Die wissenschaftliche Tätigkeit von Andor Kertész

Von L. RÉDEI, O. STEINFELD und R. WIEGANDT (Budapest)

Ein Nekrolog von Professor ANDOR KERTÉSZ ist im Band 21 dieser Zeitschrift erschienen. Im folgenden wollen wir seine mathematischen Verdienste würdigen.*)

Die wissenschaftliche Tätigkeit von Andor Kertész dürfen wir vielleicht am trefflichsten in der Bestrebung nach dem Auffinden von algebraischen Struktursätzen großer Allgemeinheit bezeichnen. Nur verhältnismäßig wenige, jedoch bedeutende Forschungen von ihm sind anderen Fragen gewidmet. Seine frühesten Untersuchungen betreffen die Theorie der abelschen Gruppen; später führte er Untersuchungen in der Modultheorie, und im letzten Jahrzehnt seines Lebens arbeitete er hauptsächlich in der Ringtheorie. Ferner hat er auch in der Mengen- und Verbandstheorie mit Erfolg geforscht; seine Ergebnisse dieser Art sind eng mit seinen strukturtheoretischen Untersuchungen verbunden. Einige seiner Forschungen betreffen die Theorie der topologischen Algebra, die der Gruppoide, die Geometrie und die Geschichte der Mathematik. Im folgenden schildern wir seine bedeutendsten Forschungresultate.

1. Um Zerlegungssätze für abelsche Gruppen zu gewinnen, hat Kertész den Begriff der Hauptsysteme eingeführt [3]. Eine Teilmenge S einer abelschen Gruppe G wird unabhängig genannt, wenn für endliche Teilmengen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von S aus $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = 0$ stets $r_1 a_1 = \ldots = r_n a_n = 0$ ($r_1, \ldots, r_n$ ganze Zahlen) folgt. Eine maximale unabhängige Menge P nennt Kertész ein Hauptsystem der Gruppe G, wenn man kein Element von P gegen ein Element größerer Höhe von G ohne Verletzung der Unabhängigkeit austauschen kann. Ein Element a einer abelschen p-Gruppe G ist von äußerer unendlicher Höhe, wenn a von unendlicher Höhe ist, und es eine natürliche Zahl t derart gibt, daß die Gleichung $p^t x = a$ nur Lösungen von unendlicher Höhe besitzt. Nun hat Kertész folgendes Kriterium bewiesen [5]: eine abelsche p-Gruppe G läßt sich dann und nur dann in eine direkte Summe zyklischer und quasizyklischer Gruppen zerlegen, wenn G kein Element von äußerer unendlicher Höhe besitzt, und wenn es ein Hauptsystem in G gibt. Aus diesem Satz lassen sich die Prüferschen und Kulikovschen Zerlegungssätze als Spezialfälle ableiten. Ein geeignete Verallgemeinerung dieses Satzes enthält auch das von DIEUDONNÉ stammende Kriterium für direkte Zerlegungen abelscher Gruppen als Spezialfall [6].

*) Hierüber hat R. WIEGANDT an einer wissenschaftlichen Sitzung in Budapest am 15 Dezember 1975 einen Vortrag gehalten.

In [20] hat er mit T. Szele den Kulikovschen Zerlegungssatz für Moduln über p-adischen ganzen Zahlen verallgemeinert.

