}\cdot\alpha_{p^m}^{-\binom{p^m-2}{p^m-2}}=\alpha_2^{\sum_{i=1}^{p^m-1}\binom{i}{1}}\cdot\alpha_3^{-\sum_{i=2}^{p^m-2}\binom{i}{2}}\cdot\ldots\cdot\alpha_{p^m-1}^{\sum_{i=p^m-2}^{p^m-1}\binom{i}{p^m-2}}\cdot\\
&\quad\cdot\alpha_{p^m}^{-\binom{p^m}{p^m}}=\alpha_2^{\binom{p^m}{2}}\cdot\alpha_3^{-\binom{p^m}{3}}\cdot\ldots\cdot\alpha_{p^m-1}^{\binom{p^m}{p^m-1}}\cdot\alpha_{p^m}^{-\binom{p^m}{p^m}}=\prod_{\nu=2}^{p^m}\alpha_\nu^{(-1)^\nu\cdot C^\nu_{p^m}}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$z=\prod_{\nu=1}^{p^m}\alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1}C^\nu_{p^m}},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2.9. *Для фиксированного* целого *числа* $0\leqq k\leqq m$ *обозначим через* $\bar{A}_k$ *подгруппу* W, *порожденную элементами*

$$a_i\cdot a_{p^k+i}^{-1}\qquad(i=1,2,\ldots,p^m-p^k;\ 0\leqq k\leqq m-1).$$

Элемент вида

$$c=a_1^{\gamma_1}\cdot a_2^{\gamma_2}\cdot\ldots\cdot a_{p^m}^{\gamma_{p^m}},\quad c\in K \tag{$*$}$$

тогда и только тогда содержится в $\bar{A}_k$, *когда*

$$\gamma_i+\gamma_{p^k+i}+\ldots+\gamma_{p^m-p^k+i}\equiv0\pmod{p^n}$$

для всех $1\leqq i\leqq p^k$.

(Это свойство элемента $c\in K$ в далйнейшем будем называть T_k-свойством.)

Доказательство. Покажем сначала для $k=0$, что такие и только такие элементы содержатся в группе $\bar{A}_0=W_1$, для которых $\sum_{i=1}^{p^m}\gamma_i\equiv0\pmod{p^n}$. Очевидно (по теореме 2.4), что при представлении $(*)$ элементов группы W_1 сумма показателей делится на p^n.

По предыдущему в группе K по крайней мере $p^{n(p^m-1)}$ элементов (каков порядок группы W_1) обладает свойством T_0. Пусть далее c и c' — произвольные различные элементы группы K вида

$$c = a_1^{\gamma_1} \cdot a_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot a_{p^m}^{\gamma_{p^m}} \quad \text{и} \quad c' = a_1^{\gamma_1'} \cdot a_2^{\gamma_2'} \cdot \ldots \cdot a_{p^m}^{\gamma'_{p^m}},$$

где $\sum_{i=1}^{p^m} \gamma_i$ и $\sum_{i=1}^{p^m} \gamma_i'$ делятся на p^n.

Будем прибавлять к показателям γ_1 и γ_1' по порядку число $1 \leqq i < p^n$. Так полученные элементы обозначим через c_1^i и $c_1'^i$. Очевидно, суммы показателей степеней c_1^i и $c_1'^i$ сравнимы с числом i по модулю p^n.

Если $c \neq c'$, тогда $c_1^i \neq c_1'^i$, в противном случае $\gamma_{1-i} \equiv \gamma_1' + i$ и $\gamma_j \equiv \gamma_j' \pmod{p^n}$ были бы справедливы для $j=2, 3, \ldots, p^n$ и $1 \leqq i < p^n$, в противоречии с нашими условиями $c \neq c'$. Таким образом элементы группы K, распадаются на p^n классов, причем содержание класса зависит от того, какое число $1 \leqq i \equiv p^n$ прибавили мы к показателям γ_1 и γ_1'.

