Über die Zerlegungsgleichheit

Von S. KÁNTOR (Debrecen)

§ 1. *Einführung*

Bei der Axiomatisierung von Fläche und Rauminhalt haben diejenigen Untersuchungen eine große Bedeutung, die ausgehend von dem Zerlegungssatz Farkas Bolyai's [2] durchgeführt wurden. Dieser Satz besagt, daß zwei in einer Ebene liegende Polygone von gleichem Flächeninhalt in endlich viele paarweise kongruente Polygone zerlegbar sind. (Die Polygone mit gleichem Flächeninhalt sind *zerlegungsgleich.*)

Die Hauptfrage der Verallgemeinerung auf den Raum wurde von D. HILBERT [5] in seinem dritten Problem formuliert, und dieses wurde von M. DEHN [3] nach einigen Monaten teilweise gelöst. Er gab eine notwendige Bedingung für die Zerlegung zweier Polyeder in zueinander kongruente Teilpolyeder; er zeigte, daß bei Tetraedern gleichen Volumens — bei gleicher Grundfläche und Höhe — diese Bedingung nicht immererfüllt ist. Erst unlängst gelang P. SYDLER [7] der Beweis, daß die Bedingung von M. Dehn nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

Unterdessen wurden die Untersuchungen auf die Zerlegung von Mengen in Teilmengen ausgedehnt. S. BANACH und A. TARSKI [1] haben die Ergebnisse zusammenfaßt, aber diese können auf Grund des Hausdorff'schen Paradoxons — auch zwei Kugel unterschiedlichen Rauminhalts können bei einer solchen Zerlegung zerlegungsgleich sein — nicht zur Begründung des Maßes benutzt werden.

Bei einer anderen Richtung der Verallgemeinerungen wurde bei der Kongruenz der Teilpolyeder nur eine Untergruppe der Bewegungsgruppe verwendet, wobei die Untersuchungen auch auf höhere Dimensionen ausgedehnt wurden. Ein großer Teil der Ergebnisse stammt von H. HADWIGER [4].

In dieser Arbeit führen wir entsprechend der Verallgemeinerung der erstgenannten Richtung eine Zerlegung in Teilmengen durch, verwenden aber hierbei nur Jordan-meßbare Teilmengen um das Haussdorff'sche Paradoxon zu vermeiden. Der Durchschnitt von zwei Teilmengen einer Zerlegung ist — wie bei der elementargeometrischen Zerlegung — eine Jordan-Nullmenge. Bei dieser speziellen Zerlegung, die eine Verallgemeinerung der elementargeometrischen Zerlegung ist, können wir nicht nur die einfachen Eigenschaften der allgemeinen Zerlegungsgleichheit, sondern auch den Subtraktionssatz beweisen. Das Problem von Hilbert ist auch bei unserer Zerlegung interessant und noch ungelöst. Wir werden dieses Problem für eine Klasse der Teilmengen — für die sogenannten Quasipolyedern — in dem folgenden Teil dieser Arbeit lösen.

Wir benutzen auch die Methoden und Sätze der anderen Verallgemeinerungsrichtung: wir arbeiten mit einer Bewegungsgruppe und in einem mehrdimensionalen Raum.

§ 2. *Definitionen und Bezeichnungen*

Im n-diemsionalen euklidischen Raum ist der zu den ganzen Zahlen $p>0$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gehörende Basiswürfel diejenige Menge $K(p, p_i)$, deren Punkte $P(x_i) \in \in K(p, p_i)$ das Ungleichungssystem

$$\frac{p_i}{p} \leqq x_i \leqq \frac{p_i+1}{p} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen.

Im Falle eines festen p nennen wir die Menge der Basiswürfel $K(p, p_i)$ ein Würfelgitter des Raumes, das die Feinheit $1/p$ besitzt.

