Über spezielle Type von Hyperflächen in verallgemeinerten Finslerräumen

Von A. MOÓR (Sopron)

Zum Andenken meines Freundes A. Kertész gewidmet

§ 1. Einleitung

In diesem Aufsatz wollen wir solche Hyperfläche gewisser n-dimensionalen metrischen Linienelementräume $\mathfrak{L}_n$ untersuchen, deren Torsionstensor $A_{\alpha\beta\gamma}$ entweder Null ist, oder eine rekurrente kovariante Ableitung hat. Die rekurrente kovariante Ableitung soll teils in der gewöhnlichen (vgl. unsere Formel (5.1)), teils in dem erweiterten, durch die Gleichung (5.2) gekennzeichneten Sinne verstanden werden. Bei diesem Typ ist also charakteristisch, daß nach der kovarianten Ableitung des Torsionstensors der Torsionstensor selbst reproduziert wird.

Unser zu Grunde gelegte Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ soll eine Finslersche Metrik mit einer metrischen Übertragungstheorie haben, doch sollen die Übertragungsparameter von denen der Cartanschen Theorie (vgl. [2])[1]) verschieden sein. Eine derartige Übertragungstheorie, die wir im folgenden benützen werden, haben wir in den Arbeiten [3] und [4] entwickelt; der metrische Grundtensor war dabei noch allgemeiner, als in der Finslerschen Metrik.

Im folgenden werden wir die in diesem Aufsatz verwandte Übertragungstheorie kurz zusammenfassen, dann die induzierte Übertragungstheorie einer Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ bestimmen, und endlich spezielle Type bezüglich der Torsion untersuchen. Unsere wichtigste Resultate sind in den Sätzen 4—6 angegeben.

§ 2. Grundgrößen des Basisraumes

Zu Grunde gelegt sei ein Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ in dem die Metrik durch eine Finslersche Metrik festgelegt ist. Der metrische Grundtensor $g_{ij}(x, \dot{x})$ der in den $\dot{x}^i$ homogen von nullter Dimension sein soll, ist somit von einer Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ abgeleitet, und hat die Form:

$$g_{ij}(x, \dot{x}) \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}\partial^2_{\dot{x}^i \dot{x}^j} F^2. \tag{2.1}$$

---

[1]) Vgl. die Literatur am Ende unseres Aufsatzes.

Die Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ ist in den $\dot{x}^i$ positiv homogen von erster Dimension; außerdem soll sie den gewöhnlichen Bedingungen genügen (vgl. [7], Kap. I. § 1.).

Das invariante Differential, welches die Übertragung im $\mathfrak{L}_n$-Raum bestimmt, soll das in dem in unserem Aufsatz [4] entwickelte invariante Differential sein. Für einen kontravarianten Vektor $\xi^i(x, \dot{x})$ hat dieses invariante Differential die Form:

$$D\xi^i = d\xi^i + M^{*i}_{j\ k}(x, \dot{x})\xi^j Dl^k + L^{*i}_{j\ k}(x, \dot{x})\xi^j dx^k, \tag{2.2}$$

wo l^k den Einheitsvektor $l^k = \dot{x}^k F^{-1}$ bedeutet, und die Übertragungsparameter sind durch die Formeln (vgl. [4] Formel (2.7a) und § 3, bzw. [3] Formel (2.24)):

$$M^{*i}_{j\ k}(x, \dot{x}) \overset{\text{def}}{=} (A_{j\ t}^{\ i} + \mu_{j\ t}^{\ i}) J^{*t}_{\ k} \tag{2.3}$$

$$L^{*i}_{j\ k}(x, \dot{x}) \overset{\text{def}}{=} \Gamma^{*i}_{j\ k} - A_{j\ r}^{\ i} J^r_t \sigma_{o\ k}^{\ t} + \sigma_{j\ k}^{\ i} \tag{2.4}$$

bestimmt. $\mu_{j\ t}^{\ i}$ und $\sigma_{j\ t}^{\ i}$ bedeuten Tensoren, die in den $\dot{x}^i$ homogen von nullter Dimension sind, ferner μ_{jit} und σ_{jit} sind in den Indexen j, i schiefsymmetrisch; außerdem soll für μ_{jik} die Identität:

$$\mu_{jio} \equiv \mu_{jik} l^k = 0 \tag{2.5}$$

gelten. [2]) $A_{j\ t}^{\ i}$ ist der Cartansche Torsionstensor:

$$A_{jik} \overset{\text{def}}{=} \frac{F}{2} \partial^3_{\dot{x}^j \dot{x}^i \dot{x}^k} F^2 \tag{2.6}$$

und $\Gamma^{*i}_{j\ k}$ bedeutet der Cartansche Übertragungsparameter, da nach der gestellten Annahme der Tensor g_{ij} die Form (2.1) hat.

Die Tensoren $J^{*t}_{\ k}$ und J^t_k in (2.3) und (2.4) sind gewisse inverse Tensoren, undzwar:

$$(\delta^t_i + \mu_{o\ i}^{\ t}) J^{*k}_{\ t} = \delta^k_i \tag{2.7}$$

(vgl. [4], (2.5) und (3.9)), ferner

$$(\delta^k_r + A_{o\ r}^{\ k}) J^t_k = \delta^t_r$$

(vgl. [3], Formel (2.15)). Da der Tensor $A_{j\ r}^{\ k}$ der Cartansche Torsionstensor ist, ist jetzt offenbar

$$A_{o\ r}^{\ k} = 0, \quad J^t_r = \delta^t_r.$$

Mit Hilfe der kovarianten Ableitungen kann das invariante Differential in der Form

$$D\xi^i = \nabla_k \xi^i dx^k + \overset{*}{\nabla}_k \xi^i Dl^k \tag{2.8}$$

ausgedrückt werden, wo

$$\nabla_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_{x^k} \xi^i - \xi^i \|_j L^{*j}_{o\ k} + L^{*i}_{j\ k} \xi^j, \tag{2.9}$$

$$\overset{*}{\nabla}_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \xi^i \|_t J^{*t}_{\ k} + M^{*i}_{j\ k} \xi^j \equiv J^{*t}_{\ k}(\xi^i \|_t + (A_{j\ t}^{\ i} + \mu_{j\ t}^{\ i}) \xi^j) \tag{2.10}$$