Отсюда, используя, что $|K| = p^{n \cdot p^m}$, получим, что точно $p^{n(p^m-1)}$ элементов обладает свойством T_0.

Аналогичным образом доказывается утверждение при $k \neq 0$ (с помощью выбора подходящего сплетения $A \operatorname{wr} \{b^{p^{n-k}}\}$).

Лемма доказана.

Лемма 2.10. *$z^{p^{n-i}} \in \bar{A}_{m-i}$, причем $z^{p^{n-i-1}} \notin \bar{A}_{m-i}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, где группы $\bar{A}_{m-1}$ введены в лемме 2.9.*

Доказательство. Легко проверяется, что элемент $z^{p^{n-i}} = \prod_{j=1}^{p^n} a_j^{p^{n-i}}$ обладает свойством T_{m-i}, и элемент $z^{p^{n-i-1}}$ не обладает этим свойством.

Лемма 2.11. *Пусть $\bar{A}_{m-1} = {}^0\bar{A}_{m-1}$ и пусть*

$$[W, {}^0\bar{A}_{m-1}] = {}^1\bar{A}_{m-1}, \quad [W, {}^{i-1}\bar{A}_{m-1}] = {}^i\bar{A}_{m-1}.$$

Тогда ${}^{s-1}\bar{A}_{m-1} \neq \{e\}$, причем ${}^s\bar{A}_{m-1} = \{e\}$, где $s = n(p^m - p^{m-1})$.

Доказательство. Легко проверяется (по соотношениям (2.3) и (2.4)), что

$${}^i\bar{A}_{m-1} = \varphi({}^{i-1}\bar{A}_{m-1}),$$

где отображение φ является эндоморфизмом группы K (по лемме 2.3).

Ядро этого эндоморфизма группы ${}^{i-1}\bar{A}_{m-1}$ по лемме 2.10 содержит подгруппу порядка p для всех $i=1, 2, \ldots, s-1$, где $s = n(p^m - p^{m-1})$. Так как $|\bar{A}_{m-1}| = p^{n(p^m-p^{m-1})} = p^s$, то $|{}^{s-1}\bar{A}_{m-1}| = p$, а $|{}^s\bar{A}_{m-1}| = 1$. Лемма доказана.

Так как по предыдущей лемме для всех элементов $\bar{a}_{m-1} \in \bar{A}_{m-1} \subset K$ каждый s-ый коммутатор с элементом b равен единице, верно.

Следствие 2.12.

$$\bar{A}_{m-1} \subseteqq Z_{n(p^m - p^{m-1})}.$$

Лемма 2.13. *Пусть* $^*A_k$ *группа, порожденная элементами*

$$^*a_i^{(k)} = a_i \cdot a_{p^k+i} \cdot \ldots \cdot a_{p^m-p^k+i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^k;\ 0 \leqq k \leqq m-1)$$

и

$$^*A_k = {}^*_0A_k, \quad {}^*_1A_k = [W, {}^*_0A_k], \quad {}^*_iA_k = [W, {}_{i-1}^{\ *}A_k].$$

Тогда

$$^*A_k \subseteqq Z_{n\cdot p^k}.$$

Доказательство. Очевидно, что элементы $^*a_i^{(k)}$, $(i=1, 2, \ldots, p^k$, образуют базис группы, введенной в лемме. То по выбору чисел k, $|^*A_k|=p^{k\cdot p^n}$. Аналогично доказательству леммы 2.11 рассмотрим взаимные коммутанты

$$[W, {}^*A_k] = {}^*_1A_k, \quad [W, {}_{i-1}^{\ *}A_k] = {}^*_iA_k.$$

При помощи эндоморфизма φ группы K $(^*A_k \subset K)$ можно получить, что $\varphi^{k\cdot p^n}(^*A_k)=\{e\}$, и таким же образом

$$^*A_k \subseteqq Z_{n\cdot p^k},$$

ведь группы ${}^*_iA_k$ содержат подгруппу центра, по крайней мере порядка p.

