Bemerkungen zu meiner Arbeit: „Beiträge zur Radikaltheorie der Ringe“

Von FERENC ANDOR SZÁSZ (Budapest)

Dem Andenken von Professor Andor Kertész (1929—1974) gewidmet

In dieser Note verstehen wir unter einem Ring immer einen assoziativan Ring. Bezüglich der nötigen Grundbegriffe verweisen wir auf N. JACOBSON [3], A. KERTÉSZ [4] oder L. RÉDEI [5]. Bezüglich der Radikale siehe N. DIVINSKY's Buch [2] und die (in Deutsch geschrieben) Monographie [10] des VERFASSERS.

Der Zweck dieser Note ist vierfach. Einerseits möchte ich meinen Satz 3 von [8] korrekt machen, obwohl noch offen blieb, ob er falsch ist. Im Beweis dieses Satzes wird bei mir eine nicht angenommene Voraussetzung benützt. Deshalb spreche ich diesen Satz in einer neueren Form aus, nämlich mit der erwähnten Voraussetzung. Zweitens werfe ich einige offene Probleme bezüglich dieses Gegenstandes auf und beweise weitere ähnliche Sätze. Drittens möchte ich über die Geschichte in der Bemerkung ([8], auf Seite 269) etwas erzählen. Viertens möchte ich bemerken, daß Behauptung 3, des Satzes 3 von [8] ungültig ist. Siche die Bemerkung nach Lemma 3 der Arbeit [15].

Es sei 1 als ein Operator angesehen. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_a : x \to (1-a)x(1-a)^{-1}$$

in jedem Jacobsonschen Radikalring offenbar ein Automorphismus des Ringes, der ein quasi-innerer Automorphismus genannt werden kann. (Ist nämlich $a+b=ab=ba$, so gilt $y(1-a)^{-1}=y(1-b)$ für jedes Produkt mit $y\in A$.) Bezeichnen wir die Menge aller quasiinneren automorphen Bilder von x mit dem Symbol $\hat{x}$. Dann gilt (richtig) statt des Satzes 3 von [8] der folgende:

Satz 1. *Ist A ein einfacher nichttrivialer Jacobsonscher Radikalring* (also $A^2=$ $=A\neq 0$), *für welchen einerseits der durch die Menge $\hat{x}$ erzeugte Unterring $\{\hat{x}\}$ für jedes $x\in A$ kommutativ ist, und welcher andererseits eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) *A hat kein von Null verschiedenes Element, das gleichzeitig sowohl ein Linksnullteiler, als auch ein Rechtsnullteiler ist;*

(ii) *A ist anordnungsfähig;*

(iii) *A hat kein von Null verchiedenes nilpotentes Element;*

(iv) *A ist nullteilerfrei.*

Dann ist die Menge $\hat{x}$ für jedes $0\neq x\in A$ unendlich.

BEWEIS ist derselbe, wie in meiner Arbeit [8].

Einen Ring A nennen wir Ω-Ring, wenn $\hat{x}=\hat{y}$ für jedes Paar von Null verschiedenen Elementen $x, y \in A$ gilt.

Dann hat A nur die trivialen Ideale 0 und A selbst.

Satz 2. *Jeder Ω-Ring ohne nilpotente Elemente hat über seinem natürlichen Primkörperoperatorbereich $K_p(p=0$ oder $p \geqq 2)$ nur absolut transzendente Elemente. Wieterhin existiert für jedes von Null verschiedenes $a \in A$ und für jedes Polynom $f(x) \in xZ[x]$ ein Element $b \in A$ derart, daß $a=f(b)$ gilt. Ist insbesondere $x_1^m+y_1^m \neq 0$, so kann die Fermatsche „Grossgleichung" $x_1^m+y_1^m=z_1^m$ in Ω-Ringen für jedes $m \geqq 1$ gelöst werden.*

BEWEIS. Aus $(yAx)^2=0$ folgt $yAx=0$ und somit ergibt sich, da A ein Primring ist, die Nullteilerfreiheit von A. Nach dem Satz 1.10.1 von N. JACOBSON [3] ist also jedes Element absolut transzendent über K_p, wobei $p=0$ oder p eine Primzahl ist (denn die additive Gruppe A^+ von A ist wegen $pA=0$ oder $pA=A$ entweder eine elementare p-Gruppe, oder A^+ ist teilbar und torsionsfrei (=divisible)). Es seien weiterhin $0 \neq a \in A$ und $f(x) \in xI[x]$ beliebig vorgegeben. Dann ist $f(a)=a^* \neq 0$ und wegen $\hat{a}=\hat{a}^*$ existiert ein $b \in A$ mit der Bedingung

$$a^* = f(a) = a\varphi_b = (1-b)a(1-b)^{-1}.$$

Es sei nun $c=a\varphi_{b^*}=(1-b)^{-1}a(1-b)$, wobei $b+b^*=bb^*=b^*b$. Dann erhält man offenbar

$$f(c) = f(a\varphi_{b^*}) = f(a)\,\varphi_{b^*} = a\varphi_b\,\varphi_{b^*} = a \cdot 1 = a,$$

denn wir haben trivialerweise das Produkt $\varphi_b\varphi_{b^*}$, als den guten identischen Automorphismus 1 von A.