Von den Teilmengen des Raumes setzen wir in dieser Arbeit immer voraus, daß sie gemäß des auf dem Würfelgitter basierenden Jordan-Maßes meßbar seien. Also ist die Menge der Randpunkte einer Menge in endlich vielen Basiswürfeln mit beliebig kleinem Gesamtvolumen enthalten.

Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die Menge mit dem Maß Null und mit μA bezeichnen wir das Mass der Menge A.

Mit Γ_1 bezeichnen wir die vollständige Bewegungsgruppe des Raumes, die Gruppe der Verschiebungen wird mit Γ_0 bezeichnet. Von einer Bewegungsgruppe Γ setzen wir in dieser Arbeit immer voraus, daß sie Γ_0 enthält.

Die Bewegung $g \in \Gamma$ überführt die Menge H in die Menge Hg. Die zu inverse Bewegung wird mit g^{-1} bezeichnet.

Die Mengen H und H' heißen Γ-zerlegungsgleich, in Zeichen $H \overset{\Gamma}{\sim} H'$, wenn die nachfolgenden Bedingungen I—III erfüllt sind:

I. $$H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i \text{ und } \quad H' = \bigcup_{i=1}^{n} H_i'$$

II. $$H_i \cap H_j = \emptyset \; (i \neq j) \quad \text{und} \quad H_i' \cap H_j' = \emptyset \; (i \neq j)$$

III. $$\exists g_i \in \Gamma \quad \text{so, daß} \quad H_i g_i = H_i' \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Die Mengen H und H' heißen Γ-ergänzungsgleich, in Zeichen $H \overset{+\Gamma}{\sim} H'$, wenn es Mengen K und K' gibt, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$H \cap K = \emptyset, \quad H' \cap K' = \emptyset, \quad K \overset{\Gamma}{\sim} K' \quad \text{und} \quad (H \cup K) \overset{\Gamma}{\sim} (H' \cup K').$$

Wenn $H \cap K \neq \emptyset$, und $H \cap K$ bei der Zerlegung der Menge $H \cup K$ zweimal verwendet werden soll, dann gebrauchen wir statt $H \cup K$ die Bezeichnung $H \overset{*}{\cup} K$.

Von einem Polyeder setzen wir nicht voraus, daß er zusammenhängend ist: die Vereinigung zweier Polyeder ist immer ein Polyeder.

Die Menge aller Randpunkte einer Menge wird Rand der Menge genannt.

§ 3. *Die Grundeigenschaften der Zerlegungsgleichheit*

Satz 1. *Die Γ-Zerlegungsgleichheit ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind auf Grund der Definition einleuchtend, und so beweisen wir lediglich die Transitivität.

Sei $H \overset{\Gamma}{\sim} H'$ und seien H_i bzw. H'_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ Mengen, die den Eigenschaften der Relationen I, II, III genügen. Bei der Relation $H' \overset{\Gamma}{\sim} H''$ bezeichnen wir die Teilmengen mit $\overline{H}'_j$ bzw. H''_j $(j=1, 2, \ldots, m)$.

Seien für die Werte $i=1, 2, \ldots, n$ und $j=1, 2, \ldots, m$ die Beziehungen $H_{ij} = H_i \cap \overline{H}'_j g_i^{-1}$ gültig, wo für die Bewegung $g_i \in \Gamma$ die Relation $H_i g_i = H'_i$ erfüllt ist, sowie die Beziehungen $H''_{ij} = H''_j \cap H'_i f_j^{-1}$ gültig, wo für die Bewegung $f_j \in \Gamma$ die Relation $H''_j f_j = \overline{H}'_j$ erfüllt ist.