---

[2]) Kontraktionen mit dem Einheitsvektor l^i bezeichnen wir — wie gewöhnlich — durch den Index „o".

die fundamentalen kovarianten Ableitungen sind, ferner der Operator „$\|_j$" die Operation:

$$\|_j \overset{\text{def}}{=} F(x, \dot{x})\, \partial_{\dot{x}^j}$$

bedeutet. Offenbar verändert diese Operation den Homogenitätsgrad der Größen in den $\dot{x}^i$ nicht.

Die durch die Formeln (2.8)—(2.10) definierte Übertragung ist metrisch, d. h. es gilt (vgl. [4] § 3. insb. (3.6) und (3.7)):

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \tag{2.11a}$$

$$\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} = 0. \tag{2.11b}$$

§ 3. Grundrelationen der Theorie der Hyperflächen

Wir werden im folgenden als eine Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ diejenige Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(x^i, \dot{x}^i)$ bezeichnen, die durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x^i = x^i(u^\alpha) \\ \dot{x}^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\, \dot{u}^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, (n-1)) \end{cases} \tag{3.1}$$

bestimmt sind, wo die $(u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$ die die Linienelemente von $\mathfrak{H}_{n-1}$ bestimmenden Parameter bedeuten. Die griechischen Indizes durchlaufen jetzt und im folgenden immer die Zahlen $1, 2, \dots, (n-1)$, während die lateinischen Indizes die Zahlen $1, 2, \dots, n$ bedeuten.

Die $(n-1)$ Tangentenvektoren von $\mathfrak{H}_{n-1}$ sind die

$$B^i_\alpha(u) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, (n-1));$$

wir wollen betonen, daß diese Vektoren nach den Formeln (3.1) nur von den Punktkoordinaten u^α von $\mathfrak{H}_{n-1}$ abhängig sind, von den Richtungskoordinaten $\dot{u}^\alpha$ sind sie aber unabhängig. Der Normalenvektor N^i ist durch die Gleichungen

$$g_{ij}(x, \dot{x}) B^i_\alpha N^j = 0, \tag{3.2a}$$

$$g_{ij}(x, \dot{x}) N^i N^j = 1 \tag{3.2b}$$

bestimmt, wobei $(x, \dot{x})$ durch (3.1) festgelegt ist. Durch (3.2a) und (3.2*b*) ist zu jedem Linienelement der Hyperfläche eindeutig ein Normalenvektor $N^i(x, \dot{x})$ zugeordnet (vgl. [6], (4.1) und die nachfolgenden Zeilen).

Der metrische Grundtensor von $\mathfrak{H}_{n-1}$ ist der Tensor

$$g_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) \overset{\text{def}}{=} g_{ij}\big(x^k(u), B^k_\gamma(u)\, \dot{u}^\gamma\big) B^i_\alpha(u) B^j_\beta(u), \tag{3.3}$$

wo wir durch die griechischen Indizes die Angehörigkeit zur Hyperfläche zum Ausdruck bringen. Bekanntlich ist $g_{\alpha\beta}$ auch in der Form (vgl. [7], V. (2.5a)):

$$g_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) = \tfrac{1}{2}\, \partial^2_{\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} F^2\big(x(u), B_\gamma \dot{u}^\gamma\big) \tag{3.4}$$

angebbar; aus (3.3) und (3.4) folgt, daß die induzierte und innere Metrik von $\mathfrak{H}_{n-1}$ übereinstimmen.

Die kovarianten Komponenten der Tangentenvektoren sind durch die Formeln

$$B_i^\alpha \overset{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta}(u, \dot{u}) g_{ij} B_\beta^j \tag{3.5}$$

angegeben, wo $g^{\alpha\beta}$ den inversen Tensor von $g_{\alpha\beta}$ bedeuten; es gilt somit

$$g_{\alpha\gamma} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta. \tag{3.6}$$

Wir wollen darauf hinweisen, daß die B_i^α schon vom Linienelement $(u, \dot{u})$ abhängig sind. Für die folgenden soll immer angenommen werden, daß der Rang der Matrix (B_α^i) gleich $(n-1)$ ist, d. h. die Vektoren B_α^i sind linear unabhängig.

Für die Tangentenvektoren gelten noch die wichtigen Relationen:

$$B_k^\alpha B_\alpha^j = \delta_k^j - N^j N_k \tag{3.7}$$

(vgl. [7], V. (2.18) und (2.19)) und

$$B_i^\alpha B_\beta^i = \delta_\beta^\alpha. \tag{3.8}$$

Bezüglich der Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ wollen wir den Torsionstensor $A_{\alpha\beta\gamma}$ und den Einheitsvektor in der Richtung seines Stützelementes $\dot{u}^\alpha$ bestimmen. Aus (2.6) und (3.3) folgt unmittelbar

$$A_{\alpha\beta\gamma} \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta}\|_\gamma \equiv A_{ijk} B_\alpha^i B_\beta^j B_\gamma^k, \quad \|_\gamma = F\partial_{\dot{u}^\gamma} \tag{3.9}$$

woraus nach (3.4) die Symmetrie des Torsionstensors in α, β, γ leicht bestätigt werden kann. Der Einheitsvektor $l^\alpha = \dot{u}^\alpha F^{-1}$ ist noch ein Fundamentalvektor von $\mathfrak{H}_{n-1}$. Auf Grund von (3.1) sind die Raumkomponenten

$$l^i = B_\alpha^i l^\alpha. \tag{3.10}$$

Das invariante Differential eines kontravarianten Vektors $\xi^\alpha(u, \dot{u})$ von $\mathfrak{H}_{n-1}$ definieren wir in der gewöhnlichen Weise durch die Formel:

$$\tilde{D}\xi^\alpha \overset{\text{def}}{=} B_i^\alpha D(B_\beta^i \xi^\beta); \tag{3.11}$$

für einen kovarianten Vektor η_α ist

$$\tilde{D}\eta_\alpha \overset{\text{def}}{=} B_\alpha^i D(B_i^\beta \eta_\beta) \tag{3.11a}$$