Теорема 2.14.

$$\{b^{p^k}\} \subset Z_{s+p^{m-1}-p^k+1},$$

причем

$$\{b^{p^k}\} \subsetneqq Z_{s+p^{m-1}-p^k}, \quad \text{где} \quad 0 \leqq k < m, \quad s = n(p^m - p^{m-1}).$$

Доказательство. По следствию 2.12 и лемме 2.13 легко видеть, что $^*A_{m-1} \cdot \bar{A}_{m-1} \subseteqq Z_s$, ведь $n(p^m - p^{m-1}) \geqq n \cdot p^{m-1}$.

Тогда $\alpha_1^p \in {}^*A_{m-1} \cdot \bar{A}_{m-1}$, потому что при обозначениях $\bar{a}_j = a_j \cdot a^{-1}_{p^{m-1}+j}$ элемент

$$a_1 \cdot a_{p^{m-1}+1} \cdot \ldots \cdot a_{p^m-p^{m-1}+1} \cdot \bar{a}_{p^m-2p^{m-1}+1} \cdot \bar{a}^2_{p^m-3p^{m-1}+2} \cdot \ldots \cdot \bar{a}^{p-1}_{p^m-p^{m-1}+1} = \alpha_1^p$$

содержится в подгруппе $^*A_{m-1} \cdot \bar{A}_{m-1} \subseteqq Z_s$.

С помощью формулы (2.8)

$$\alpha_{p^{m-1}+1} = a_1^{\binom{p^{m-1}}{0}} \cdot a_2^{-\binom{p^{m-1}}{1}} \cdot \ldots \cdot a_{p^{m-1}}^{\binom{p^{m-1}}{p^{m-1}-1}} \cdot a_{p^{m-1}+1}^{-\binom{p^{m-1}}{p^{m-1}}} = \prod_{\nu=1}^{p^{m-1}+1} a_\nu^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{p^{m-1}}}$$

и леммы 2.7 $C^i_{p^{m-1}} \equiv 0 \pmod p$, где $i=1, 2, \ldots, p^{m-1}$, получим, что

$$\alpha_{p^{m-1}+1} \in {}^*A_{m-1} \cdot \bar{A}_{m-1}.$$

Так же $\alpha_{p^{m-1}} \in {}^*A_{m-1} \cdot \bar{A}_{m-1}$, иначе элемент

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{p^{m-1}} = \prod_{\nu=1}^{p^{m-1}} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C^\nu_{p^{m-1}}}$$

содержался бы в $^*A_{m-1} \cdot \bar{A}_{m-1}$, поэтому что $C^\nu_{p^{m-1}} \equiv 0 \pmod p$, если $\nu=1, 2, \ldots, p^{m-1}$. Поэтому из-за

$$[b, a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{p^{m-1}}] = a_1 \cdot a^{-1}_{p^{m-1}+1} \in \bar{A}_{m-1}$$

в подгруппе ${}^*A_{m-1}\cdot\bar{A}_{m-1}$ существовал бы такой элемент $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{p^{m-1}}$, для которого s-ый коммутатор с элементом b не был бы равен единице, что противоречит условию $\bar{A}_{m-1}\subseteqq Z_s$. Тогда

$$\{\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_{p^{m-1}}^p, \alpha_{p^{m-1}+1}, \ldots, \alpha_{p^m}\}\subseteqq {}^*A_{m-1}\cdot\bar{A}_{m-1}\subseteqq Z_s.$$

По определению верхнего центрального ряда легко видеть, что

$$\alpha_{p^{m-1}}\in Z_{s+1},\ \alpha_{p^{m-1}-1}\in Z_{s+2},\ \ldots,\ \alpha_1\in Z_{s+p^{m-1}},$$

