О совпадении центральных рядов в сплетении, I

В. СУЩАНСКИЙ (Киев) и П. ЛАКАТОШ *) (Дебрецен)

Введение

Известно [2], что сплетение $A \wr B$ групп A и B является нильпотентным тогда и только тогда, когда A и B суть p-группы (p-простое), причем B конечная, а A имеет конечную экспоненту. Однако, установить класс нильпотентности $A \wr B$ в общем случае не удается. Либек [3] установил его лишь в случае, когда группы A и B абелевы.

Еще с большими трудностями связано описание верхнего или нижнего центральных рядов в сплетении. Л. А. Калужнин [1] описал полностью верхний и нижний центральные ряды для кратных сплетений циклической группы порядка p на себя. В [6] этот результат обобщается на случай кратных сплетений конечной элементарной абелевой группы на себя. Оказалось, что здесь верхний и нижний центральные ряды совпадают. Кроме этого Мельдрум [4] описал верхний α-центральный ряды сплетений циклической p-группы A с конечной абелевой p-группой B (т. е. пересечения членов верхнего центрального ряда с базой сплетения). Вопрос об установлении нижнего центрального ряда сплетения хотя бы произвольных абелевых групп пока открыт.

В работе рассматриваются сплетения абелевых групп, верхний и нижний центральные ряды которых совпадают.

Установлено, что имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Нижний и верхний центральные ряды сплетения $W=A \wr B$ двух абелевных p-групп совпадают тогда и только тогда, когда группы A и B элементарны абелевы.*

При доказательстве устанавливаются базисы членов нижнего центрального ряда сплетения циклической группы порядка p на конечную абелевую p-группу.

Напомним определение сплетения и фиксируем обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть $\{A(b)\}_{b\in B}$-семейство изоморфных копий группы A, индексированных элементами группы B и

$$K = A^{(B)} = \prod_{b\in B} A(b)$$

*) Piroska Lakatos

-прямое произведение групп этого семейства. Элементы из K можно рассматривать как отображения из B в A, которые лишь для конечного числа аргументов $b\in B$ принимают значения, отличные от единицы. При этом, групповая операция определяется равенством

$$(f\cdot g)(b) = f(b)\cdot g(b),$$

для любого $b\in B$. Определим теперь мономорфизм из B в группу автоморфизмов группы $A^{(B)}$, сопоставляя каждому элементу $b\in B$ автоморфизм $f\to f^b$, где для всех $x\in B$ имеем $f^b(x)=f(x\cdot b^{-1})$. Расщепляемое расширение группы $A^{(B)}$ при помощи группы B, рассматриваемой как группа автоморфизмов $A^{(B)}$, называется (ограниченным) сплетением групп A и B (в таком же порядке). Очевидно, сплетение содержит подгруппы, изоморфные B и K, которые мы будем обозначать теми же символами. Нормальный делитель K называется иазой сплетения. Нам удобно будет в дальнейщем обозначать иногда элементы бз $A^{(B)}$ в виде произведеный

$$a(b_1)\cdot a(b_2)\cdot \dots \cdot a(b_t)$$

В этих обозначениях сплетение W групп A и B можно определить так:

$$W = \{K, B;\ b_1^{-1}a(b)b_1 = a(bb_1),\ a\in A;\ b, b_1\in B\}.$$

Коммутатор двух элементов x, y будем обозначать символом $[x, y]$. Если $b\in B$ и $f\in K$, то $[f, b]=f^{-1}f^b$. На протяжении всей статьи рассматриваются лишь нильпотентные сплетения, поэтому в дальнейшем мы всегда считаем, что B есть конечная p-группа, а p-группа A имеет конечный показатель, не оговаривая специально этого каждый раз.

§ 1. Вспомогательные результаты

При изучений групп, каждая из которых раскладывается в прямое произведение, могут оказаться полезными теоремы, устанавливающие связи между свойствами сплетений самих групп и свойствами сплетений их сомножителей.