(vgl. [7] V. § 3.). Wir zeigen nun, daß die Formel (3.11) in der Form:

$$\tilde{D}\xi^\alpha = d\xi^\alpha + \tilde{M}_\beta{}^\alpha{}_\gamma \xi^\beta \tilde{D} l^\gamma + \tilde{\Gamma}_\beta{}^\alpha{}_\gamma \xi^\beta du^\gamma \tag{3.12}$$

geschrieben werden kann, ferner werden wir die induzierten Übertragungsparameter berechnen.

Das invariante Differential $\tilde{D}$ ist nach (3.11) im wesentlichen auf Grund von (2.2) bestimmt, wenn in (2.2) $\xi^i = B_\beta^i \xi^\beta$ gesetzt wird. Wir führen nun einige Bezeichnungen ein. Es soll

$$B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^k x^i}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2} \ldots \partial u^{\alpha_k}}$$

bezeichnen.

Die Projektionen der Raumtensoren auf $\mathfrak{H}_{n-1}$ *d. h. die Kontraktionen mit* B^i_α *bzw.* B^β_j *bezeichnen wir im folgenden mit griechischen Indizes* (vgl. etwa (3.3)).

Wir bestimmen nun Dl^k. Setzen wir in (2.2) $\xi^i = l^i$, lösen wir diese Gleichung auf Dl^k, so wird:

$$Dl^k = \Phi^k_t(dl^t + L^{*t}_{o\ s}\, dx^s) \tag{3.13}$$

und Φ^k_t ist dabei die Lösung von

$$\Phi^k_h(\delta^h_r - M^{*h}_{o\ r}) \equiv \Phi^k_h J^{*h}_{\ \ r} = \delta^k_r \tag{3.14}$$

(vgl. [4], Formel (2.9)). Selbstverständlich muß $|\delta^h_r - M^{*h}_{o\ r}| \neq 0$ vorausgesetzt werden. Für $l^t = B^t_\beta l^\beta$ erhält man aus (3.13) unmittelbar

$$Dl^k = \Phi^k_r\big(B^r_\beta\, dl^\beta + (B^r_{o\gamma} + L^{*r}_{o\ s} B^s_\gamma)\, du^\gamma\big), \quad B^r_{o\gamma} \equiv B^r_{\beta\gamma} l^\beta. \tag{3.15}$$

Beachten wir nun, daß $dx^i = B^i_\gamma du^\gamma$ und $\xi^i = B^i_\beta \xi^\beta$ ist, so bekommt man aus (3.11), auf Grund von (2.2) und (3.13), in Hinsicht auf (3.8):

$$\tilde{D}\xi^\alpha = d\xi^\alpha + M^{*\alpha}_{\beta\ k}\Phi^k_\delta \xi^\beta\, dl^\delta + \{B^\alpha_i B^i_{\beta\gamma} + M^{*\alpha}_{\beta\ k}\Phi^k_r(B^r_{o\gamma} + L^{*r}_{o\ \gamma}) + L^{*\alpha}_{\beta\ \gamma}\}\, \xi^\beta\, du^\gamma \tag{3.16}$$

wo z. B. $M^{*\alpha}_{\beta\ k} \equiv M^{*i}_{j\ k} B^j_\beta B^\alpha_i$ bedeutet) [3].

Wir werden jetzt dl^δ durch $\tilde{D}l^\delta$ ausdrücken. Setzen wir in (3.11) $\xi^\beta = l^\beta$, beachten wir dann (3.15), wo $l^k = B^k_\beta l^\beta$ bedeutet, so wird

$$\tilde{D}l^\delta = \Phi^\delta_\beta\, dl^\beta + \Phi^\delta_r(B^r_{o\gamma} + L^{*r}_{o\ \gamma})\, du^\gamma.$$

Bezeichnen wir nun den inversen Tensor von Φ^α_β durch ψ^β_γ, d. h. ist

$$\psi^\alpha_\delta \Phi^\delta_\beta = \delta^\alpha_\beta, \tag{3.17}$$

so erhält man nach einer Kontraktion mit ψ^α_δ

$$dl^\alpha = \psi^\alpha_\delta \tilde{D}l^\delta - \psi^\alpha_\delta \Phi^\delta_s(B^s_{o\tau} + L^{*s}_{o\ \tau})\, du^\tau. \tag{3.18}$$

Substitutieren wir das in (3.16), so erhält man

$$\tilde{D}\xi^\alpha = d\xi^\alpha + (\tilde{M}_\beta{}^\alpha{}_\gamma \tilde{D}l^\gamma + \tilde{L}_\beta{}^\alpha{}_\gamma\, du^\gamma)\,\xi^\beta, \tag{3.19}$$

wo die Übertragungsparameter

$$\tilde{M}_\beta{}^\alpha{}_\gamma \overset{\text{def}}{=} (A_\beta{}^\alpha{}_\delta + \mu_\beta{}^\alpha{}_\delta)\psi^\delta_\gamma \tag{3.20}$$

$$\tilde{L}_\beta{}^\alpha{}_\gamma \overset{\text{def}}{=} B^\alpha_i B^i_{\beta\gamma} + (A_\beta{}^\alpha{}_r + \mu_\beta{}^\alpha{}_r)(\delta^r_s - B^r_\delta \psi^\delta_\varepsilon \Phi^\varepsilon_s)(B^s_{o\gamma} + L^{*s}_{o\ \gamma}) + L^{*\alpha}_{\beta\ \gamma} \tag{3.21}$$

sind. Bei der Herleitung dieser Formeln habe wir auch die aus (2.3) und (3.14) folgende Relation

$$M^{*\alpha}_{\beta\ k}\Phi^k_r = B^j_\beta B^\alpha_i M^{*i}_{j\ k}\Phi^k_r = A_\beta{}^\alpha{}_r + \mu_\beta{}^\alpha{}_r$$

benützt.