и значит $\alpha_2\in Z_{s+p^{m-1}-1}$, следовательно $W=Z_s$. Если $Z_{s+p^{m-1}-k}=W$, но $Z_{s+p^{m-1}-k-1}\neq W$ (при $k\geqq 0$), тогда $\alpha_2\in Z_{s+p^{m-1}-k-1}$, но $\alpha_2\notin Z_{s+p^{m-1}-k-2}$, иначе

$$W_1\subseteqq Z_{s-k-2+p^{m-1}},\quad \text{т. е.}\quad Z_{s+p^{m-1}-k-1}=W.$$

Тогда

$$\alpha_{p^{m-1}+1}\in Z_{s+p^{m-1}-k-p^{m-1}},$$

причем

$$\alpha_{p^{m-1}+1}\notin Z_{s+p^{m-1}-k-p^{m-1}-1}. \tag{2.13}$$

По предыдущему $\alpha_{p^{m-1}+1}\in Z_s$, поэтому ясно, что $s+p^{m-1}-k-p^{m-1}\geqq s$. Отсюда $k\leqq 0$, и значит $k=0$, ведь мы предполагали $k\geqq 0$ и

$$Z_{s+p^{m-1}}=W,\quad \text{причем}\quad Z_{s+p^{m-1}-1}\neq W. \tag{2.14}$$

Переходим к утверждению: если $\{b^{p^k}\}\subset Z_l$, то $[b^{p^k}, c]\in Z_{l-1}$ для всяких $c\in K$. Если $c=a_i$, то $[b^{p^k}, a_i]=a_{i+p^k}^{-1}\cdot a_i\in Z_{l-1}$, поэтому

$$l-1\geqq s+p^{m-1}-p^k,\quad \text{и}\quad l\geqq s+p^{m-1}-p^k+1,$$

ведь из (2.13) легко видеть что

$$\alpha_{p^k+1}\in Z_{s+p^{m-1}-p^k},\quad \alpha_{p^k+1}\notin Z_{s+p^{m-1}-p^k+1}.$$

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 2.14 следует:

Следствие 2.14. Класс нильпотентности группы W равен

$$n(p^m-p^{m-1})+p^{m-1}.$$

По теореме 2.14 при $k=m-1$ мы получили, что $\{b^{p^{m-1}}\}\subset Z_{s+1}$, но $\{b^{p^{m-1}}\}\not\subseteqq Z_s$. Таким же образом, по доказательству теоремы 2.14 имеет место.

Теорема 2.15. *Последний коммутативный член верхнего центрального ряда группы W имеет вид*

$$Z_{n(p^m-p^{m-1})}=\{\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_{p^{m-1}}^p, \alpha_{p^{m-1}+1}, \ldots, \alpha_{p^m}\}$$

и

$$Z_{n(p^m-p^{m-1})+p^{m-1}-p^k+l}=\{b^{p^k}\}\{\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_{p^k+l}^p, \alpha_{p^k+l+1}, \ldots, \alpha_{p^m}\},$$

где

$$1\leqq l\leqq p^{k+1}-p^k\quad \text{и}\quad m-1\geqq k\geqq 0.$$

§ 3

Обозначим через C_l циклическую группу порядка l, и далее также будем пользоваться обозначениями предыдущего параграфа.

1. Пусть $\overline{W}=C_p \operatorname{wr} C_{p^m}$. При $n=1$, согласно результатам предыдущего параграфа, $|\overline{W}|=p^{p^m+m}$, и класс нильпотентности группы $\overline{W}$ равен p^m.

По теореме 2.6
$$\overline{W}_1 = \{\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p^m}\},$$
и элементы α_j, заданные в лемме 2.5, выполняют $\alpha_j \in \overline{W}_{j-1}$ $(j=2, 3, \dots,)$, а центр группы $\overline{W}$ является циклической группой порядка p, порожденной элементом $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{p^m}$.