Приведем некоторые из сюда относящихся утверждений, которые будут полезны нам в дальнейшем.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$, и B-произвольные абелевы p-группы и $U_i=A_i \wr B$, $A=A_1\times A_2\times\dots\times A_n$, $U=A \wr B$. Пусть также φ_i-естественное вложение группы A_i^B и A^B и ψ_i-проекция A^B на A_i^B. Отображение φ_i можно продолжить до мономорфизма $\bar\varphi_i$ группы U_i в группу U, полагая для любого $bf\in U_i$:

$$\bar\varphi_i(bf) = b\varphi_i(f).$$

Образ группы U_i при этом отображении будем обозначать символом $\overline{U}_i$. Аналогично, проектирование ψ_i индуцирует гомоморфизмы $\bar\psi_i$ группы U на группы U_i, действующие на произвольный элемент bf группы U так

$$\bar\psi_i(bf) = b\cdot\psi_i(f).$$

Действительно, имеем:

$$\bar\psi_i(b\cdot f\cdot b_1 f_1) = \bar\psi_i(b\cdot b_1\cdot f\cdot f_1^b) = b\cdot b_1\cdot\psi_i(f\cdot f_1^b) = b\cdot b_1\psi_i(f)\psi_i(f_1^b).$$

С другой стороны

$$\overline{\psi}_i(b\cdot f)\overline{\psi}_i(b_1 f_1) = b\psi_i(f)b_1\psi_i(f_1) = bb_1\psi_i(f)[\psi_i(f)]^b.$$

Но, очевидно $\psi_i(f^b)=[\psi_i(f)]^b$, т. е. отображение ψ_i — гомоморфизм.

Лемма 1. (См. также [8]). *Группа U является подпрямым произведением групп $\overline{U}_i$.*

Действительно, любой элемент $b\cdot f$ из U можно записать в виде $b\cdot f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n$, где $f_i=\overline{\varphi}_i(\overline{\psi}_i(f))$. Все элементы $b\in B$ и $f_i\in A_i^B$ при такой записи встречаются. Легко видеть также, что такое разложение однозначно.

Отметим, что правило умножения для элементов из U, так записанных, примет следующий вид:

$$(1')\qquad b\cdot f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n\cdot c\cdot g_1\cdot g_2\cdot\ldots\cdot g_n = b\cdot c\cdot f_1\cdot\ldots\cdot f_n\cdot g_1^b\cdot\ldots\cdot g_n^b.$$

Коммутант сплетения U содержится в его базе. Поэтому элементы любого члена нижнего центрального ряда группы U (отличного от U) можно записать в виде $f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n$.

Теорема 2. *Элемент $f_1 f_2\ldots f_n$ содержится в k-ом члене нижнего центрального ряда группы U тогда и только тогда, когда элементы $\bar{f}_i=\overline{\varphi}_i^{-1}(f_i)$ содержатся в k-ых членах $\Gamma_k(U_i)$ нижних центральных рядов групп U_i для $i=1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство этого утверждения проведем индукцией по числу k.

Случай $k=0$-база индукции тривиален.

Пусть $f=f_1 f_2\ldots f_n$ содержится в k-ом члене нижнего центрального ряда группы U. Это означает, что найдутся такие элементы $g_1, g_2, \ldots, g_t$, содержащиеся в $\Gamma_{k-1}(U)$ и элементы $b_1, b_2, \ldots, b_t\in B$, для которых имеем

$$f = \prod_{i=1}^{t} g_i^{-1}\cdot g_i^{b_i}.$$

Запишем разложение для элементов g_i:

$$g_i = g_i^{(1)}\cdot g_i^{(2)}\cdot\ldots\cdot g_i^{(n)}$$

где $g_i^{(j)}\in\overline{U}_j$, $i=1, 2, \ldots, t$, $j=1, 2, \ldots, n$. Легко видеть, что для каждого $j=1, 2, \ldots, n$ имеем

$$\bar{f}_j = \prod_{i=1}^{t}(\overline{g_i^{(j)}})^{-1}\cdot(\overline{g_i^{(j)}})^{b_i},$$

причем, согласно предположению индукции, элементы $\bar{g}_i^{(j)}$ содержатся в $\Gamma_{k-1}(U_j)$. Отсюда получаем, что элемент $\bar{f}_i$ содержится в k-ом члене нижнего центрального ряда группы U_j ($j=1, 2, \ldots, n$), что и требуется.

Наоборот, если элемент $\bar{f}_i$ содержится в $\Gamma_k(U_i)$, то поскольку отображение $\overline{\varphi}_i$ есть гомоморфизм, элемент $\overline{\varphi}_i(\bar{f}_i)=f_i$ содержится в k-ом члене нижнего центрального ряда группы U.

Значит и любое произведение $f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n$ элементов $f_i\in\overline{U}_i$, для которых $\bar{f}_i\in\Gamma_k(U_i)$ будет содержатся в $\Gamma_k(U)$. Теорема доказана.

Следствие: Если группы $U_1, U_2, \ldots, U_n$ нильпотентны класса $k_1, k_2, \ldots, k_n$ соответсвенно, то U-нильпотентная группа класса мах $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$.

Сформулируем и докажем теперь аналогичную теорему о строении верхнего центрального ряда группы U.