Die zur Übertragung (3.19) gehörigen kovarianten Ableitungen könnten aus (3.19) selbst leicht bestimmt werden, doch wollen wir diese in Zusammenhang mit den räumlichen kovarianten Ableitungen (2.9) und (2.10) bestimmen. Vor allem berechnen wir den Zusammenhang von Dl^k und $\tilde{D}l^\alpha$.

---

[3]) In analoger Weise ist $L^{*\alpha}_{\beta\ \gamma} \equiv L^{*j}_{i\ k} B^i_\beta B^\alpha_j B^k_\gamma$.

Beachten wir in (3.13) auf der rechten Seite, daß

$$dl^t = B^t_{o\,\sigma}\, du^\sigma + B^t_\sigma\, dl^\sigma, \quad dx^s = B^s_\sigma\, du^\sigma$$

bestehen, so wird aus (3.13) auf Grund von (3.18)

$$Dl^k = \Phi^k_\alpha \psi^\alpha_\sigma \tilde{D} l^\sigma + H^k_\sigma(u, \dot{u})\, du^\sigma, \tag{3.22}$$

$$H^k_\sigma \overset{\text{def}}{=} (\Phi^k_t - \Phi^k_\beta \psi^\beta_\delta \Phi^\delta_t)(B^t_{o\sigma} + L^{*t}_{o\ \sigma}). \tag{3.22a}$$

Die Relation (3.22) entspricht der Formel (V. (4.1)) von [7]. Im Finslerschen Fall ist $\Phi^m_\varrho = B^m_\varrho$, $\psi^\alpha_\delta = \delta^\alpha_\delta$, wie das auf Grund von (3.14), (3.8) und (3.17) bestätigt werden kann.

Aus (3.11) folgt nun in Hinsicht auf (2.8), (3.22) und $dx^k = B^k_\varrho du^\varrho$:

$$\tilde{D}\xi^\alpha = \overset{0}{D}_\varrho \xi^\alpha du^\varrho + \overset{1}{D}_\varrho \xi^\alpha \tilde{D} l^\varrho, \tag{3.23}$$

wo

$$\overset{0}{D}_\varrho \xi^\alpha \overset{\text{def}}{=} B^\alpha_i \big(B^k_\varrho \nabla_k (B^i_\beta \xi^\beta) + H^k_\varrho \overset{*}{\nabla}_k (B^i_\beta \xi^\beta)\big), \tag{3.24}$$

$$\overset{1}{D}_\varrho \xi^\alpha \overset{\text{def}}{=} B^\alpha_i \Phi^k_\gamma \psi^\gamma_\varrho \overset{*}{\nabla}_k (B^i_\beta \xi^\beta). \tag{3.25}$$

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch bemerken, daß die Operationen $\tilde{D}$, $\overset{0}{D}_\varrho$, $\overset{1}{D}_\varrho$ auf beliebige Raumvektoren erweitert werden können, ebenso, wie in der klassischen Theorie der Finslerräumen (vgl. [7], V. § 4, 2°). Ist $\xi^i(x, \dot{x})$ ein Raumvektor, so wird unter Beachtung von (3.1):

$$\tilde{D}\xi^i = \overset{0}{D}_\varrho \xi^i du^\varrho + \overset{1}{D}_\varrho \xi^i \tilde{D} l^\varrho, \tag{3.26}$$

$$\overset{0}{D}_\varrho \xi^i \overset{\text{def}}{=} B^k_\varrho \nabla_k \xi^i + H^k_\varrho \overset{*}{\nabla}_k \xi^i, \tag{3.27}$$

$$\overset{1}{D}_\varrho \xi^i \overset{\text{def}}{=} \Phi^k_\gamma \psi^\gamma_\varrho \overset{*}{\nabla}_k \xi^i. \tag{3.28}$$

§ 4. Grundeigenschaften der Flächenübertragung

Die wichtigste Eigenschaft der Flächenübertragung ist durch den folgenden Satz ausgedrückt:

Satz 1. *Die durch* (3.23) *bestimmte Flächenübertragung ist metrisch, d. h. es gilt* $\tilde{D} g_{\alpha\beta} = 0$.

Beweis. Wir zeigen, daß die konvarianten Ableitungen von $g_{\alpha\beta}$ verschwinden, d. h.

$$\overset{0}{D}_\varrho g_{\alpha\beta} = 0, \tag{4.1a}$$

$$\overset{1}{D}_\varrho g_{\alpha\beta} = 0; \tag{4.1b}$$

aus diesen Relationen folgt schon der beweisende Satz. Auf Grund der Formeln (3.3) und (3.7) folgt in Hinsicht auf (3.2b):

$$g_{\alpha\beta} B^\alpha_i B^\beta_j = g_{rp} B^r_\alpha B^p_\beta B^\alpha_i B^\beta_j = g_{rp}(\delta^r_i - N^r N_i)(\delta^p_j - N^p N_j) = g_{ij} - N_i N_j.$$

Somit wird nach (3.24):

$$\overset{0}{D}_\varrho g_{\alpha\beta} = B^i_\alpha B^j_\beta \big(B^k_\varrho \nabla_k (g_{ij} - N_i N_j) + H^k_\varrho \overset{*}{\nabla}_k (g_{ij} - N_i N_j)\big),$$

wenn die kovariante Ableitung $\overset{0}{D}_\varrho$ auf $g_{\alpha\beta}$ angewandt wird. Nach den Relationen (2.11a), (2.11b) und (3.2a) folgt aber die beweisende Relation (4.1a).