Из упомянутых результатов, с использованием эндоморфизма, введенного в лемме 2.3, следует.

Теорема 3.1. *В нижнем центральном ряде группы* $\overline{W}$:
$$\overline{W}_0 = \overline{W}, \quad \overline{W}_k = \{\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{p^m}\} \qquad (k=1, 2, \dots, p^m-1), \quad \overline{W}_{p^m} = \{e\}.$$

Согласно теореме 2.15 очевидна

Теорема 3.2. *В верхнем центральном ряде группы* $\overline{W}$:
$$Z_0 = \{e\},$$
$$Z_s = \{\alpha_{p^m-s+1}, \alpha_{p^m-s+2}, \dots, \alpha_{p^m}\} = \overline{W}_{p^m-s}, \quad \text{где} \quad 1 \leqq s \leqq p^m - p^{m-1},$$
$$Z_{p^m-p^k+l} = \{b^{p^k}\}\{\alpha_{p^k-l+1}, \alpha_{p^k-l+2}, \dots, \alpha_{p^m}\} = \{b^{p^k}\}\overline{W}_{p^k-l},$$
где
$$0 < k < m; \quad 1 \leqq l \leqq p^k - p^{k-1},$$
$$Z_{p^m} = \overline{W}.$$

2. Пусть $W' = C_{p^n} \operatorname{wr} C_p$. При $m=1$ справедливы результаты предыдущего параграфа. Значит $|W'|=p^{n\cdot p+1}$, класс нильпотентности группы W' равен $n(p-1)+1$. Нашей целью опять является описание нижнего и верхнего центральных рядов сплетения.

По теореме 2.6 $W_1'=\{\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p\}$, и $|W_1'|=p^{n\cdot(p-1)}$, значит порядок каждой факторгруппы нижнего центрального ряда (кроме первого) равен p.

Лемма 3.3. *В нижнем центральном ряде группы* W'
$$\left.\begin{aligned} W'_{i(p-1)+1} &= \{\alpha_2^{p^i}, \alpha_3^{p^i}, \dots, \alpha_p^{p^i}\}, \\ W'_{i(p-1)+2} &= \{\alpha_2^{p^{i+1}}, \alpha_3^{p^i}, \dots, \alpha_p^{p^i}\}. \end{aligned}\right. \qquad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

Доказательство. По выбору элемента α_{p+1} ясно, что $\alpha_{p+1}=[b, \alpha_p] \in W_p'$, и по соотношению (2.12)
$$\alpha_p = z \cdot \prod_{\nu=1}^{p-1} \alpha_\nu^{(-1)^\nu \cdot C_p^\nu}.$$

Это значит, что

$$[b, \alpha_p] = \prod_{\nu=1}^{p-1} \alpha_{\nu+1}^{(-1)^\nu \cdot C_p^\nu} \in W'_p$$

и

$$[b, [b, \alpha_p]] = \alpha_{p+1} = \prod_{\nu=1}^{p-2} \alpha_{\nu+1}^{(-1)^\nu C_p^\nu} \cdot [b, \alpha_p]^p \in W'_{p+1} \subset W'_p.$$

Очевидно, $\alpha_{p+1}^p \in W'_p$, поэтому $\prod_{i=2}^{p-2} \alpha_{\nu+1}^{(-1)^\nu C_p^\nu} \in W'_p$. По лемме 2.7 $C_p^\nu \equiv 0 \pmod{p}$, но $C_p^\nu \equiv 0 \pmod{p^2}$, где $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$, поэтому

$$\prod_{\nu=1}^{p-2} \alpha_{\nu+2}^{(-1)^\nu C_p^\nu} = \alpha_2^{k_1 \cdot p} \cdot \alpha_3^{k_2 \cdot p} \cdot \ldots \cdot \alpha_p^{k_p \cdot p}$$