Offensichtlich sind hier H_{ij} und H''_{ij} Jordan-meßbare Mengen.

$$\bigcup_{i,j} H_{ij} = \bigcup_{i=1}^{n} \left[\bigcup_{j=1}^{m} (H_i \cap \overline{H}'_j g_i^{-1}) \right] = \bigcup_{i=1}^{n} \left[H_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} \overline{H}'_j g_i^{-1} \right) \right] =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} (H_i \cap H' g_i^{-1}) = \bigcup_{i=1}^{n} H_i = H$$

$$\bigcup_{i,j} H''_{ij} = \bigcup_{j=1}^{m} \left[\bigcup_{i=1}^{n} (H''_j \cap H'_i f_j^{-1}) \right] = \bigcup_{j=1}^{m} \left[H''_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H'_i f_j^{-1} \right) \right] =$$

$$= \bigcup_{j=1}^{m} (H''_j \cap H' f_j^{-1}) = \bigcup_{j=1}^{m} H''_j = H''$$

Für diese Mengen gilt auch die Eigenschaft II:

$$H_{ij} \cap H_{kl} = (H_i \cap \overline{H}'_j g_i^{-1}) \cap (H_k \cap \overline{H}'_l g_k^{-1}) = (H_i \cap H_k) \cap (\overline{H}'_j g_i^{-1} \cap \overline{H}_l g_k^{-1}) = \emptyset$$

ausgenommen den Fall $i=k$, $j=l$, weil im Falle $i \neq k$ die Beziehung $(H_i \cap H_k) = \emptyset$, und im Falle $i=k$ aber $j \neq l$

$$\overline{H}'_j g_i^{-1} \cap \overline{H}'_l g_k^{-1} = (\overline{H}'_j \cap \overline{H}'_l) g_i^{-1} = \emptyset$$

gilt. Auf ähnliche Weise erhalten wir, daß mit Ausnahme von $i=k, j=l$ die Beziehung $H''_{ij} \cap H''_{kl} = \emptyset$ gilt. Schließlich ergibt sich auf einfache Weise, daß auch die III. Eigenschaft der Zerlegungsgleichheit erfüllt ist. Es gilt nämlich

$$H_{ij} g_i f_j^{-1} = (H_i \cap \overline{H}'_j g_i^{-1}) g_i f_j^{-1} = H_i g_i f_j^{-1} \cap \overline{H}'_j f_j^{-1} = H'_i f_j^{-1} \cap H''_j = H''_{ij}.$$

Satz 2. *Die Zerlegungsgleichheit ist additiv, d. h. aus*

$$H \overset{\Gamma}{\sim} H', \quad K \overset{\Gamma}{\sim} K', \quad H \cap K = \emptyset, \quad H' \cap K' = \emptyset \quad \textit{folgt} \quad (H \cup K) \overset{\Gamma}{\sim} (H' \cup K').$$

Zum Beweis genügt es zu bemerken, daß wenn für die Zerlegungen $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$, $H' = \bigcup_{i=1}^{n} H'_i$ und die Zerlegungen $K = \bigcup_{j=1}^{m} K_j$, $K' = \bigcup_{j=1}^{m} K'_j$ den Eigenschaften II und III der Zerlegungsgleicheit genügen, dei Mengen

$$(H \cup K)_i = \begin{cases} H_i, & \text{falls} \quad 1 \leqq i \leqq n \\ K_{i-n}, & \text{falls} \quad n+1 \leqq i \leqq n+m \end{cases}$$

$$(H \cup K)'_i = \begin{cases} H'_i, & \text{falls} \quad 1 \leqq i \leqq n \\ K'_{i-n}, & \text{falls} \quad n+1 \leqq i \leqq n+m \end{cases}$$

offenbar eine gesuchte Zerlegung der Mengen $H \cup K$ bzw. $H' \cup K'$ darstellen.

§ 4. *Über die Ergänzungsgleichheit*

In diesem Paragraphen bewiesen wir nur einen Satz, der aber von großer Wichtigkeit ist. Aus diesem Satz folgt sofort, daß die Γ-Ergänzungsgleichheit im wesentlichen zur Γ-Zerlegungsgleichheit äquivalent ist.

Satz 3. *Ist* $H\neq\emptyset$ *und* $H \overset{+\Gamma}{\sim} H'$, *dann folgt* $H \overset{\Gamma}{\sim} H'$.