Теорема 3. *Элемент* $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ *содержится в* k*-ом члене верхнего центрального ряда* $Z_k(U)$ *группы* U *тогда и только тогда, когда каждый из элементов* $\bar{f}_i$ *содержится в* k*-ом члене верхнего центрального ряда* $Z_k(U_i)$ *группы* U_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство снова проведем индукцией по k. Известно (см. например [7]), что центр сплетения U состоит из всех постоянный функций. Поскольку функция f постоянна тогда и только тогда, когда постоянными являются функции f_i, в случае $k=1$ утверждение теоремы правильно.

Пусть $f_1=f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$-элемент из $Z_k(U)$. Это значит, для любого $b \in B$, $[f, b]=f^{-1} \cdot f^b \in Z_{k-1}(U)$. Поскольку группа $A^{(B)}$ абелева, то учитывая правило умножения $(1')$ имеем

$$f^{-1} \cdot f^b = (f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)^{-1} \cdot f_1^b \cdot f_2^b \cdot \ldots \cdot f_n^b = f_1^{-1} \cdot f_2^{-1} \cdot \ldots \cdot f_n^{-1} \cdot f_1^b \cdot f_2^b \cdot \ldots \cdot f_n^b =$$
$$= (f_1^{-1} \cdot f_1^b) \cdot (f_2^{-1} \cdot f_2^b) \cdot \ldots \cdot (f_n^{-1} \cdot f_n^b).$$

Так как элемент $f^{-1} \cdot f^b$ содержится в $Z_{k-1}(U)$, то, согласно предположению индукции имеем, что $\overline{f_i^{-1} \cdot f_i^b}$ для каждого $i=1, 2, \ldots, n$ содержится в $Z_{k-1}(U)$. Учитывая, что $\overline{f_i^{-1} \cdot f_i^b} = \bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b = \bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b$, получаем требуемое.

Наоборот, если $\bar{f}_i \in Z_{k-1}(U_i)$, то для любого $b \in B$ элемент $\bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}^b$ содержится в $Z_{k-1}(U_i)$. По предположению индукции и учитывая равенство $\bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b = \overline{f_i^{-1} \cdot f_i^b}$, получаем, что $f_i^{-1} \cdot f_i^b \in Z_{k-1}(U)$.

Значит и любое произведение $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ элементов f_i, для которых $\bar{f}_i \in Z_k(U_i)$ содержится в $Z_k(U)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательств теорем 2. и 3. легко усмотреть, что эти утверждения остаются правильными, если вместо конечной последовательности групп $A_1, A_2, \ldots, A_n$, рассматривать бесконечную последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ и полагать, что группа A является их прямым (декартовым) произведением.

Рассмотрим теперь случай, когда другая из сплетаемых групп раскладывается в прямое произведение сомножителей. При этом, в силу установленных выше теорем, можно считать, что крыша сплетения (т. е. группа A) является циклической.

Итак, пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$-произвольные конечные абелевые p-группы, A-циклическая порядка p^α и пусть $B=B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, $V=A \wr B$, $V_i=A \wr B_i$, $(i=1, 2, \ldots, n)$. Группу A будем рассматривать как аддитивную группу кольца вычетов по модулю p^α и будем обозначать символом $*$ операцию умножения в этом кольце (групповая операция в A, как и прежде, обозначается символом $\cdot$). Для каждого набора $f_1, f_2, \ldots, f_n$ элементов $f_i \in A^{B_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ определим функцию $f=f_1 * \ldots * f_n \in K$, полагая, что она для произвольного элемента $b=b_1 \cdot \ldots \cdot b_n \in B$ принимает значение

$$f(b) = f_1(b_1) * f_2(b_2) * \ldots * f_n(b_n).$$

Лемма 2. *Функции вида* $f_1 * f_2 * \ldots * f_n$, *где* f_i *пробегает всю группу* A^{B_i}, $i=1, 2, \ldots, n$ *порождают группу* K.

Действительно, функции из K, принимающие неединичные значения лишь для одного элемента из B, являются системой образующих для этой группы. Но каждая такая функция, как легко видеть, может быть записана в требуемом виде.

Таким образом, любой элемент $b\cdot f\in V$ можно записать в виде

$$b\cdot f = b\cdot \prod_{i=1}^{k} f_1^{(i)} * f_2^{(i)} * \ldots * f_n^{(i)},$$

для подходящим образом выбраных элементов $f_j^{(i)}$. Однако, такая запись не является однозначной.