In einer Reihe von Arbeiten [2], [7], [8], [10], [16] hat er mit L. Fuchs und T. Szele diejenigen abelschen Gruppen gekennzeichnet, deren gewisse Untergruppen gewissen Bedingungen genügen. Schon seine erste Arbeit [1] war einer solchen Frage gewidmet; er hat nämlich in [1] diejenigen Gruppen bestimmt, deren sämtliche Untergruppen direkte Summanden sind. Diese Gruppen sind immer abelsch und sind genau die direkten Summen von elementaren p-Gruppen. Der Zweck dieser und weiterer Untersuchungen war es das Strukturproblem für verschiedene Klassen abelscher Gruppen zu lösen, und das gelang unter den in den Titeln der Arbeiten [2], [7], [10], [16] und [23] genannten Bedingungen. Eine Dualität für Gruppen wurde in [8] folgenderweise definiert: für Gruppen G und H seien $S(G)$ und $F(H)$ die Menge der Untergruppen von G bzw. die der homomorphen Bilder von H (isomorphe Gruppen sind als nicht verschiedene betrachtet). G heißt $F-S$ dual zu H, falls $F(G)=S(H)$ gilt, ferner heißt G selbstdual, wenn $F(G)=\mathrm{S}=(G)$ gilt. In der Arbeit [8] wurde die Struktur der abzählbaren selbstdualen bzw. $F-S$ dualen Gruppen gegeben. Duale Eigenschaften der teilbaren und freien abelschen Gruppen wurden in [11] untersucht.

Zwar hat sich Kertész in den späteren Jahren hauptsächlich mit anderen Gebieten der Algebra beschäftigt, jedoch interessierte er sich auch dann noch für abelsche Gruppen. Eine seiner letzten Veröffentlichungen ist die mit L. Kovács und B. H. Neumann geschriebene Arbeit [65] über Servanzuntergruppen abelscher Gruppen.

2. In der zweiten Periode seiner wissenschaftlichen Tätigkeit hat Kertész modultheoretische Forschungen geführt. Als er seine modultheoretischen Arbeiten schrieb, waren die homologischen Methoden noch nicht so weit entwickelt und angewandt wie heute. Kertész hat sine Ergebnisse mit klassischen abstrakt algebraischen Methoden erreicht. Er ist von der Theorie der abelschen Gruppen zur Modultheorie gekommen, und hat Moduln als Verallgemeinerungen der abelschen Gruppen aufgefaßt. Diese Verallgemeinerung ist aber keinesfalls formal; modultheoretische Untersuchungen hängen mit der Ringtheorie immer zusammen, und dienen auch zur Beschreibung der Struktur des Ringes der Operatoren.

In den meisten modultheoretischen Untersuchungen wird vorausgesetzt, daß der Operatorenbereich ein Ring mit Einselement ist. In den Arbeiten [30] und [39] hat Kertész gezeigt, daß diese Voraussetzung (auch für Multimoduln) aufhebbar ist, indem man den Operatorenbereich passend zu einem solchen mit Einselement erweitert so, daß dann jeder Modul in eine direkte Summe eines trivialen und eines unitären Untermoduls übergeht.

In den Arbeiten [19], [22] und [25] hat er diejenigen Moduln gekennzeichnet, die als eine direkte Summe von endlich vielen einfachen Moduln darstellbar sind. Diese Moduln nennt er vollständing reduzibel. Eine Teilmenge S von Elementen eines R-Moduls G wird unabhängig genannt, falls für jede endliche Teilmenge $\{g_1, \ldots, g_k\}$ von S aus dem Bestehen einer Relation von der Form $\sum_{i=1}^{k} (r_i g_i + n_i g_i) = 0$ ($r_1, \ldots, r_k \in R$, $n_1, \ldots, n_k$ ganze Zahlen) stets $r_1 g_1 + n_1 g_1 = \ldots = r_k g_k + n_k g_k = 0$ folgt. Ein Untermodul H von G heißt Servanzuntermodul in G, wenn aus der Lösbarkeit eines Gleichungssystems $r_\nu x + n_\nu x = h_\nu$ ($r_\nu \in R$, $h_\nu \in H$, n_ν ganze Zahlen) in G stets auch die Lösbarkeit in H folgt. Nun sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) G ist vollständig reduzibel;

b) es existiert in G eine Menge von maximalen Untermoduln, deren Durchschnitt 0 ist;

c) das annullierende Linksideal jedes Elementes ($\neq 0$) in G ist der Durchschnitt endlich vieler maximaler Linksideale von R;

d) jeder Untermodul von G ist ein Servanzuntermodul in G;

e) jede maximale unabhängige Menge von Elementen in G ist eine Basis für G.

