Über ein orthonormiertes Funktionensystem von D. E. Menchoff

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

1. In mehreren Untersuchungen spielt das folgende Lemma von D. E. MENCHOFF [1] eine wichtige Rolle.

Es sei $p(\geqq 2)$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es $\mu(\leqq 1)$, M, C positive, von p unabhängige Zahlen, ein im Intervall $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{2p^2}(x)$ und ein Intervall $I(\subseteqq [0, 1])$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

es gelten

$$|\varphi_n(x)| \leqq M \quad (x \in [0, 1], n = 1, \dots, 2p^2),$$

$$\text{mes}\,(I) \geqq \mu,$$

weiterhin für jeden Punkt $x \in I$ gibt es einen von x abhängigen Index $m = m(x)$ $(< 2p^2)$ mit

$$\varphi_n(x) > 0 \quad (n = 1, \dots, m(x)),$$

$$\sum_{n=1}^{m(x)} \varphi_n(x) \geqq Cp \log p.$$

Der originelle Beweis dieses Lemmas ist ziemlich kompliziert. In dieser Note werden wir für dieses Lemma einen einfachen Beweis geben.

2. Wir benützen den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. ([1]) *Es sein d und q positive ganze Zahlen $(0 < d < q)$. Zu jedem Indexpaar (i, j) mit $1 \leqq i, j \leqq q$, $|i-j| = d$ soll eine von Null verschiedene Zahl $\alpha_{i,j}$ zugeordnet werden; wir bezeichnen mit β_d das Maximum der absoluten Beträge der Zahlen $\alpha_{i,j}$. In jedem Intervall (u, v) mit*

$$v - u > 2\beta_d$$

können dann Funktionen $\omega_l(x)$ $(l = 1, \dots, q)$ derart definiert werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden: $\omega_l(x)$ ist eine Treppenfunktion, und es gilt:

$$|\omega_l(x)| = 1 \quad (u < x \leqq v;\ l = 1, \dots, q),$$

$$\int_u^v \omega_i(x)\omega_j(x)\,dx = -\alpha_{i,j} \quad (|i-j| = d,\ 1 \leqq i, j \leqq q),$$

$$\int_u^v \omega_i(x)\omega_j(x)\,dx = 0 \quad (i \neq j,\ |i-j| \neq d,\ 1 \leqq i, j \leqq q).$$

3. Wir gehen von einem Funktionensystem von S. Kaczmarz [2] aus. Im Intervall $[0, 4)$ definieren wir die Funktionen $\psi_1(x), \ldots, \psi_{2p}(x)$ folgenderweise: es sei

$$\psi_n(x) = \frac{1}{k-p-n-1/2} \quad \left(x \in \left[\frac{k-1}{p}, \frac{k}{p} \right); \; k = 1, \ldots, 4p, \; n = 1, \ldots, 2p \right).$$

Für die Zahlen

$$\bar{\alpha}_{i,j} = \int_0^4 \psi_i(x) \psi_j(x) \, dx \quad (i, j = 1, \ldots, 2p)$$

gilt offensichtlich

$$C_1/p \leqq \bar{\alpha}_{n,n} \leqq C_2/p \quad (n = 1, \ldots, 2p). \tag{1}$$

(Im folgenden bezeichnen $C_1, C_2, \ldots$ positive, von p unabhängige Konstanten.) Ferner haben wir für $i > j$:

$$\bar{\alpha}_{i,j} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{(k-p-i-1/2)(k-p-j-1/2)} =$$

$$= \frac{1}{p(i-j)} \sum_{k=1}^{4p} \left\{ \frac{1}{k-p-i-1/2} - \frac{1}{k-p-j-1/2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{p(i-j)} \left\{ \sum_{k=1-p-i}^{3p-i} \frac{1}{k-1/2} - \sum_{k=1-p-j}^{3p-j} \frac{1}{k-1/2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{p(i-j)} \left\{ \sum_{k=1-p-i}^{-p-j} \frac{1}{k-1/2} - \sum_{k=3p-i+1}^{3p-j} \frac{1}{k-1/2} \right\}.$$

Daraus folgt

$$|\bar{\alpha}_{i,j}| \leqq \frac{1}{p(i-j)} \left\{ \frac{i-j}{p+j+1/2} + \frac{i-j}{3p-i-1/2} \right\} \leqq \frac{2}{p^2} \quad (i, j = 1, \ldots, 2p, \; i \neq j). \tag{2}$$

Um die Funktionen $\psi_n(x)$ auch im Intervall $[4, 5]$ zu definieren, teilen wir das Intervall $[4, 5]$ in $\bar{N} = 2p(2p-1)$ Teilintervalle gleicher Länge $\bar{I}_{i,j}$ $(1 \leqq i, j \leqq 2p, i \neq j)$. Es sei