Из самого определения операции $*$ следует, что для любых $f_i\in A^{B_i}$ имеют место такие равенства:

а) $(f_1 * \ldots * f_{k-1} * f_k * f_{k+1} * \ldots * f_n)\cdot(f_1 * \ldots * f_{k+1} * f_k' * f_{k+1} * \ldots * f_n) =$

$= f_1 * \ldots * f_{k-1} * (f_k \cdot f_k') * f_{k+1} * \ldots * f_n$

б) $e * f_2 * \ldots * f_n = f_1 * e * \ldots * f_n = f_1 * f_2 * \ldots * f_{n-1} * e = e$

в) $(f_1 * f_2 * \ldots * f_n)^{-1} = f_1^{-1} * f_2 * \ldots * f_n = f_1 * f_2^{-1} * \ldots * f_n = f_1 * f_2 * \ldots * f_n^{-1}$

г) $(f_1 * f_2 * \ldots * f_n)^{(b_1\cdot b_2\cdot \ldots \cdot b_n)} = f_1^{b_1} * f_2^{b_2} * \ldots * f_n^{b_n}$

(в равенстве б) символом e обозначена функция, тождественно равная единице (т. е. нулю кольца A); в равенстве г) $(b_1\cdot b_2\cdot \ldots \cdot b_n$-произвольный элемент из B).

Приведем теперь ряд нужных коммутаторных формул, которые доказываются с использованием стандартных для вычисления коммутаторов произведений элементов а также равенств а)—г).

(1) $[b_i, f_1 * \ldots * f_n] = (f_1 * \ldots * f_n)^{-1}\cdot(f_1 * \ldots * f_n)^{b_i} = (f_1 * \ldots * f_i^{-1} * \ldots * f_n) *$

$* (f_1 * \ldots * f_i^{b_i} * \ldots * f_n) = f_1 * \ldots * f_i^{-1} * f_i^{b_i} * \ldots * f_n = f_1 * \ldots * [b_i, f_i] * \ldots * f_n.$

(2) $[b_1\cdot b_2\cdot \ldots \cdot b_n, f_1 * f_2 * \ldots * f_n] = \prod_{i=1}^{n} (f_1 * \ldots * f_{i-1} * [b_i, f_i] * \ldots * f_{i+1} * \ldots * f_n)^{c_i}$

где $c_i = b_{i+1}\cdot b_{i+2}\cdot \ldots \cdot b_n$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ и $e_n = 1$.

(3) $$\left[b, \prod_{i=1}^{k} (f_1^{(i)} * \ldots * f_n^{(i)})\right] = \sum_{i=1}^{k} [b, f_1^{(i)} * f_2^{(i)} * \ldots * f_n^{(i)}].$$

Определим на группах V и V_i целозначную функцию $\varkappa(x)$, полагая для $bf\in V$ $(b_i f_i\in V_i)$ $\varkappa(b\cdot f) = k$ тогда и только тогда, когда $bf\in \Gamma_k(V)$ $(b_i f_i \in \Gamma_k(V_i))$, $k=0, 1, \ldots$

Теорема 4. *Если A-циклическая группа порядка p, то элемент*

$$f = \prod_{i=1}^{t} f_1^{(i)} * f_2^{(i)} * \ldots * f_n^{(i)}$$

содержится в $\Gamma_k(V)$ $(k \geqq 0)$ *тогда и только тогда, когда выполняется следующее неравенство*

$$d(f) = \min_i \sum_{j=1}^{n} \varkappa(f_j^{(i)}) \geqq k.$$

Доказательство снова проведем индукцией. Если $k=0$ утверждение теоремы выполняется тривиальным образом.

Пусть элемент f содержится в $\Gamma_k(V)$. По определению это означает, что существуют такие элементы $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(r)} \in B$ и $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(r)} \in \Gamma_{k-1}(V)$ для которых имеем:

$$f = \prod_{i=1}^{r} [b^{(i)}, g^{(i)}].$$

Элементы $g^{(i)}$ можно записать в виде

$$g^{(i)} = \prod_{j=1}^{s_i} g_1^{(i,j)} * g_2^{(i,j)} * \ldots * g_n^{(i,j)},$$

для подходящих $g_l^{(i,j)} \in A^{B_l}$.