Beweis. Seien K bzw. K' zwei Mengen, derart daß $H\cap K=\emptyset$, $H'\cap K'=\emptyset$ und $(H\cup K) \overset{\Gamma}{\sim} (H'\cup K')$ gelten. Die in der Definition der Γ-Ergänzungsgleichheit auftretenden Zerlegungen derselben mit den gewünschten Eigenschaften sehen folgendermaßen aus:

$$H\cup K = \bigcup_{i=1}^{n} (H\cup K)_i, \quad H'\cup K' = \bigcup_{i=1}^{n} (H'\cup K')_i, \quad (H\cup K)_i g_i = (H'\cup K')_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$K = \bigcup_{j=1}^{m} K_j, \quad K' = \bigcup_{j=1}^{m} K_j', \quad K_j f_j = K_j' \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Wir brauchen uns nur mit dem Fall zu beschäftigen, in dem die Beziehungen

$$(*) \qquad \begin{aligned} (H\cup K)_i &\subseteqq H, \quad \text{falls } 1 \leqq i \leqq k \\ (H\cup K)_i &\subseteqq K, \quad \text{falls } k+1 \leqq i \leqq n \end{aligned}$$

erfüllt sind, sowie $(H\cup K)_1=\emptyset$.

Die Zerlegungen

$$H\cup K = \left\{\bigcup_{i=1}^{n} [(H\cup K)_i \cap H]\right\} \cup \left\{\bigcup_{i=1}^{n} [(H\cup K)_i \cap K]\right\}$$

und

$$H'\cup K' = \left\{\bigcup_{i=1}^{n} [(H\cup K)_i \cap H] g_i\right\} \cup \left\{\bigcup_{i=1}^{n} [(H\cup K)_i \cap K] g_i\right\}$$

besitzen nämlich auch der in Definition von $(H\cup K) \overset{\Gamma}{\sim} (H'\cup K')$ geforderten Eigenschaften II und III, und sie haben bei einer geeigneten Indizierung der neuen Teilmengen auch die $(*)$ entsprechende Eigenschaft.

Ist $H\neq\emptyset$, so gilt für wenigstens ein $i<k$ die Beziehung $(H\cup K)_i\neq\emptyset$, und so kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $i=1$ ist. Sei im Raume ein Würfelgitter gegeben und sei P_0 derjenige Polyeder, der durch die Vereinigung der Basiswürfel entsteht, welche die Vereinigung der Ränder der Mengen

$$(H\cup K)_1 \cap K_j' g_1^{-1} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

bedeckt. Sei weiter P derjenige Polyeder, der durch die Vereinigung der Basiswürfel entsteht, welche die Vereinigung der Ränder der Mengen

$$(H\cup K)_i, \quad \text{falls } i > k,$$

$$(H\cup K)_i \cap K_j' g_i^{-1}, \quad \text{falls } i > k, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

bedeckt. Wegen $(H\cup K)_1\neq\emptyset$ kann das Würfelgitter so gewählt werden, daß die Gesamtzahl der Basiswürfel der Polyeder P und P_0 kleiner ist als die Zahl der im Inneren der Menge $(H\cup K)_1$ befindlichen Basiswürfel. Deswegen existiert ein Polyeder $P_1\subseteqq(H\cup K)_1-P_0$, der aus einer Vereinigung von Basiswürfeln besteht und für den $\mu P_1=\mu P$ gilt, weshalb offenbar auch $P\overset{\Gamma}{\sim}P_1$ gilt.