In analoger Weise erhält man (4.1b), nur müssen wir satt (3.24) die Definitionsformel (3.25) benützen, womit der Satz vollständig bewiesen wird.

Bezüglich der kovarianten Ableitungen von l^α beachte man, daß $l^i = B^i_\beta l^\beta$ besteht, und ebenso, wie in [3], folgt, daß $\nabla_k l^i = 0$ (vgl. [3], (2.28)) und

$$l^i \|_k = \delta^i_k - l^i l_k, \tag{4.2}$$

welche Identität aus der Annahme folgt, daß die Metrik eine Finslermetrik ist. Aus (2.10) folgt nun in Hinsicht auf (2.7):

$$\overset{*}{\nabla}_k l^i = J^{*t}_{\ k}(\delta^i_t - l^i l_t + \mu_o{}^i{}_t) = \delta^i_k - J^{*o}_{\ k} l^i,$$

da in (2.7) nach einem wohlbekannten Satz der Tensoralgebra die Summations- und freie Indizes vertauscht werden können, d. h. neben (2.7) auch

$$(\delta^i_t + \mu_o{}^i{}_t) J^{*t}_{\ k} = \delta^i_k \tag{4.3}$$

besteht. Eine Überschiebung von (4.3) mit l_i gibt wegen $\mu_o{}^o{}_t = 0$ (μ_{ijk} ist nämlich in i, j schiefsymmetrisch) die Relation $J^{*o}_{\ k} = l_k$, also bekommt man

$$\overset{*}{\nabla}_k l^i = \delta^i_k - l^i l_k. \tag{4.4}$$

Aus (3.24) erhält man somit:

$$\overset{0}{D}_\varrho l^\alpha = B^\alpha_i H^k_\varrho (\delta^i_k - l^i l_k).$$

Aus der Definitionsformel (3.22*a*) folgt aber in Hinsicht auf (3.17), daß

$$B^\alpha_i H^i_\varrho = 0, \quad H^k_\varrho l_k \equiv H^k_\varrho B^\gamma_k l_\gamma = 0 \tag{4.5}$$

bestehen, d. h. es gilt

$$\overset{0}{D}_\varrho l^\alpha = 0. \tag{4.6}$$

Aus (3.25) erhält man nach den Formeln (4.4) und (3.17):

$$\overset{1}{D}_\varrho l^\alpha = B^\alpha_i \Phi^k_\gamma \psi^\gamma_\varrho (\delta^i_k - l^i l_k) = \delta^\alpha_\varrho - l^\alpha \Phi^o_\gamma \psi^\gamma_\varrho.$$

Es ist aber wieder nach (3.17):

$$\Phi^o_\gamma \psi^\gamma_\varrho = \Phi^k_\gamma B^\alpha_k l_\alpha \psi^\gamma_\varrho = l_\alpha \Phi^\alpha_\gamma \psi^\gamma_\varrho = l_\varrho,$$

und dadurch wird

$$\overset{1}{D}_\varrho l^\alpha = \delta^\alpha_\varrho - l^\alpha l_\varrho \tag{4.7}$$

auch für die Flächenübertragung gelten, wie das bei den metrischen Übertragungen immer gewöhnlich ist.

§ 5. Hyperflächen von rekurrenter Torsion

Definition. *Eine Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ von rekurrenter Torsion bedeutet eine solche $\mathfrak{H}_{n-1}$, deren Torsionstensor bei einer kovarianten Ableitung sich reproduziert, d. h.:*

$$\overset{0}{D}_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} = \varkappa_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} \tag{5.1}$$

besteht. $\mathfrak{H}_{n-1}$ hat rekurrente Torsion im erweiterten Sinne, falls

$$\overset{0}{D}_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} = \varphi^{\mu\sigma\tau}_{\alpha\beta\gamma\varrho} A_{\mu\sigma\tau} \tag{5.2}$$

besteht. $\varkappa_\varrho$ bzw. $\varphi^{\mu\sigma\tau}_{\alpha\beta\gamma\varrho}$ bedeutet einen Vektor bzw. einen in α, β, γ symmetrischen Tensor. Die Formeln (5.1) und (5.2) können selbstverständlich auch für den Torsionstensor A_{ijk} des Basisraumes gelten, wo aber dann die kovariante Ableitung ∇_k gesetzt werden soll.

Der Typus (5.2) ist offenbar eine Verallgemeinerung des Typus (5.1), da wenn

$$\varphi^{\mu\sigma\tau}_{\alpha\beta\gamma\varrho} = \delta^{(\mu}_{(\alpha} \delta^{\sigma}_{\beta} \delta^{\tau)}_{\gamma)} \varkappa_\varrho \tag{5.3}$$

gilt, so sind die beiden Type identisch. In den Formeln (5.1) und (5.2) haben wir die durch (3.24) definierte kovariante Ableitung benützt. Wir beweisen den folgenden

Satz 2. *Es existieren keine Hyperflächen, für die eine der Relationen*

$$\overset{1}{D}_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} = \varkappa_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} \tag{5.4}$$

mit $A_{\alpha\beta\gamma} \neq 0$, oder

$$\overset{1}{D}_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} = \varphi^{\mu\sigma\tau}_{\alpha\beta\gamma\varrho} A_{\mu\sigma\tau} \tag{5.5}$$

mit

$$A_{\mu\sigma\tau} \varphi^{\mu\sigma\tau}_{\alpha\beta\gamma\varrho} l^\gamma = 0, \quad A_{\alpha\beta\gamma} \neq 0 \tag{5.5a}$$

gültig wäre.