Используя это, запишем по формуле (3), элемент f так:

$$f = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s_i} [b^{(i)}, g_1^{(i,j)} * g_2^{(i,j)} * \ldots * g_n^{(i,j)}].$$

Кроме этого, так как $b^{(i)}$ можно записать в виде $b_1^{(i)} \cdot b_2^{(i)} \cdot \ldots \cdot b_n^{(i)}$, для подходящих $b_j^{(i)} \in B_j$, используя формулу (2), отсюда получаем, что

$$f = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s_i} \prod_{l=1}^{n} (g_1^{(i,j)} * \ldots * [b_l, g_l^{(i,j)}] * \ldots * g_n^{(i,j)})^{c_l}, \tag{4}$$

где c_l определены как и в случае (2). Согласно предположению индукции $d(g^{(i)}) \geqq k-1$. Отсюда поскольку $\varkappa(f^c) = \varkappa(f)$, для любых f и c, из равенства (4) получаем, что $d(f) \geqq k$. Наоборот, если $d(f) \geqq k$, то для любого i $\varkappa(f_1^{(i)} * \ldots$ $\ldots * f_n^{(i)}) \geqq k$ и (т. к. $k > 0$) найдется l, для которого $f_l \in \Gamma_k(V_l)$. Отсюда имеем, что $f_l = \prod_{j=1}^{m} [b_l^{(j)}, f_l^{(j)}]$. Согласно равенству a) получаем

$$f_1^{(i)} * \ldots * f_n^{(i)} = \prod_{j=1}^{m} f_1 * \ldots * [b_l^{(j)}, f_l^{(j)}] * \ldots * f_n,$$

а используя (1) теперь имеем

$$f_1^{(i)} * \ldots * f_n^{(i)} = \prod_{j=1}^{m} [b_l^j, f_1 * \ldots * f_l^{(j)} * \ldots * f_n],$$

причем для каждого j $\varkappa(f_1 * f_2 * \ldots * f_l^{(j)} * \ldots * f_n) < \varkappa(f_1 * \ldots * f_j * \ldots * f_n)$. Применяя те же рассуждения к элементам $f_1 * \ldots * f_l^{(j)} * \ldots * f_n$, мы можем добиться через какое-то число шагов, что элемент $f_1 * f_2 * \ldots * f_n$ запишется в виде произведения коммутаторов подходящим образом выбраных элементов $b_l^{(t)} \in B_l$ и таких функций $f^{(t)} = f_1 * \ldots * f_l^{(t)} * \ldots * f_n$, для которых $\varkappa(f^{(t)}) = k-1$. Согласно предположению индукции каждая из этих функций содержится в $\Gamma_{k-1}(V_l)$, а это означает, что $f_1^{(i)} * \ldots * f_n^{(i)} \in \Gamma_k(V)$, что есть и функция f там содержится.

§ 2. Условия совпадения центральных рядов сплетений абелевых групп

Рассмотрим сначала более подробно сплетение $W_n = A\, r\, B$ циклической группы $A = \{a\}$ порядка p на прямое произведение $B = \{b_1\} \times \{b_2\} \times \ldots \times \{b_n\}$ циклических групп $\{b_i\}$ порядков p^{α_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Условимся употреблять ряд удобных сокращений. Нам будут часто встречаться n-мерные векторы, координаты которых являются натуральными числами. Мы будем обозначать их как обычно:

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_n).$$

В частности, полагаем

$$\mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

и для $0 < j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqq n$ k-тое место определяем вектор $\mathbf{e}(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ равенством

$$\mathbf{e}(j_1, j_2, \ldots, j_k) = \mathbf{e}_{j_1} + \mathbf{e}_{j_2} + \ldots + \mathbf{e}_{j_k}.$$

Вектор же $\mathbf{e}(1, 2, \ldots, n) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_n$ обозначим просто символом $\mathbf{e}$. Если $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ некоторый вектор, то определяем $p^{\mathbf{j}}$ как вектор $(p^{j_1}, p^{j_2}, \ldots, p^{j_n})$. Для вектора

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n), \quad k_l \leqq j_l \quad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

полагаем, что

$$C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}} = C_{j_1}^{k_1} \cdot C_{j_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{j_n}^{k_n}.$$

Кратные произведения вида

$$\prod_{j_1=k_1}^{t_1} \prod_{j_2=k_2}^{t_2} \cdots \prod_{j_s=k_s}^{t_s} f(j_1, j_2, \ldots, j_s),$$

которые нам будут часто встречаться, мы будем обозначать так

$$\prod_{\mathbf{j}=\mathbf{k}}^{\mathbf{t}} f(\mathbf{j}).$$

Удобно также функции вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} a & \text{если} \quad x_1 = b_1^{i_1}, \quad x_2 = b_2^{i_2}, \ldots, x_n = b_n^{i_n} \\ 1 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

обозначать просто символом

$$a(i_1, i_2, \ldots, i_n) = a(\mathbf{i}) \quad (1 \leqq i_k \leqq p^{\alpha_k},\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти элементы, очевидно, образуют базис абелевой группы k, то есть K является прямым произведением $p^{\Sigma \alpha_i}$ экземпляров циклической группы порядка p.