Wir führen nun einige weitere Bezeichnungen ein:

P_i ist leer, falls $1<i\leqq k$ und

$P_i=(H\cup K)_i-P$, falls $i>k$,

$$P_{i0}=P_ig_i\cap H' \quad (i=1,2,\dots,n),$$
$$P_{ij}=P_ig_i\cap K'_j \quad (i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m).$$

Diese sind auf Grund der Wahl von P Polyeder, die durch die Vereinigung der Basiswürfel entstehen. Schließlich sei

$$\overline{H}_i=(H\cap K)_i-P_i, \quad \text{also}$$
$$\overline{H}_i=(H\cap K)_i\cap P, \quad \text{falls} \quad i>k, \quad \text{und} \quad \bigcup_{i>k}\overline{H}_i=P\cap K.$$

Es ist leicht einzusehen, daß

$$H=(H-P_1)\cup P_1\overset{\Gamma}{\sim}(H-P_1)\overset{*}{\cup}P=\left[\bigcup_{i=1}^{k}H\cup K)_i-P_1\right]\overset{*}{\cup}P=$$
$$=\left(\bigcup_{i=1}^{k}\overline{H}_i\right)\overset{*}{\cup}[(P-K)\cup(P\cap K)]=\left(\bigcup_{i=1}^{k}\overline{H}_i\right)\overset{*}{\bigcup_{i=1}}\left[(P-K)\cup\left(\bigcup_{i=k+1}^{n}\overline{H}_i\right)\right]=$$
$$=\left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{H}_i\right)\overset{*}{\cup}(P-K)\overset{\Gamma}{\sim}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{H}_ig_i\right)\overset{*}{\cup}(P-K)=$$
$$=\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{H}_ig_i\right)\cap H'\right]\cup\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{H}_ig_i\right)\cap K'\right]\overset{*}{\cup}(P-K)=$$
$$=\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{H}_ig_i\right)\cap H'\right]\cup\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{H}_ig_i\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m}K'_j\right)\right]\overset{*}{\cup}(P-K)=$$
$$=\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{H}_ig_i\right)\cap H'\right]\cup[\bigcup_{i,j}(\overline{H}_ig_i\cap K'_j)]\overset{*}{\cup}(P-K).$$

Einerseits ist

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{H}_ig_i\right)\cap H'=\left\{\bigcup_{i=1}^{n}[(H\cup K)_i-P_i]g_i\right\}\cap H'=$$
$$=\left[\bigcup_{i=1}^{n}(H\cup K)_ig_i-\bigcup_{i=1}^{n}P_ig_i\right]\cap H'=H'-\bigcup_{i=1}^{n}(P_ig_i\cap H')=H'-\bigcup_{i=1}^{n}P_{i0}.$$

Anderseits gilt $\bigcup_{i,j}(\overline{H}_ig_i\cap K'_j)=\bigcup_{i,j}\{[(H\cup K)_i-P_i]g_i\cap K'_j\}=$

$$=\bigcap_{i,j}[(H\cup K)_ig_i\cap K'_j-P_ig_i\cap K'_j]=\bigcup_{j=1}^{m}K'_j-\bigcup_{i,j}(P_ig_i\cap K'_j)=$$
$$=\bigcup_{j=1}^{m}K'_j-\bigcup_{i,j}P_{ij}\overset{\Gamma}{\sim}\bigcup_{j=1}^{m}K'_jf_j^{-1}-\bigcup_{i,j}P_{ij}f_j^{-1}=K-\bigcup_{i,j}P_{ij}f_j^{-1}.$$

Also erhalten wir

$$H \overset{\Gamma}{\sim} \left(H' - \bigcup_{i=1}^{n} P_{i0}\right) \overset{*}{\cup} \left[(K - \bigcup_{i,j} P_{ij} f_j^{-1}) \cup (P-K)\right].$$

Aus $H' \supseteqq \bigcup_{i=1}^{n} P_{i0}$ und $\mu H = \mu H'$ folgt

$$\mu[(K - \bigcup_{i,j} P_{ij} f_j^{-1} \cup (P-K) = \mu \bigcup_{i=1}^{n} P_{i0},$$

und so gilt (mit dem Ergänzungspolyeder $\bigcup_{i,j} P_{ij} f_j^{-1}$)

$$(K - \bigcup_{i,j} P_{ij} f_j^{-1}) \cup (P-K) \overset{+\Gamma}{\sim} \bigcup_{i=1}^{n} P_{i0},$$

woraus wegen [6]

$$(K - \bigcup_{i,j} P_{ij} f_j^{-1}) \cup (P-K) \overset{\Gamma}{\sim} \bigcup_{i=1}^{n} P_{i0}$$

folgt. Also gilt in der Tat $H \overset{\Gamma}{\sim} H'$.