для подходящих целых чисел k_j, где $p \nmid k_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Легко проверяется, что элементы $\alpha_3^{k_1 \cdot p} \cdot \alpha_4^{k_2 \cdot p} \cdot \ldots \cdot \alpha_p^{k_{p-2} \cdot p}, \alpha_4^{k_1 \cdot p} \cdot \alpha_5^{k_2 \cdot p} \cdot \ldots \cdot \alpha_p^{k_{p-3} \cdot p}, \ldots, \alpha_{p-1}^{k_1 \cdot p} \cdot \alpha_p^{k_2 \cdot p}, \alpha_p^{k_1 \cdot p}$ также содержатся в подгруппе W'_p, поэтому соотвествующее произведение их степеней, именно элементы $\alpha_2^p, \alpha_3^p, \ldots, \alpha_p^p$, также содержатся в W'_p. По теореме 2.6 легко видеть, что порядок группы W'_p не более чем $p^{(n-1)p-1}$ и значит

$$W'_p = \{\alpha_2^p, \alpha_3^p, \ldots, \alpha_p^p\},$$

$\alpha_2^p \in W'_{p+1}$, иначе $W'_p = W'_{p+1}$, но из-за $\alpha_2^p \in W'_p$ ясно, что $\alpha_3^p \in W'_{p+1}$.

Из рассуждений подобных предыдущим, следует, что из-за $\alpha_2^p \in W'_p$, имеет место $\alpha_p^p \in W'_{2(p-1)}$ и с помощью соотношения (2.12) получим что

$$\prod_{\nu=1}^{p-2} \alpha_{\nu+1}^{(-1)^\nu C_p^\nu \cdot p} \in W'_{2p-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p-1),$$

наконец,

$$W'_{2(p-1)+2} = \{\alpha_2^{p^2}, \alpha_3^{p^2}, \ldots, \alpha_p^{p^2}\}.$$

Тогда $\alpha_2^{p^2} \in W'_{p+1}$, и отсюда следует

$$W'_{p+1} = \{\alpha_2^{p^2}, \alpha_3^p, \ldots, \alpha_p^p\}.$$

Значит при $i=1$ утверждение верно.

Предположим, что оно доказано для всех натуральных чисел $1 \leqq i < n$, то есть

$$W'_{(i-1)(p-1)+1} = \{\alpha_2^{p^{i-1}}, \alpha_3^{p^{i-1}}, \ldots, \alpha_p^{p^{i-1}}\},$$

$$W'_{(i-1)(p-1)+2} = \{\alpha_2^{p^i}, \alpha_3^{p^{i-1}}, \ldots, \alpha_p^{p^{i-1}}\}.$$

Так как, по предположению

$$\alpha_2^{p^{i-1}} \in W'_{(i-1)(p-1)+1}, \quad \text{то} \quad \alpha_p^{p^{i-1}} \in W'_{i(p-1)},$$

и. т. д. Аналогичным образом получим

$$\{\alpha_2^{p^i}, \alpha_3^{p^i}, \ldots, \alpha_p^{p^i}\} = W'_{i(p-1)+1}.$$

$\alpha_2^{p^i} \in W'_{i(p-1)+2}$, иначе было бы $W'_{i(p-1)+2} = W'_{i(p-1)+1}$, и подобно предыдущему, продолжая доказательство,

$$\alpha_2^{p^{i+1}} \in W'_{i(p-1)+1}.$$

Но порядок группы $W'_{i(p-1)+2}$ не более чем $p^{(n-i)(p-1)-1}$, поэтому

$$W'_{i(p-1)+2} = \{\alpha_2^{p^{i+1}}, \alpha_3^{p^i}, \dots, \alpha_p^{p^i}\} \quad 1 \leq i \leq n,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.4. *В нижнем центральном ряде группы* W'

а) $W'_0 = W' = \{b\}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$,

б) $W'_{k(p-1)+1} = \{\alpha_2^{p^k}, \alpha_3^{p^k}, \dots, \alpha_p^{p^k}\}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n,$