Для каждого набора $(j_1, j_2, \ldots, j_n) = \mathbf{j}$, $1 \leqq j_k \leqq p^{\alpha_k}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определим теперь рекурентно элементы

$$\alpha(i_1, i_2, \ldots, i_n;\ j_1, j_2, \ldots, j_n) = \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j}),$$

полагая

$$\alpha(\mathbf{i}, \mathbf{e}) = a(\mathbf{i}), \quad \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{e} + \mathbf{e}_k) = [b_k, \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{e})] \tag{5}$$

$$\alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = [b_k, \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j} - \mathbf{e}_k)].$$

Как показано в [5], в случае $n=1$ имеют место следующие соотношения для элементов $\alpha(i,j)$

$$(6)\qquad \alpha(1,j)=\prod_{\nu=1}^{j} a(\nu)^{(-1)^{\nu-1}C_{j-1}^{\nu-1}},\quad a(i)=\prod_{\mu=1}^{i}\alpha(1,\mu)^{(-1)^{\mu-1}C_{i-1}^{\mu-1}}$$

где индексы ν приводят по модулю p^{α_1}.

Индукцией по числу n эти соотношения легко обобщить на произвольный случай $\mathbf{v}=(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n)$

$$(7)\qquad \alpha(\mathbf{i},\mathbf{j})=\prod_{\mathbf{v}=\mathbf{0}}^{\mathbf{j}-\mathbf{e}} a(\mathbf{i}+\mathbf{v})^{(-1)^{\nu_1\cdot\nu_2\cdot\ldots\cdot\nu_n}C_{\mathbf{j}-\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}}$$

$$(8)\qquad a(\mathbf{i})=\prod_{\mu=\mathbf{e}}^{\mathbf{i}}\alpha(\mathbf{e},\boldsymbol{\mu})^{(-1)^{(\mu_1-1)\cdot\ldots\cdot(\mu_n-1)}\cdot C_{\mathbf{i}-\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\mu}-\mathbf{e}}},$$

где координаты вектора $\mathbf{i}+\mathbf{v}$ приводятся по модулям p^{α_k} ($k=1,2,\dots,n$ соответственно).

Установим теперь, для произвольного n, базы членов нижнего центрального ряда группы W_n.

Теорема 5. *Элементы* $\alpha(\mathbf{e},\mathbf{j})$, $\mathbf{j}=(j_1,j_2,\dots,j_n)$, *для которых*

$$\sum_{l=1}^{n} j_l \geqq k+n$$

образуют базис группы $\Gamma_k(W_n)$.

Доказательство. Из равенства (8) следует, что всевозможные элементы вида $\alpha(\mathbf{e},\mathbf{j})$ являются системой образующих группы K. Но поскольку их число равно $p^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}$, ясно, что они независимы в K. Из элементов такого вида, по построению, лишь $\alpha(\mathbf{e},\mathbf{e})$ не содержится в группе $\Gamma_1(W_n)$. Поэтому порядок $\Gamma_1(W_n)$ не меньше $p^{p^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}-1}$, так как $K\neq\Gamma_1(W_n)$, этот порядок, в действительности, и равен $p^{p^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}-1}$. Т.е. при $k=1$ утверждение справедливо.

Равенства (2) из §1, применительно к нашему случаю можно переписать следующим образом:

$$[b_1^{k_1}\cdot b_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot b_n^{k_n},\ a(\mathbf{i})]=b_n^{k_n},\ a(\mathbf{i}+\mathbf{k}_n)]\cdot[b_{n-1}^{k},\ a(\mathbf{i}+\mathbf{k}_{n-1})]\cdot\ldots\cdot[b_1^{k_1},\ a(\mathbf{i}+\mathbf{k}_1)]$$

где $\quad 0\leqq k_i<p^{\alpha_i}$,

$$\mathbf{k}_i=(k_1,k_2,\dots,k_{i-1},0,\dots,0)\quad(i=2,\dots,n),\quad \mathbf{k}_1=\mathbf{0}.$$

Из этих равенств следует, что можно определить базис группы $\Gamma_k(W_n)=[W_n,\Gamma_{k-1}(W_n)]$ как совокупность коммутаторов базисных элементов $\alpha(\mathbf{e},\mathbf{j})$ группы $\Gamma_{k-1}(W_k)$ с элементами $b_1,b_2,\dots,b_n$.

Теперь доказательство легко завершается индукцией по числу k.