Kertész hat sehr bedeutende Ergebnisse in der allgemeinen Theorie linearer Gleichungssysteme erreicht ([15], [17], [26], [27]). Seine Resultate sind wesentliche Verallgemeinerungen der klassichen Theorie der Gleichungssysteme über Schiefkörpern. Er hat kompatible Gleichungssysteme über einem beliebigen R-Modul G „koordinatenfrei definiert: ein kompatibles Gleichungssystem $[M, \varphi]$ (mit $\mathfrak{m}$ Unbekannten) über G ist eine homomorphe Abbildung φ eines Untermoduls M des freien R-Moduls $R(\mathfrak{m})$ in G. Ein R-Modul A heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes kompatible Gleichungssystem mit einer Unbekannten über A in A lösbar ist. In einem algebraisch abgeschlossenen R-Modul A ist jedes kompatible Gleichungssystem beliebig vieler Unbekannter lösbar, ferner ist ein Untermodul H von G dann und nur dann ein direkter Summand von G, falls H ein Servanzuntermodul von G ist. Dementsprechend ist ein Ring R dann und nur dann ein halbeinfacher artinscher Ring, falls für jeden R-Modul eine direkte Zerlegung $G=G_0+H$ gilt, wo G_0 der triviale Untermodul von G und H ein algebraisch abgeschlossener R-Modul ist. Die letzte Behauptung bedeutet im Fall $G=\mathrm{R}$ folgendes: ein Ring R ist dann und nur dann ein halbeinfacher artinscher Ring, wenn jedes kompatible Gleichungssystem über R eine Lösung in R hat. Dies bedeutet, daß die halbeinfachen artinschen Ringe gerade diejenigen Ringe sind, in denen sich die klassische Theorie der linearen Gleichungssysteme ausbauen läßt. In [38] hat er die injektiven Moduln durch kompatible Gleichungssysteme gekennzeichnet.

In seiner Arbeit [42] hat Kertész eine allgemeinen Rangbegriff für unitäre R-Moduln folgenderweise eingeführt. Für ein Element g eines R-Moduls G bezeichne $O(G)$ das Linksideal aller Elemente $r\in R$ mit $rg=0$. $O(G)$ heißt die Ordnung von g. Ein Modul $G\neq 0$ ist von Rang 1, falls jede Teilmenge von mindestens zwei Elementen von G abhängig ist. Nun nennt Kertész g ein Hauptelement von G, wenn Rg von Rang 1 ist und die von 0 verschiedenen Elemente des Untermoduls Rg von gleicher Ordnung sind. Ist S eine maximale unabhängige Teilmenge von Hauptelementen von G und das Linksideal $P(\subseteqq R)$ die gemeinsame Ordnung einiger Hauptelemente von G, so ist die Anzahl der Elemente von der Ordnung P in G von der Wahl von S unabhängig. Diese invariante Mächtigkeit ist der P-Rang des Moduls G. Er bewies auch, daß für einen beliebigen Modul H der 0-Rang eines Obermoduls G von H die Summe der 0-Ränge von H und G/H ist.

3. Es war naheliegend, daß Kertész seine Untersuchungen später in der Ringtheorie fortgesetzt hat. Er hat in [14], [25], [28] und [60] weitere Charakterisierungen der halbeinfachen artinschen Ringe gegeben. Ein Ring R ist dann und nur dann halbeinfach und artinsch, wenn er ein Rechtseinselement besitzt und eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

a) es gibt endlich viele maximale Linksideale von R deren Durchschnitt gleich 0 ist;

b) der Linksannullator eines beliebigen Elementes $\neq 0$ von R ist der Durchschnitt von endlich vielen maximalen Linksidealen von R;

c) jedes Linksideal von R ist ein Servanzuntermodul von R;

d) jedes maximale unabhängige Elementensystem von R^+ ist eine Basis für R^+ über R.