Es sei jetzt $x_1^m+y_1^m$ mit c bezeichnet; so ergibt sich incbesondere für das Polynom z^m offenbar $x_1^m+y_1^m=z_1^m$, was zu beweisen war.

Satz 3. *Es sei A ein nullteilerfreier Jacobsonscher Ω-Radikalring, $x+x'=$ $=xx'=x'x$, und nehmen wir an, daß aus $2y-y^2 \in \{x, x'\}$ (hierbei bezeichnet $\{\ldots\}$ die Unterringerzeugung), schon $y \in \{x, x'\}$ folgt. Dann ist der Zentralisator Z_x von x echt gößer, als $\{x, x'\}$.*

BEWEIS. Man hat $x'=(1-z)x(1-z)^{-1}$ und daher $x=(1-z)^{-1}x'(1-z)$ weiterhin $c=2z-z^2 \in Z_x \cap Z_{x'}$. Offenbar ergibt sich $\{x, x'\} \subseteqq Z_x \cap Z_{x'}$ und $c \in Z_x \cap Z_{x'}$. Wäre nun $z \in \{x, x'\}$, so ergäbe sich $x'=x$, folglich $x+x-x^2=0$, was der absoluten Transzendenz von x über K_p widerspricht. Die Tatsache $c \notin \{x, x'\}$ beweist also den Satz.

Problem 1. Ist der Satz 3 von [8] auch in seiner ursprünglichen Gestalt richtig? (Der Sasiadasche Ring [6] enthält Nullteiler!)

*Problem 2.** Existiert überhaupt ein nichttrivialer Ω-Ring ohne nilpotente Elemente?

Bemerkung. Bezüglich der „Bemerkung" meiner Arbeit [8], Seite 269, erwähne ich, daß das erste *Beispiel* für eine Klasse von halbeinfachen Radikalringen von W. A. ANDRUNAKIEWITSCH [1] (Radikale von assoziativen Ringen, *Mat. Sbornik*)

*) Vgl. P.M. Cohn, The embedding of radical rings in simple radical ring, *Bull. London Math. Soc.* **3** (1971), 185—188), *Correction* ib. **4** (1972), 54, **5** (1973), 322.

gegeben wurde. Solche Ringe gab er, als Boolesche Ringe, an. Später hat STEWART [7] *alle* diesen Klassen systematisch und explizit bestimmt (Semisimple radical classes, *Pacific J. Math.*) Unabhängig von Stewart hat ein bißchen später R. WIEGANDT [11] auch *Beispiele* solcher Klassen angegeben. Diese Wiegandtschen Klassen sind trivialerweise auch homomorph abgeschlossen, siehe für diese Beispiele auch Satz 1 meiner Arbeit [8], und er hat auch die *homomorph abgeschlossenen* halbeinfachen Klassen von Ringen bestimmt, die mit den im Satz 1 von [8] erwähnten Beispielen übereinstimmen (siehe R. WIEGANDT [12], [13] und [14]).

Literaturverzeichnis

[1] W. A. ANDRUNAKIEWITSCH, Radikale von assoziativen Ringen, I, *Mat. Sbornik* **44** (1958), 179—212; II, **55** (1961), 329—346.

[2] N. DIVINSKY, Rings and Radicals, *London—Ontario* (1965).

[3] N. JACOBSON, Structure of Rings, *Providence* (1956, 1964).

[4] A. KERTÉSZ, Vorlesungen über Artinsche Ringe, *Budapest* (1968).

[5] L. RÉDEI, Algebra, I, *Leipzig* (1959).

[6] E. SASIADA, Solution of the problem of existence of simple radical ring, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe* III, **9** (1961), 257.

[7] P. STEWART, Semisimple radical classes, *Pac. J. Math.* **32** (1970), 249—254.

[8] F. SZÁSZ, Beiträge zur Radikaltheorie der Ringe, *Publ. Math. (Debrecen)* **17** (1970) 267—272.

[9] F. SZÁSZ—R. WIEGANDT, On the dualization of subdirect embeddings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **20** (1969), 289—302.

[10] F. SZÁSZ, Radikale der Ringe (Monographie, *Budapest*, 1975).

[11] R. WIEGANDT, Radical-semisimple classes, *Periodica Math. Hungar.* **3** (1973), 243—245.

[12] R. WIEGANDT, Homomorphically closed semisimple classes, *Studia Universitatis Babes—Bolyai, Cluj, Ser. Math.—Phys.* Tasc. **2**, 1972.

[13] R. WIEGANDT, Semisimple properties preserved by surjections, *Colloquia Math. Soc. Bolyai János* **6**, "Rings, Modules, Radicals", *Keszthely (Hungary)* (1971), 507—514.

[14] R. WIEGANDT, Local and residual properties in bicategories, *Acta Sci. Math. Szeged* **32** (1971), 195—205.

[15] L. C. A. VAN LEEUWEN—T. L. JENKINS, A note on radical semisimple classes, *Publ. Math. (Debrecen)*, **21** (1974), 179—184.

(Eingegangen am 25. April 1974.)