Отметим, что равенства (6) и теорема 4. дают возможность легко определить класс нильпотентности группы W_n (см. [3]). В самом деле, при $n=1$, поскольку $C_{p^{\alpha_1}-1}^{i}\equiv(-1)^i \pmod p$, элемент $\alpha(1,p^{\alpha_1})$ содержится в центре групп W_n, т.е. нильпотентна класса p^{α_1}. Используя теорему 4, получаем отсюда, что W_n является, для любого $n\geqq 1$, нильпотентной класса $s=p^{\alpha_1}+p^{\alpha_2}+\dots+p^{\alpha_n}-n+1$.

Теорема 6. *В сплетении $\overline{W}_n = C_p \wr C_p^{(n)}$ верхний и нижний центральные ряды совпадают.*

Доказательство. В случае, когда $n=1$ эта группа детально изучена в [1]. В этой работе установлено, что элементы этой группы можно представлять в виде таблиц $[a, a(x)]$, где $a \in Z_p$, $a(x)$-многочлен степени не выше $p-1$ над Z_p (Z_p-поле из p элементов).

Группа $C_p \wr C_p$ является нильпотентной класса p. Причем элемент из этой группы содержится в ее k-том члене нижнего центрального ряда или $p-k$-том члене верхнего ($k \geqq 1$) тогда и только тогда когда ему соответствует таблица вида $[0, a(x)]$, где ст. $a(x) \leqq p-1-k$ [8]. Согласно рассмотрениям из §1 отсюда имеем, что любой элемент из $C_p \wr C_p^{(n)}$ представляется таблицей $[(a_1, a_2, \dots, a_n), a(x_1, x_2, \dots, x_n)]$, где $a_i \in Z_p$, $a(x_1, x_2, \dots, x_n)$-многочлен от n неизвестных с коэффициентами из Z_p, причем все неизвестные входят в него в степенях, которые не превышают $p-1$. Согласно теореме 4 таблица вида $[(0, \dots, 0), a(x_1, \dots, x_n)]$ будет содержаться в k-том члене нижнего центрального ряда из $\overline{W}_n$ ($k \geqq 1$) тогда и только тогда, когда $a(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно представить в виде суммы $\sum_j a_1^{(j)}(x_1) \cdot a_2^{(j)}(x_2) \cdot \ldots \cdot a_n^{(j)}(x_n)$ произведений многочленов от одного неизвестного, причем для любого j ст. $a_1^{(j)}(x_1) +$ ст. $a_2^{(j)}(x_2) + \ldots$ $\ldots +$ ст. $a_n^{(j)}(x_n) \leqq n(p-1)-k$. Поскольку любой многочлен степени $n(p-1)-k$ и ниже можно так представить, отсюда имеем, что $\Gamma_k(\overline{W}_n)$ состоит из всех таблиц вида $[(0, \dots, 0)\, a(x_1, x_2, \dots, x_n)]$, где ст. $a(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqq n(p-1)-k$. А так как для любой группы G степени нильпотентности t имеем $Z_k(G) \supseteqq \Gamma_{t-k}(G)$, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что элементу, который содержится в $Z_k(\overline{W}_n)$ соотвествует таблица вида $[(0, \dots, 0), c(x_1, \dots, x_n)]$ где ст. $c(x_1, \dots, x_n) \leqq k-1$. Это легко проверяется непосредственно, индукцией по k.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1., сформулированной во введении.

Достаточность условия этой теоремы следует из теорем 2, 3, замечания к ним и теоремы 6.

Поэтому остается доказать лишь необходимость условия. Покажем сначала, что в группе W_n, для которой мах $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \geqq 2$, подгруппа $Z_{s-2}(W_n)$-неабелева, т. е. $Z_{s-2}(W_n) \neq \Gamma_2(W_n)$ (s — класс нильпотентности W_n) Пусть мах $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \alpha_n$, $1 \leqq m \leqq n$. Согласно теореме 5, для любого вектора $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ ($0 \leqq i_l \leqq p^{\alpha_l}$; $l = 1, 2, \dots, n$) элемент

$$\alpha(\mathbf{i}, \mathbf{e} + p^{\alpha_m - 1}\mathbf{e}_m) = \prod_{v_m=0}^{p^{\alpha_m}-1} a(\mathbf{i} + v_m \mathbf{e}_m) = a(\mathbf{i}) a^{-1}(\mathbf{i} + p^{\alpha_m - 1}\mathbf{e}_m) = [b^{p^{\alpha_m - 1}}, a(\mathbf{i})]$$

содержится в подгруппе $\Gamma_{p^{\alpha_m}-1}(W_n)$, т. е. содержится также и в подгруппе $Z_{s-p^{\alpha_m}-1}(W_n)$. Это означает, что для произвольного элемента $a(\mathbf{i})$ из базиса подгруппы K имеет место включение $[b_m^{p^{\alpha_m - 1}}, a(\mathbf{i})] \in Z_{s-p^{\alpha_m}-1}(W_n)$.