Zwei weitere Charakterisierungen, wobei man die Existenz eines Rechtseinselementes nicht zu fordern braucht, sind die folgenden:

e) es gibt endlich viele modulare maximale Linksideale in R deren Durchschnitt gleich 0 ist;

f) es gibt endlich viele quasimodulare maximale Linksideale in R, deren Durchschnitt gleich 0 ist.

(Ein Linksideal L wird bekanntlich modular genannt, wenn es in dem Ring ein Rechtseinselement modulo L gibt, ferner heißt ein Linksideal L eines Ringes R quasimodular, wenn es für jedes $x \notin L$ ein $y \in R$ gibt, so daß $xy \notin L$ gilt.) In [35] hat er mit O. STEINFELD einen direkten Beweis der Links—Rechts-Symmetrie der halbeinfachen artinschen Ringe gegeben. In [43] wurde ein neuer Beweis der Spaltbarkeit der artinschen Ringe gegeben, und in [45] hat er den Litoffschen Satz von dem Dichtesatz von JACOBSON abgeleitet.

Kertész hat einen Radikalbegriff für Moduln in [29] und [59] eingeführt, welcher ein modultheoretisches Analogon des Jacobsonschen Radikals eines Ringes ist. Die Gesamtheit derjenigen Elemente $x \in G$, für welche Rx in jedem maximalen Untermodul von G enthalten ist, wurde das Radikal $R(G)$ des Moduls G genannt. Bezeichne $\Phi(G)$ die Menge aller derjenigen Elemente x von G, für welche mit beliebigem $r \in R$ das Element rx aus jedem Erzeugendensystem von G gestrichen werden kann. Ist G kein Radikalmodul (d. h. $G \neq R(G)$), dann gilt $R(G) \neq \Phi(G)$. Im Fall $G = R$ stellt aber $R(G)$ im allgemeinen nicht das Jacobsonsche Radikal des Ringes dar. Doch stimmt das Jacobsonsche Radikal des Ringes R immer mit $\Phi(R)$ überein [40], und das Jacobsonsche Radikal eines Ringes ist genau der Durchschnitt aller maximalen quasimodularer Linksideale [45].

In drei Arbeiten hat er den Zusammenhang zwischen artinschen und noetherschen Ringe untersucht. Ein artinscher (noetherscher) Ring R besitzt dann und nur dann ein Rechtseinselement, wenn für jedes $r \in R$ die Gleichung $rx = r$ in R lösbar ist [47]. In [53] und mit DINH VAN HUYNH in [63] hat er zwei notwendige und hinreichende Bedingungen dafür bewiesen, daß ein noetherscher Ring artinsch sei; das Ergebniß im [53] is eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von AKIZUKI.

In der mit A. WIDIGER geschriebenen Arbeit [49] sind sämtliche artinsche Ringe mit artinschem Radikal durch Invarianten bezhrieben. In der Literatur ist diese Arbeit die erste, in welcher Struktursätze gleichzeitig für radikalfreie, bzw. Radikalringe und ebenso für Ringe die weder radikalfrei, noch Radikalringe sind, gewonnen wurden. Jeder artinsche Ring mit artinschem Radikal ist die direkte Summe endlich vieler voller Martizenringe über unendlichen Schiefkörpern und endlich vieler zu verschiedenen Primzahlen gehöriger p_i-Ringe $A(p_i)$, wobei jeder Ring $A(p_i)$ der Minimalbedingung bezüglich der additiven Untergruppen genügt, und sich durch einen endlichen p_i-Ring und eine natürliche Zahl kennzeichnen. läßt. Mit O. Steinfeld [62] hat er die Struktur der Z-Ringe untersucht. Ein Ring R heißt ein Z-Ring, falls jedes Element $a \in R$ mit $a^2 = 0$ mit jedem Idempotent von R vertauschbar ist. Ein regulärer Ring R ($\neq 0$) kann dann und nur dann als eine subdirekte Summe von Schiefkörpern dargestellt werden, wenn R ein Z-Ring ist. Ferner kann jeder reguläre Z-Ring als Ideal in einen regulären Z-Ring mit Einselement eingebettet werden.