Beweis. Nehmen wir an, daß entgegen der Behauptung des Satzes die Relation (5.4) bzw. (5.5) gültig ist. Nach einer Überschiebung mit l^γ erhält man in beiden Fällen, auf Grund von (4.7) und wegen

$$A_{\alpha\beta\gamma} l^\gamma \equiv A_{ijk} B^i_\alpha B^j_\beta l^k = 0,$$

daß

$$(\overset{1}{D}_\varrho A_{\alpha\beta\gamma}) l^\gamma \equiv -l_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} = 0$$

besteht, im Widerspruch zur Bedingung bezüglich des Torsionstensors. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Definitionsformel (5.1) ist auf Grund der Formel (3.24) mit

$$B_\alpha^i B_\beta^j B_\gamma^k (B_\varrho^m \nabla_m \tilde{A}_{ijk} + H_\varrho^m \overset{*}{\nabla}_m \tilde{A}_{ijk}) = \varkappa_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} \tag{5.6}$$

äquivalent, wo jetzt und im folgenden

$$\tilde{A}_{ijk} = A_{\alpha\beta\gamma} B_i^\alpha B_j^\beta B_k^\gamma \tag{5.7}$$

bedeutet. Die Kontraktionen der Flächentensoren mit den B_i^α, wo die Summation auf die griechischen Indizes durchgeführt werden soll, werden wir immer mit einer Wellenlinie „$\sim$" bezeichnen. $\tilde{A}_{ijk}$ bestimmen also z. B. die Raumkomponenten des Projektionstensors $A_{\alpha\beta\gamma}$. Beachten wir nun, daß die griechischen Indizes bei dem Tensor $A_{\alpha\beta\gamma}$ die Kontraktionen von A_{ijk} mit den Tangentenvektoren B_α^i, B_β^j, B_γ^k bezeichnen, so wird nach (3.7):

$$\tilde{A}_{ijk} = A_{abc}(\delta_i^a - N^a N_i)(\delta_j^b - N^b N_j)(\delta_k^c - N^c N_k). \tag{5.7a}$$

Diese Formel zeigt, daß für einen Flächentensor T::., dessen Kontraktion mit dem Normalenvektor N^i Null gibt, $\tilde{T}$::.$=T$::. ist.

Im folgenden wollen wir annehmen, daß der Basisraum $\mathfrak{L}_n$ im Matsumotoschen Sinne C-reduzierbar ist (vgl. [5], S. 30), d. h. es gilt:

$$A_{ijk} = (n+1)^{-1}\{(g_{ij} - l_i l_j)A_k + (g_{jk} - l_j l_k)A_i + (g_{ki} - l_k l_i)A_j\}, \tag{5.8}$$

wo $A_i \overset{\text{def}}{=} A_i{}^k{}_k$ den Torsionsvektor bedeutet. Nach (3.9) ist

$$A_{\alpha\beta\gamma} = (n+1)^{-1}\{(g_{\alpha\beta} - l_\alpha l_\beta)A_\gamma + \{\text{zykl.}\}_{\alpha\beta\gamma}\}, \tag{5.9}$$

wo jetzt und im folgenden $\{\text{zykl.}\}_{\alpha\beta\gamma}$ den vorigen Ausdruck mit zyklischer Permutation über α, β, γ bedeutet.

Wir wollen jetzt $\tilde{A}_{ijk}$ für die C-reduzierbaren Räume berechnen. Da nach (3.5)

$$g_{\alpha\beta} B_i^\alpha = g_{ij} B_\beta^j, \quad B_i^\alpha l_\alpha = g_{ij} B_\beta^j l^\beta = g_{ij} B_o^j$$

ist, erhält man aus den Formeln (5.7) und (5.9) im Hinblick auf (3.7)

$$\tilde{A}_{ijk} = (n+1)^{-1}\{(g_{ij} - l_i l_j - N_i N_j)(A_k - A_+ N_k) + \{\text{zykl.}\}_{ijk}\}, \tag{5.10}$$

wo *das Zeichen „+" an der Stelle eines Indexes jetzt und im folgenden die Kontraktion mit N^i bedeutet*. Es ist also $A_+ \overset{\text{def}}{=} A_i N^i$.

Aus den Formeln (5.6) und (5.10) kann nun die Hyperfläche mit rekurrenter Torsion in den C-reduzierbaren Räumen charakterisiert werden. Beachten wir nun (2.11a) und (2.11b), (3.2a), (4.4), ferner die Identität $\nabla_k l^i \equiv 0$, so wird:

$$\overset{0}{D}_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} \equiv (n+1)^{-1}(g_{\alpha\beta} - l_\alpha l_\beta)B_\gamma^k\{B_\varrho^m \nabla_m(A_k - A_+ N_k) + H_\varrho^m \overset{*}{\nabla}_m(A_k - A_+ N_k)\} +$$
$$+ \{\text{zykl.}\}_{\alpha\beta\gamma} = \varkappa_\varrho A_{\alpha\beta\gamma},$$

da auf Grund von (4.5) nach einer leichten Rechnung die Gültigkeit von

$$B_\alpha^i B_\beta^j B_\gamma^k H_\varrho^m \overset{*}{\nabla}_m (g_{ij} - l_i l_j - N_i N_j) = 0$$

bestätigt werden kann. Beachten wir nun, daß

$$A_k - A_+ N_k = A_\alpha B_k^\alpha = \tilde{A}_k$$

gilt, so wird in den C-reduzierbaren Räumen für die Hyperflächen mit rekurrenter Torsion

$$\overset{0}{D}_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} \equiv (n+1)^{-1}\{(g_{\alpha\beta}-l_\alpha l_\beta)\overset{0}{D}_\varrho A_\gamma + \{\text{zykl.}\}_{\alpha\beta\gamma}\} = \varkappa_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} \tag{5.11}$$

die charakteristische Gleichung sein. Wir bermerken hier, daß im allgemeinen $A_\alpha{}^\alpha{}_\gamma \neq A_i B^i_\gamma \equiv A_\gamma$ ist. Es ist nämlich auf Grund von (3.5) und (3.7):

$$A_\alpha{}^\alpha{}_\gamma = g^{\alpha\beta} A_{ijk} B^i_\alpha B^j_\beta B^k_\gamma = A_{ijk} g^{ir} B^\beta_r B^j_\beta B^k_\gamma = A_\gamma - A_{++\gamma}. \tag{5.12}$$