§ 5. *Bemerkungen*

1. Offensichtlich folgt aus $H \overset{\Gamma}{\sim} H'$ die Beziehung $H \overset{+\Gamma}{\sim} H'$. Deswegen ergibt sich aus dem Satz, daß Mengen von einem Maße ungleich Null dann und nur dann ergänzungsgleich sind, wenn sie zerlegungsgleich sind.

2. Das Ausschließen von Mengen mit dem Maße Null ist wesentlich, da zwei Mengen vom Maße Null, z. B. die leere Menge und die aus einem Punkt bestehende Menge offenbar nicht zerlegungsgleich sein können, aber dennoch ergänzungsgleich sind. Man ergänze hierzu die leere Menge mit dem Abschnitt [0, 1] und den Punkt 0 mit dem Abschnitt (0, 1]. Auf grund von

$$[0, 1] = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \overset{\Gamma}{\sim} \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] = (0, 1]$$

sind dann nämlich die ergänzenden Teile zerlegungsgleich und auch die Vereinigungen sind es.

3. Es ist leicht einzusehen, daß für alle Mengen (nicht nur für die mit positivem Jordanschen Maß) die Γ-Ergänzungsgleichheit eine Äquivalenzrelation ist, die auch additiv ist.

4. Wenn wir bei der Definition der Γ-zerlegungsgleichen Mengen disjunkte Teilmengen benutzen möchten, sollen wir von einer Menge vom Maße Null absehen ([1] S. 270). Die Mengen H und H' heißen Γ-zerlegungsgleich mit der disjunkten Teilmengen, wenn die nachfolgenden Bedingungen I—III erfüllt sind (mit 0 zeichen wir die leere Menge):

I. $H = \bigcup_{i=0}^{n} H_i$ und $H' = \bigcup_{i=0}^{n} H_i'$

II. $H_i \cap H_j = 0 \quad (i \neq j)$ und $H_i' \cap H_j' = 0 \quad (i \neq j), \quad H_0 = \emptyset, \quad H_0' = \emptyset$

III. $\exists g_i \in \Gamma$ so, daß $H_i g_i = H_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Definition für die Mengen mit positivem Jordanschen Maß mit unserer Definition äquivalent ist. Auch die Γ-Zerlegungsgleichheit mit der disjunkten Teilmengen für alle Mengen (nicht nur für die mit positivem Jordanschen Maß) ist eine Äquivalenzrelation, additiv und mit der Γ-Ergänzungsgleichheit mit der disjunkten Teilmengen äquivalent.

Literatur

[1] S. Banach—A. Tarski, Sur la decomposition des ensembles de point en parties respectivement congruentes, *Fundamenta Math.* **6** (1924), 244—277.
[2] F. Bolyai, Tentamen. II., Zweite Auflage (1897), 108—109.
[3] M. Dehn, Über den Rauminhalt, *Math. Ann.* **55** (1901), 465—478.
[4] H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, 1957.
[5] D. Hilbert, Mathematische Probleme. *Vortrag*, gehalten auf dem internationalen Mathematikerkongress zu *Paris* 1900.
[6] P. Sydler, Sur la decomposition des polyeders, *Comm. Math. Helv.* **16** (1943—44), 266—273.
[7] P. Sydler, Conditions necessaires et suffisantes pout l'equivalence des polyedres de l'espace euclidien a trois dimensions, *Comm. Math. Helv.* **40** (1965—66) 43—80.

(Eingegangen am 21. Juli 1974)