Sein sehr sorgfältig geschriebenes Buch „Vorlesungen über artinsche Ringe" war die erste deutschsprachige Monographie über artinsche Ringe. Eine englische Ausgabe des Buches mit wesentlichen Änderungen und Ergänzungen wird demnächst erscheinen.

4. Die erwähnten Unabhängigkeitsbegriffe für abelsche Gruppen und Moduln führten Kertész zu der Einführung und Untersuchung eines abstrakten Unabhängigkeitsbegriffes [36]. Es sei S eine beliebige Menge und $D[x, A]$ sei eine Relation zwischen Elementen x und Untermengen A der Menge S. Besteht für ein $x \in S$ und eine Untermenge A von S die Relation $D[x, A]$ nicht, so wird dieser Sachverhalt durch $\bar{D}[x, A]$ ausgedrückt. Genüge S und die Relation $D[x, A]$ den folgenden Bedingungen:

I. ist $A \subseteq S$ und $x \in A$, so gilt $D[x, A]$;

II. gilt für $x \in S$ und $A \subseteq S$ $D[x, A]$ mit $\bar{D}[x, A \setminus a]$ $(a \in A)$, so gilt $D[a, (A \setminus a) \cup x]$;

III. gilt für $x \in S$ und $A, B \subseteq S$ $D[x, A]$ und gilt $D[a, B]$ für jedes Element $a \in A$, so gilt auch $D[x, B]$;

IV. gilt $D[x, A]$ $(x \in S, A \subseteq S)$, so gibt es eine endliche Teilmenge A' von A so, daß $D[x, A']$ gilt.

Die Mengen $A, B \subseteq S$ heissen D-äquivalent, wenn die Relationen $D[a, B]$ und $D[b, A]$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ bestehen. Eine Untermenge $A \subseteq S$ heißt D-unabhängig, wenn für jedes $a \in A$ $\bar{D}[a, A \setminus a]$ besteht. Kertész hat bewiesen, daß D-äquivalente D-unabhängige Untermengen von S gleichmächtig sind. Als Anwendungen dieses Satzes ergeben sich z. B. die bekannten Resultate, daß je zwei Basen eines Vektorraumes, bzw. je zwei algebraisch äquivalente und unabhängige Untermengen eines Schiefkörpers, bzw. die Anzahl der Komponenten von je zweier diskreten direkten Zerlegungen einer Ω-Gruppe in einfache Ω-Gruppen gleichmächtig sind.

In der Arbeit [33] hat er einen einfachen Beweis für die Gleichmächtigkeit der algebraisch äquivalenten unabhängigen Untermengen einer Körpererweiterung gegeben, wobei er statt des Zornschen Lemmas oder des Wohlordnungssatzes nur die Gleichung $\mathfrak{m}\aleph_0 = \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m}$ eine unendliche Mächtigkeit) benutzt hat. In der mit A. Hajnal geschriebenen Arbeit [55] wurde gezeigt, daß in der ZF-Mengenlehre das Auswahlaxiom und die Bedingung „auf jeder nichtleeren Menge kann ein Gruppoid mit beiderseitiger Kürzungsregel aufgebaut werden" äquivalent sind.

Alle diese Betrachtungen mit vielen anderen Anwendungen des Auswahlaxioms (oder seiner Äquivalente) bilden den Stoff seines Buches „Einführung in die transfinite Algebra".