Überschiebung von (5.11) mit $g^{\alpha\beta}$ gibt wegen (4.6):

$$\frac{n}{n+1}\overset{0}{D}_\varrho A_\gamma = \varkappa_\varrho A_\alpha{}^\alpha{}_\gamma. \tag{5.13}$$

Aus (5.12) und (5.13) folgt der

Satz 3. *In den C-reduzierbaren Räumen ist der Torsionsvektor A_γ einer Hyperfläche mit rekurrenter Torsion dann und nur dann auch rekurrent, falls*

$$A_{++\gamma} = \hat{\varphi}(u, \dot{u}) A_\gamma, \quad \hat{\varphi}(u, \dot{u}) \neq 1 \tag{5.14}$$

ist, wo $\hat{\varphi}(u, \dot{u})$ einen Skalar bedeutet. (Möglicherweise kann auch $\hat{\varphi}=0$ sein).

§ 6. Die zweidimensionalen Hyperflächen

In diesem Paragraphen sei ein $\mathfrak{L}_3$-Raum zu Grunde gelegt. Die Hyperflächen sind in diesem Raum selbstverständlich zweidimensional. Da bezüglich der Hyperflächen (3.4) und (3.9) immer gelten, hat man auf Grund der Homogenität erster Ordnung der Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$:

$$A_{\alpha\beta\gamma} l^\gamma \equiv A_{\alpha\gamma\beta} l^\gamma \equiv A_{\gamma\alpha\beta} l^\gamma \equiv 0. \tag{6.1}$$

Für die zweidimensionalen Hyperflächen $\mathfrak{H}_2$ hat man somit nach den Resultaten von L. Berwald (vgl. [1], § 4, insb. (4.6)) die Form:

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \mathfrak{J} h_\alpha h_\beta h_\gamma, \tag{6.2}$$

wo $\mathfrak{J}(x, \dot{x})$ den Hauptskalar von $\mathfrak{H}_2$ und h_α den Vektor

$$h_\alpha \overset{\text{def}}{=} -\varepsilon_{\alpha\beta} l^\beta, \tag{6.3}$$

$$\varepsilon_{11} \equiv \varepsilon_{22} \equiv 0, \quad \varepsilon_{12} \equiv -\varepsilon_{21} \equiv \sqrt{\operatorname{Det}(g_{\alpha\beta})} \tag{6.4}$$

bedeuten. Bei $\mathfrak{J}(x, \dot{x})$ sind selbstverständlich (3.1) gültig.

Auf Grund von (3.4) ist $\mathfrak{H}_2$ bezüglich der Metrik ein 2-dimensionaler Finslerraum und nach den Formeln (4.1a) und (4.6) ist auch

$$\overset{0}{D}_\varrho h^\alpha = 0, \quad \overset{0}{D}_\varrho h_\alpha = 0. \tag{6.5}$$

Der Vektor h^α ist ein Flächenvektor; die Raumkomponenten sind somit $h^i \equiv \equiv \tilde{h}^i = B^i_\alpha h^\alpha$ und für die kovarianten Komponenten hat man

$$h_j \equiv \tilde{h}_j = g_{ij} B^j_\alpha h^\alpha = g_{\alpha\beta} B^\beta_i h^\alpha = B^\beta_j h_\beta.$$

Wir benötigen noch die kovarianten Ableitungen von h^i. Es ist nach (3.8):

$$l_j h^j = B_j^\alpha l_\alpha B_\beta^j h^\beta = l_\beta h^\beta = 0,$$

somit folgt nach kovarianter Ableitung:

$$l_j \nabla_m h^j = 0. \tag{6.6}$$

Da h^α einen Einheitsvektor bedeutet, hat man:

$$h_j h^j = g_{ij} B_\alpha^i h^\alpha B_\beta^j h^\beta = g_{\alpha\beta} h^\alpha h^\beta = 1,$$

und wieder nach einer kovarianten Ableitung wird

$$h_j \nabla_m h^j = 0. \tag{6.7}$$

Die Vektoren l^i, h^i und N^i bilden ein orthogonales und normiertes Dreibein, somit folgt aus (6.6) und (6.7)

$$\nabla_m h^i = N^i \varphi_m, \quad \varphi_m \overset{\text{def}}{=} N_i h^i. \tag{6.8}$$

Bilden wir die kovariante Ableitung (3.24) für h^α, so wird nach (6.8) und (6.5)

$$B_i^\alpha H_\varrho^k \overset{*}{\nabla}_k h^i = 0$$

bestehen. Eine Überschiebung dieser Gleichung mit B_α^j gibt nach der Formel (3.7)

$$H_\varrho^k \overset{*}{\nabla}_k h^j = N^j \psi_\varrho, \quad \psi_\varrho \overset{\text{def}}{=} N_i H_\varrho^k \overset{*}{\nabla}_k h^i. \tag{6.9}$$

Nun sind wir imstande $\overset{0}{D}_\varrho A_{\alpha\beta\gamma}$ und $\nabla_m \tilde{A}_{ijk}$ zu untersuchen. Auf Grund von (6.2) und (6.5) folgt der

Satz 4. *Eine zweidimensionale Hyperfläche $\mathfrak{H}_2$ in den dreidimensionalen $\mathfrak{L}_3$-Räumen ist immer von rekurrenter Torsion, d. h. es gilt:*

$$\overset{0}{D}_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} = \varkappa_\varrho A_{\alpha\beta\gamma},$$

und $\varkappa_\varrho$ ist ein Gradientvektor.