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{N|\bar{\alpha}_{n,i}|}{2} & (x \in \bar{I}_{n,i}, \; i = 1, \ldots, 2p, \; i \neq n), \\ \dfrac{N|\bar{\alpha}_{n,i}|}{2} \operatorname{sign} \alpha_{n,i} & (x \in \bar{I}_{i,n}, \; i = 1, \ldots, 2p, \; i \neq n), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

$(n = 1, \ldots, 2p)$. Offensichtlich bilden die Funktionen $\psi_n(x)$ $(n = 1, \ldots, 2p)$ ein orthogonales System im Intervall $[0, 5]$, und aus (1), (2) und (3) folgt leicht:

$$|\psi_n(x)| \leqq C_3 \quad (x \in [0, 5], \; n = 1, \ldots, 2p), \tag{4}$$

$$C_4/p \leqq \int_0^5 \psi_n^2(x) \, dx \leqq C_5/p \quad (n = 1, \ldots, 2p). \tag{5}$$

Ist weiterhin $x\in[2, 3)$, so gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $\nu(x)(<p)$ derart, daß

$$x\in\left[\frac{2p+\nu(x)}{p},\ \frac{2p+\nu(x)+1}{p}\right).$$

Nach der Definition von $\psi_n(x)$ ist also mit der natürlichen Zahl $\nu(x)$ $(<2p)$ $(\nu(x)\geqq p)$

$$\psi_n(x)>0 \quad \bigl(x\in[2, 3),\ n=1, \ldots, \nu(x)\bigr), \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\nu(x)}\psi_n(x)=\sum_{n=1}^{\nu(x)}\frac{1}{2p+\nu(x)+1-p-n-1/2}=\sum_{n=1}^{\nu(x)}\frac{1}{n-1/2}\geqq C_6\log p. \tag{7}$$

Auf Grund von (5) gibt es Konstanten γ_n $(n=1, \ldots, 2p)$ mit

$$C_7\leqq\gamma_n\leqq C_8 \quad (n=1, \ldots, 2p), \tag{8}$$

$$\frac{1}{\gamma_n^2}\int_0^5\psi_n^2(x)\,dx=\frac{1}{p} \quad (n=1, \ldots, 2p). \tag{9}$$

Es sei

$$\chi_n(x)=\gamma_n^{-1}\psi_n(x) \quad (x\in[0, 5],\ n=1, \ldots, 2p).$$

Die Treppenfunktionen $\chi_n(x)$ $(n=1, \ldots, 2p)$ bilden im Intervall $[0, 5]$ ein orthogonales System, und aus (4), (6), (7), (8) und (9) erhalten wir

$$|\chi_n(x)|\leqq C_9 \quad (x\in[0, 5],\ n=1, \ldots, 2p), \tag{10}$$

$$\int_0^5\chi_n^2(x)\,dx=\frac{1}{p} \quad (n=1, \ldots, 2p), \tag{11}$$

und zu jedem Punkt $x\in[2, 3)$ gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $\nu(x)$ $(<2p)$ derart, daß

$$\chi_n(x)>0 \quad \bigl(x\in[2, 3),\ n=1, \ldots, \nu(x)\bigr), \tag{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\nu(x)}\chi_n(x)\geqq C_{10}\log p \tag{13}$$

erfüllt sind.

Es sei weiterhin

$$\varphi_{kp+n}(x)=\chi_n(x) \quad (n=1, \ldots, 2p,\ k=0, \ldots, p-1,\ x\in[0, 5]).$$

Auf Grund von (11), durch Anwendung des Hilfsatzes kann man die Definition der Funktionen $\omega_n(x)$ $(n=1, \ldots, 2p^2)$ auf das Intervall $(5, 8]$ derart ausbreiten, dass $\omega_n(x)$ $(n=1, \ldots, 2p^2)$ im Intervall $[0, 8]$ Treppenfunktionen sind, und in diesem Intervall ein orthogonales System bilden, weiterhin gilt

$$|\omega_n(x)|=1 \quad \bigl(x\in(5, 8],\ n=1, \ldots, 2p^2\bigr).$$

So ist

$$\int_0^5\omega_n^2(x)\,dx=\frac{1}{p}+3 \quad (n=1, \ldots, 2p^2).$$

Es sei endlich

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{8(1/p+3)}}\,\omega_n\left(\frac{x}{8}\right) \quad (n = 1, \ldots, 2p^2).$$

Aus (10), (12) und (13) folgt, daß für diese Funktionen $\varphi_n(x)$ die Bedingungen des Lemmas mit $\mu = \frac{1}{8}$ und $I = \left[\frac{2}{8}, \frac{3}{8}\right)$ erfüllt sind.

Bibliografie

[1] D. E. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Recueil math. Moscou*, **3** (43) (1938), 103—120.

[2] S. Kaczmarz, Notes on orthogonal series, II, *Studia Math.*, **5** (1934), 103—106.

(Eingegangen am 25. September 1974.)