Die Untersuchung der abstrakten Unabhängigkeit und die Absicht, allgemeine Struktursätze zu gewinnen, führten Kertész zu verbandstheoretischen Forschungen. In [46] und [48] hat er die relativ atomaren, kompakt erzeugten, modularen Verbände gekennzeichnet, insbesondere auch diejenigen, in denen das größte Element eine direkte Summe von Atomen ist. Untersuchungen mit ähnlicher Motivierung, aber in einer umfangreicheren Verbandsklasse wurden mit M. Stern in [58] und [61] durchgeführt. In dieser Arbeiten haben sie statt Modularität die allgemeineren Bedingungen

$$a < b \leqq a \cup p \Rightarrow b = a \cup p$$

und

$$m \cap a \leqq b < a \Rightarrow b = a \cap m$$

(a, b beliebige Elemente, p Atom, m duales Atom) gefordert. Zwar sind diese Untersuchungen rein verbandstheoretisch und beantworten wichtige Fragen der Verbandstheorie, jedoch ist das Ziel, anwendbare allgemeine Struktursätze zu gewinnen, erkannbar.

Kertész hat auch erfolgreiche Forschungen in der Theorie der Gruppoide (Untersuchungen mit A. Sade über Nuclei in Gruppoiden [34]), in der topologischen Algebra (Einführung nicht-diskreter Topologie in abelschen Gruppen mit T. Szele [12]), und in der Geometrie (elementarer Beweis der Existenz der normalen Transversalen mit T. Szele [4]) durchgeführt. Jahrelang hat er auch in der Geschichte der Mathematik geforscht ([50], [51], [57]); einem Auftrag der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina folgend wollte er eine Monographie über Cantors Lebenswerk schreiben, hat ein unvollendetes Manuskript darüber hinterlassen. In der Arbeit [21] würdigte er die wissenschaftliche Tätigkeit seines von ihm hochverehrten und geliebten Lehrers Tibor Szele; auch schrieb er im Jahr 1969 anläßlich des 50. Geburtstages des letzteren eine Gedenkschrift [52], die bisher nicht veröffentlicht wurde.

Bücher

1. Vorlesungen über artinsche Ringe, Akadémiai Kiadó, 1968.
2. Rings, Modules and Radicals, Coll. Math. Soc. János Bolyai, 6. (Editor: A. Kertész), North-Holland, 1973.
3. Einführung in die transfinite Algebra, Akadémiai Kiadó, 1975.
4. Georg Cantor, Leopoldina Halle *(in Vorbereitung)*.
5. Lectures on artinian rings, Akadémiai Kiadó *(in Vorbereitung)*.

Arbeiten

1. On groups every subgroup of which is a direct summand, *Publ. Math. (Debrecen)*, **2** (1951), 74—75.
2. On abelian groups every multiple of which is a direct summand, *Acta Sci. Math.* **14** (1952), 157—166, (mit T. Szele).

3a. On the decomposibility of abelian p-groups into the direct sum of cyclic groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 121—126.

3b. Abel-féle p-csoportok felbonthatósága ciklikus csoportok direkt összegére, *MTA III. Oszt. Közl.* **5** (1955), 69.

4. On the smallest distance of two lines in 3-spaces, *Publ. Math. (Debrecen)*, **2** (1952), 308—309 (mit T. Szele).

5a. On fully decomposable abelian torsion groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 225—232.

5b. Teljesen reducibilis Abel-féle torziócsoportok, *MTA III. Oszt. Közl.* **5** (1955), 70.

6. On a theorem of Kulikov and Dieudonné, *Acta Sci. Math.* **15** (1953), 61—69.

7a. Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image, *Acta Sci. Math.* **15** (1953), 70—76. (mit T. Szele).

7b. Azokról az Abel-féle csoportokról, amelyekben minden végesen generált részcsoport endomorf kép, *Mat. Lapok* **7** (1956), 341 (mit T. Szele).

8. On a special kind of duality in group theory I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953), 169—178 (mit L. Fuchs und T. Szele).