в) $W'_{k(p-1)+2} = \{\alpha_2^{p^{k+1}}, \alpha_3^{p^k}, \dots, \alpha_p^{p^k}\}$,

г) $W'_{k(p-1)+l} = \{\alpha_2^{p^{k+1}}, \alpha_3^{p^{k+1}}, \dots, \alpha_l^{p^{k+1}}, \alpha_{l+1}^{p^k}, \dots, \alpha_p^{p^k}\}$,

где, в случае в) и г), $k=0, 1, 2, \dots, n-1; l=3, 4, \dots, p-1$.

Доказательство. Утверждение б) и в) верны по лемме 3.3, а утверждение а) очевидно по определнию сплетения.

Так как $W'_{k(p-1)+l} \subset K$, и

$$[W', W'_{k\,(p-1)+l}] = [b, W'_{k\,(p-1)+l}] = W'_{k\,(p-1)+l+1},$$

то по теореме 2.6 группу $W'_{k(p-1)+l+1}$ порождают элементы вида $[b, \alpha_i^k]$, где $\alpha_i^k \in W'_{k(p-1)+l}$ и $2 \leq i < p-1$. Таким образом, утверждение г) тоже легко проверяется.

Лемма 3.5. *В верхнем центральном ряде группы*

$$|Z_1/Z_0| = p^n, \quad |Z_{n(p-1)+1}/Z_{n(p-1)}| = p^2,$$

а порядок остальных факторгрупп в центральном ряде равен p.

Доказательство. $|Z_1/Z_0| = p^n$ очевидно по теореме 2.2.

Если была бы по крайней мере одна факторгруппа в верхнем центральном ряде порядка p^3, тогда класс нильпотентности группы W' был бы не более чем $n(p-1)$.

По лемме 2.13, элемент b, содержится в группе $Z_{n(p-1)+1}$, но не содержится в $Z_{n(p-1)}$. По теореме 2.15 $\alpha_1 \in Z_{n(p-1)+1}$, но $\alpha_1 \notin Z_{n(p-1)}$, и легко проверяется что $b^i \alpha_1^j \notin Z_{n(p-1)}$, где $p \nmid i$ и $p \nmid j$ (i и j натуральные), то возможно только

$$|Z_{n(p-1)+1}/Z_{n(p-1)}| = p^2.$$

Лемма доказана.

Теорема 3.6. *В верхнем центральном ряде группы* W'

а) $Z_1 = \{z\}$,

б) $Z_{k(p-1)+1} = \{z, \alpha_2^{p^{n-k}}, \dots, \alpha_{p-1}^{p^{n-k}}, \alpha_p^{p^{n-k}}\} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$,

в) $Z_{k(p-1)+l} = \{z, \alpha_2^{p^{n-k}}, \dots, \alpha_{p-l}^{p^{n-k}}, \alpha_{p-l+1}^{p^{n-k-1}}, \dots, \alpha_{p-1}^{p^{n-k-1}}, \alpha_p^{p^{n-k-1}}\}$,

где $k = 0, 1, \dots, n-1$; $l = 2, 3, \dots, p-1$,

г) $Z_{n(p-1)+1} = W'$.

Доказательство. Утверждение а) (по теореме 2.2) и г) очевидно. По связи верхнего и нижнего центрального ряда конечных нильпотентных групп и по теореме 3.4

$$Z_{k(p-1)+1} \supseteqq W'_{(n-k)(p-1)} = W'_{(n-k-1)(p-1)+p-1} = \{\alpha_2^{p^{n-k}}, \dots, \alpha_{p-1}^{p^{n-k}}, \alpha_p^{p^{n-k-1}}\}.$$