Beweis. Da die kovariante Ableitung $\overset{0}{D}_\varrho$ eine lineare Übertragung bestimmt (vgl. Formel (3.24)), besteht für $\overset{0}{D}_\varrho$ die Leibnizsche Regel. Somit hat man

$$\overset{0}{D}_\varrho A_{\alpha\beta\gamma} = (\overset{0}{D}_\varrho \mathfrak{I}) h_\alpha h_\beta h_\gamma = \mathfrak{I}^{-1}(\overset{0}{D}_\varrho \mathfrak{I}) A_{\alpha\beta\gamma} = (\overset{0}{D}_\varrho \ln |\mathfrak{I}|) A_{\alpha\beta\gamma},$$

und das beweist den Satz.

Wir gehen jetzt zur Rekurrenzeigenschaften von $\tilde{A}_{ijk}$ über, und beweisen den folgenden

Satz 5. *Die Raumkomponenten $\tilde{A}_{ijk}$ des Flächentensors $A_{\alpha\beta\gamma}$ sind im dreidimensionalen $\mathfrak{L}_3$-Raum bezüglich der kovarianten Ableitung ∇_k immer rekurrent im erweiterten Sinne.*

Beweis. Auf Grund von (5.7) und (6.2) ist:

$$\tilde{A}_{ijk} = \Im h_i h_j h_k. \tag{6.10}$$

Nach der Formel (6.8) wird:

$$\nabla_m \tilde{A}_{ijk} = (\nabla_m \Im) h_i h_j h_k + 3\varphi_m \Im N_{(i} h_j h_{k)}. \tag{6.11}$$

Es ist auf Grund von (6.10):

$$\Im h_j h_k = \tilde{A}_{ijk} h^i,$$

somit wird aus (6.11):

$$\nabla_m \tilde{A}_{ijk} = \varphi^{rst}_{ijkm} \tilde{A}_{rst}, \tag{6.12}$$

wo

$$\varphi^{rst}_{ijkm} \overset{\text{def}}{=} (\nabla_m \ln |\Im|) \delta^r_{(i} \delta^s_j \delta^t_{k)} + 3\varphi_m h^r \delta^s_{(j} \delta^t_k N_{i)}. \tag{6.12a}$$

Die Formel (6.12) beweist schon den Satz (vgl. die Definition im Paragraphen 5).
Letztens beweisen wir noch für $\tilde{A}_{ijk}$ den

Satz 6. *Die Raumkomponenten $\tilde{A}_{ijk}$ des Flächentensors $A_{\alpha\beta\gamma}$ der zweidimensionalen Hyperflächen $\mathfrak{H}_2$ sind bezüglich der kovarianten Ableitung* (3.27) *immer rekurrent im erweiterten Sinne.*

Beweis. Um die durch (3.27) bestimmte kovariante Ableitung von $\tilde{A}_{ijk}$ zu bestimmen, müssen wir

$$B^m_\varrho \nabla_m \tilde{A}_{ijk} \quad \text{und} \quad H^m_\varrho \overset{*}{\nabla}_m \tilde{A}_{ijk}$$

berechnen. Auf Grund von (6.12) und (6.12a) hat man

$$B^m_\varrho \nabla_m \tilde{A}_{ijk} = \varphi^{rst}_{ijk\varrho} \tilde{A}_{rst}. \tag{6.13}$$

Aus den Formeln (6.9) und (6.10) folgt:

$$H^m_\varrho \overset{*}{\nabla}_m \tilde{A}_{ijk} = \psi^{rst}_{ijk\varrho} \tilde{A}_{rst}, \tag{6.14}$$

wo nach (6.9)

$$\psi^{rst}_{ijk\varrho} \overset{\text{def}}{=} (H^m_\varrho \overset{*}{\nabla}_m \ln |\Im|) \delta^r_{(i} \delta^s_j \delta^t_{k)} + 3\psi_\varrho h^r \delta^s_{(j} \delta^t_k N_{i)} \tag{6.14a}$$

bedeutet. Nach unseren Formeln (6.13) und (6.14) wird

$$\overset{0}{D} \tilde{A}_{ijk} = (\varphi^{rst}_{ijk\varrho} + \psi^{rst}_{ijk\varrho}) \tilde{A}_{rst},$$

und das beweist die Behauptung des Satzes.

Zum Schluß wollen wir kurz darauf hinweisen, daß *bezüglich der kovarianten Ableitung* (3.28) *der Torsionstensor $\tilde{A}_{ijk}$ nicht rekurrent sein kann,* was wegen der aus (5.7a) folgende Relation

$$\tilde{A}_{ijk} l^k = A_{abo} (\delta^a_i - N^a N_i)(\delta^b_i - N^b N_i) \equiv 0,$$

und wegen (4.4) analog zum Satz 2. bewiesen werden kann.

Schriftenverzeichnis

[1] L. Berwald, On Finsler and Cartan Geometries III. *Ann. of Math.* **42** (1941), 84—112.
[2] E. Cartan, Les espaces de Finsler. *Actualités scientifiques et industrielles. Vol.* 79 *Paris*, 1934.
[3] A. Moór, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **17** (1956), 85—120.
[4] A. Moór, Eine Verallgemeinerung der metrischen Übertragung in allgemeinen metrischen Räumen. *Publ. Math. (Debrecen)*, **10** (1963), 145—150.
[5] Makoto Matsumoto, On C-reducible Finsler spaces. *Tensor N. S.* **24** (1972), 29—37.
[6] H. Rund, The theory of subspaces of a Finsler space I. *Math. Z.* **56** (1952), 363—375.
[7] H. Rund, The differential geometry of Finsler spaces. *Berlin, Göttingen, Heidelberg*. 1959.

(Eingegangen am 8. Juli 1974.)