9. Abel-féle torziócsoportok, *MTA III. Oszt. Közl.* **4** (1954), 111—126.
10. Abelian groups in which every serving subgroup is a derict summand, *Publ. Math. (Debrecen)*, **3** (1953), 95—105, Errata *ibidem*, (mit L. Fuchs und T. Szele).
11a. On subgroups and homomorphic images, *Publ. Math. (Debrecen)*, **3** (1953), 174—179.
11b. Algebrailag zárt és szabad csoportok, *MTA III. Oszt. Közl.* **4** (1954), 229—236.
12. On the existence of non-discrete topologies in infinite abelian groups, *Publ. Math. (Debrecen)*, **3** (1953), 187—189, (mit T. Szele).
13a. Operátormodulusok és féligegyszerű gyűrűk, *Dissertation* für den Grad Kandidat der Wissenschaften, Debrecen, 1954.
13b. Operátormodulusok és féligegyszerű gyűrűk, Thesen für den Grad Kandidat der Wissenschaften, Budapest, 1954.
14. A féligegyszerű gyűrűk egy új jellemzése, *Acta Univ. Debrecen*, **1** (1954), 151—153.
15a. On arbitrary systems of linear equations over semi-simple rings, *Bull. Acad. Polon. Sci., cl. III.*, **3** (1955), 73—74.
15b. О произвольных системах линейых уравнений в полупростых кольцах, *Бюлл. Польской Акад. Наук отд. III.* **3** (1955), 73—74.
16. On abelian groups whose subgroups are endomorphic images, *Acta Sci. Math.* **16** (1955), 77—88 (mit L. Fuchs und T. Szele).
17. The general theory of linear equation systems over semi-simple rings, *Publ. Math. (Debrecen)*, **4** (1955), 79—86.
18. Féligegyszerű gyűrűk, mint operátortartományok, *MTA III. Oszt. Közl.* **5** (1955), 149—186.
19. Modules and semi-simple rings I, *Publ. Math. (Debrecen)*, **3** (1954), 289—296.
20. Az általánosított *p*-csoportok elméletéhez, *Acta Univ. Debrecen* **2** (1955), 131—135, (mit T. Szele).
21. Tibor Szele and his mathematical life-work, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 115—125.
22. Modules and semi-simple rings II, *Publ. Math. (Debrecen)*, **4** (1956), 229—236.
23. On abelian groups in which every homomorphic image can be imbedded, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1957), 467—475. (mit L. Fuchs und T. Szele).
24a. Az operátormodulusok általános elméletéhez, *Dissertation* für den Grad Doktor der Wissenschaften, Debrecen, 1957.
24b. Az operátormodulusok általános elméletéhez, *Thesen* für den Grad Doktor der Wissenschaften, Budapest, 1957.
25. Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), 235—257.
26. Über die allgemeine Theorie linearer Gleichungssysteme, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Romania*, **1** (1957), 303—307.
27. Systems of equations over modules, *Acta Sci. Math.* **18** (1957), 207—234. Correction: *ibidem*, **19** (1958), 251—252.
28. Eine Charakterisierung der halbeinfachen Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), 343—344.
29. Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében, I., II., III., *MTA III. Oszt. Közl.* **8** (1958), 411—436; **9** (1959), 15—50; und **9** (1959), 105—120.
30. A remark on the general theory of modules, *Publ. Math. (Debrecen)*, **6** (1959), 86—89.