Таким образом взаимный коммутант $[\{b_m^{p^{\alpha_m - 1}}\}, K]$ подгрупп $\{b^{p^{\alpha_m - 1}}\}$ и K содержится в $s-p^{\alpha_m - 1}$ члене верхнего централного ряда группы W_m. То есть фактор-группа

$$\{b_m^{p^{\alpha_m - 1}}\} \cdot Z_{s-p^{\alpha_m}-1} / Z_{s-p^{\alpha_m}-1}$$

содержится в центре группы $W_n/Z_{s-p^{\alpha_m}-}^{\,1}$. Иными словами, циклическая подгруппа $\{b_m^{p^{\alpha_m-1}}\}$ содержится в $Z_{s-p^{\alpha_m-1}+1}(W_n)$. Поскольку для любых p, α_m имеем $Z_{s-p^{\alpha_m}-1} \subseteqq Z_{s-2}(W_n)$, то $Z_{s-2}(W_n)$ всегда является неабелевой подгруппой.

Из только что доказанного следует, что верхний центральный ряд сплетения $A \wr \{b_1\} \times \{b_2\} \times \ldots \times \{b_n\}$ $(b_i^{p^{\alpha_i}} \equiv 1,\ \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \geqq 2)$ содержит неабелевые члены ряда при любой нетривиальной p-группе A. Это следует из того, что, поскольку в группе A всегда можно выбрать циклическую подгруппу порядка p, сплетение $A \wr \{b_1\} \times \{b_2\} \times \ldots \times \{b_n\}$ содержит подгруппу, изоморфную W_n, для которой это имеет место.

Поэтому для окончания доказательства, в силу теорем 2. и 3., достаточно рассмотреть сплетение

$$\{a\} \wr \{b_1\} \times \{b_2\} \times \ldots \times \{b_n\} \quad \text{где} \quad a^{p^\alpha} = 1, \quad \alpha > 2, \quad b_i^p = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $n=1$. Используя равенства (6) имеем для элемента

$$x = a(1) \cdot a(2) \cdot \ldots \cdot a(p)^{p^{\alpha-2}} = \prod_{\nu=1}^{p} \alpha(1, \nu)^{(-1)^{\nu-1} C_p^\nu \cdot p^{\alpha-2}} =$$
$$= \alpha(1, 1)^{p^{\alpha-2} C_p^1} = \alpha(1, 1)^{p^{\alpha-1}}$$

где

$$\alpha(1, 1) = \alpha(1), \quad \alpha(1, x) = [b_1, \alpha(1, k-1)] \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку, согласно теореме 5 подгруппа $\Gamma_1(\{a\} \wr \{b_1\})$ порождается элементами $\alpha(1, 2), \alpha(1, 3), \ldots, \alpha(1, p)$, элемент x не содержится в ней. Но ясно, что x содержится в центре этого сплетения. Таким образом при $n=1$ все установлено.

Если же $n > 1$, то, согласно теореме 4, элемент $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n}$ не содержится в коммутанте сплетения, но очевидно содержится в его центре.

Теорема 1. полностью доказана.

Литература

[1] L. Kaloujnine, La strukture de p-gruppes de Sylow des des groupes symetriques finis. *Ann. de l'Ecolé Norm. Super.*, **68** (1948), 239—276.

[2] G. Baumslag, Wreath products and p-groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **55** (1959), 224—231.

[3] H. Liebech, Concerning nilpotent wreath products, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **58.** (1962), 443—451.

[4] L. Meldrum, Central series in wreath products, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **63.** (1963), 551—567.

[5] К. Бузаши, Ядра неприводимых представлений силовской p-подгруппы симметрической группы $S_p n.$, *Publ. Math.* **16.** (1969), 199—227.

[6] В. И. Сущанский, Сплетения элементарных абелевых групп., *Мат. заметки II.* № I. (1972), 61—72.

[7] P. Neuman, On the structure of standard wreath products of groups, *Math. Z.*, **84.** (1964), 344—373.

[8] Л. А. Калужнин, В. И. Сущанский, О сплетениях абелевых групп, *Труды Моск. Мат. общества*, т. **29** (1973), 147—163.

(Поступила: 16. II. 1974.)