Так же очевидно, что

$$Z_1 \subset Z_{k(p-1)+1},$$

т. е. группа

$$R = \{z, \alpha_2^{p^{n-k}}, \alpha_3^{p^{n-k}}, \dots, \alpha_{p-1}^{p^{n-k}}, \alpha_p^{p^{n-k-1}}\} \subseteqq Z_{k(p-1)+1}.$$

По лемме 2.8

$$z = \prod_{\nu=1}^{p} \alpha_i^{(-1)^i \cdot C_p^i},$$

и значит

$$z \in \{\alpha_1^p, \alpha_2^p, \dots, \alpha_{p-1}^p, \alpha_p\}, \quad \text{причем} \quad z \notin \{\alpha_1^p, \alpha_2^p, \dots, \alpha_{p-1}^p, \alpha_p^p\}.$$

Тогда

$$z^{p^i} \in \{\alpha_1^{p^{i+1}}, \alpha_2^{p^{i+1}}, \dots, \alpha_{p-1}^{p^{i+1}}, \alpha_p^{p^i}\},$$

причем

$$z^{p^i} \notin \{\alpha_1^{p^{i+1}}, \alpha_2^{p^{i+1}}, \dots, \alpha_{p-1}^{p^{i+1}}, \alpha_p^{p^{i+1}}\}.$$

С помощью леммы 2.8 можно убедиться, что элемент z^i, $i \not\equiv 0 \pmod{p^n}$, не может быть записан в виде произведения степеней элементов

$$\alpha_1^{p^{n-k}}, \alpha_2^{p^{n-k}}, \dots, \alpha_{p-1}^{p^{n-k}}, \alpha_p^{p^{n-k-1}}, \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \dots, p^{n-2}.$$

Так же верно, что

$$|R| = p^{n-1} \cdot p^{k(p-1)} \cdot p^{k+1} = p^{k(p-1)+1}.$$

По лемме 2.3 имеем, что

$$|Z_{k(p-1)+1}| = |R|,$$

т. е.

$$Z_{k(p-1)+1} = \{z, \alpha_2^{p^{n-k}}, \dots, \alpha_{p-l}^{p^{n-k}}, \alpha_{p-l+1}^{p^{n-k}}, \dots, \alpha_p^{p^{n-k}}\} \subseteqq Z_{k(p-1)+l},$$

значит утверждение б) верно.

Если

$$\bar{R} = \{z, \alpha_2^{p^{n-k}}, \dots, \alpha_{p-l}^{p^{n-k}}, \alpha_{p-l+1}^{p^{n-k-1}}, \dots, \alpha_p^{p^{n-k-1}}\},$$

то

$$|\bar{R}| = p^{n-k(p-1)-l+1},$$

и значит

$$Z_{k(p-1)+l} = \bar{R} \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1;\ l = 2, 3 \dots, p-1).$$

Теорема доказана.

Литература

[1] К. Бузаши, Ядра неприводимых представлений силовской р-подгруппы S_3 симметрической группы S_{p^3}. *Publ. Math.* **14** (1967), 285—310.

[2] К. Бузаши, Ядра неприводимых представлений силовской р-подгруппы S_n симмет рической группы S_{p^n}. *Publ. Math.* **16** (1969), 199—227.

[3] L. Kaloujnine, Sur les p-groupes de Sylow du groupe symetrique du groupe symetrique du degree p^m. *C. R. Acad. Sci. Paris* **221** (1945), 222—224.

[4] L. Kaloujnine, La structure du p-groupe de Sylow du groupe symetrique du degree p^k. *C. R. Acad. Sci. Paris* **222** (1946), 1424—1425.

[5] A. I. Weir, The Sylow subgroups of the symmetric groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 534—541.

[6] Gy. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen. *Acta Math.* **68** (1937), 145—254.

[7] H. Liebeck, Concerning nilpotent wreath products. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **58** (1962), 443—453.

[8] I. D. P. Meldrum, Central series in wreath products. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **6** (1967), 551—567.

(Поступила: 8. I. 1974)