31. A féligegyszerű gyűrűk jellemzéséről, *MTA III. Oszt. Közl.* **9** (1959), 301—314. (mit O. Steinfeld).
32. On radical-free rings of endomorphisms, *Acta Univ. Debrecen,* **5** (1958), 159—161.
33. Simple proof of a fundamental theorem of field theory, *Amer. Math. Monthly,* **66** (1959), 804.
34. On nuclei of groupoids, *Publ. Math.* (Debrecen), **6** (1959), 214—233, (mit A. Sade).
35. On the symmetry of semisimple rings, *Amer. Math. Monthly,* **67** (1960), 450—452, (mit O. Steinfeld).
36. On independent sets of elements in algebra, *Acta Sci. Math.* **21** (1960), 260—269.
37. Egyszerű bizonyítás Steinitz egy tételére, *Mat. Lapok,* **12** (1961), 33—37.
38. Eine kennzeichende Eigenschaft der injektiven Moduln, *Wiss. Z. Univ. Halle, Math.-Nat. R.* **11** (1962), 737—740.
39. On multimodules, *Archiv Math.* **13** (1962), 267—274.
40. A characterization of the Jacobson radiacl, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 595—597.
41a. Über artinsche Ringe, *Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math. Nat. R.* **12** (1963), 823—826.
41b. Az Artin-gyűrűk elméletének néhány kérdéséről, *MTA III. Oszt. Közl.* **14** (1964), 5—11.
42. On ranks of modules, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **6** (1963), 79—82.
43. Zur Frage der Spaltbarkeit von Ringen, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys.,* **12** (1964), 91—93.
44. Kvázicsoportok, *Mat. Lapok,* **15** (1964), 87—113.
45. Gyűrűk Jacobson-féle radikáljáról, *MTA III. Oszt. Közl.* **16** (1966), 445—461.
46. Lattice theoretic remarks on completely reducible algebras, *Coll. Math.* **14** (1966), 361—363.
47. On the existence of a left unit element in a noetherian or in an artinian ring, *Bull, Acad. Polon. Sci. ser. math. astr, phys.,* **14** (1966), 671—672.
48. Zur Theorie der kompakt erzeugten modularen Verbände, *Publ. Math. (Debrecen),* **15** (1968), 1—11.
49. Artinsche Ringe mit artinschem Radikal, *J. reine angew. Math.,* **242** (1970), 8—15 (mit A. Widiger).
50a. Die Bedeutung der Cantorschen Gedanken für die Entwicklung der Algebra, *Scientia,* **105** (1970), N. 703—704.
50b. The significance of Cantor's ideas for the development of algebra, *Scientia,* **105** (1970), N. 703—704.
51. Das Unendliche in der Mathematik, *Leopoldina Halle Saale* **15** (1969) (Vortragsouszug).
52. In memorian Tibor Szele, *Manuskript in ungarisch und deutsch,* (1969), 9 Seiten.
53. Noethersche Ringe die artinsch sind, *Acta Sci. Math.* **31** (1970), 219—221.
54. A new proof of Litoff's theorem, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **23** (1972), 1—3.
55. Some new algebraic equivalents of the Axiom of Choice, *Publ. Math. (Debrecen),* **19** (1972), 339—340, (mit A. Hajnal).
56. Zum 125. Geburtstag von Georg Cantor, *Manuskript.*
57a. Hundert Jahre exakte Einführung der reellen Zahlen, *Nova Acta Leopoldina,* **38** (1973), 455—457.

57b. Százéves a valós számok exakt bevezetése, *Mat. Lapok,* **22** (1971), 231—233.
58. *A*-Verbände I., *Beiträge Alg. Geom., Halle,* **1** (1971), 121—133. (mit M. Stern).
59. Ein Radikalbegriff für Moduln, *Coll. Math. Soc. János Bolyai,* **6**. North-Holland, 1973, 255—257.
60. Eine neue Charakterisierung der halbeinfachen Ringe, *Acta Sci. Math.* **34** (1973), 169—170.
61. A-Verbände II. *Beiträge Alg. Geom., Halle* **2** (1974), 11—18. (mit M. Stern).
62. Über reguläre *Z*-Ringe, *Beiträge Alg. Geom. Halle,* **3** (1974) 7—10 (mit O. Steinfeld).
63. Über linksnoethersche Ringe, die linksartinsch sind, *Publ. Math. (Debrecen)* (im Druck) (mit Dinh Van Huynh).
64. Transfinite Methoden in der Algebra, *Scripta Fac. Sci. Nat. Ujep. Brunensis, Mathematika* 1, **4** (1974), 35—38.
65. Pure subgroups of abelian groups, *Publ. Math. (Debrecen)* (im Druck) (mit L. Kovács und B. H. Neumann).