Über die Konstruierbarkeit der eindeutig festgelegten Winkel der Raumelemente im Falle mehrdimensionaler Räume

Von A. GYARMATHI — L. GYARMATHI (Debrecen)

Es ist bekannt, daß man in den mehrdimensionalen Räumen die Winkel zweier Raumelemente auf zweifache Weise erklären kann. Man spricht von dem auf *klassische Art* (d.h.: mit Hilfe der im allgemeinen mehrdeutigen Extremalwerte der Winkel zwischen den Raumelementen) *definierten Winkel* und von *eindeutig* (mit den Quotienten von Rauminhalten von Simplexen) definierten Winkel.

In den Abbildungen mehrdimensionaler Räume kann man mehrere klassische Winkelaufgaben konstruieren. Es läßt sich fragen, ob der eindeutig definierte Winkel zweier Raumelemente konstruierbar ist und im bejahenden Falle wie, und unter welchen Bedingungen.[1])

Um dieses Problem lösen zu können, stellen wir in der vorliegenden Arbeit einen Zusammenhang zwischen den klassisch definierten und den eindeutig festgelegten Winkel der Raumelemente fest, und auf Grund dieses Zusammenhanges gelangen wir zur folgenden Feststellung: der eindeutige Winkel ist immer konstruierbar, falls die Winkel im klassischen Sinne der beiden Raumelemente konstruierbar bzw. bekannt sind. In der zweiten Hälfte unserer Arbeit konstruieren wir die beiden im klassischen Sinne genommenen Winkel von zwei Ebenen im 4-dimensionalen Raum unter Zuhilfenahme der Maurinschen Abbildung [1] und in Kenntnis dieser Winkel bestimmen wir den eindeutigen Winkel beider Ebenen *auf konstruktivem Wege.*

I. *Zusammenhang zwischen den klassisch definierten und den eindeutig festgelegten Winkel der Raumelemente.* Es seien die Räume R_k und R_l von k bzw. l Dimensionen ($k \leqq l$ zueinander schief gelegen und es seien

$$(1) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_j \quad (\text{wo } j \leqq k)$$

die Winkel[2]) im klassischen Sinne dieser Räume. In diesem Falle besagt der sog. Projektionssatz ([3] S. 96), daß wir den Rauminhalt I' der Orthogonalen Projektion auf R_l eines beliebigen Raumteiles von R_k erhalten, falls wir den Inhalt I des

---

[1]) Herr Professor O. VARGA hat unsere Aufmerksamkeit auf dieses Problem gelenkt.

[2]) Wir befassen uns mit der Bestimmung der Winkel nicht gerichteter Räume, und von den vorkommenden Winkeln berücksichtigen wir immer den spitzen Winkel. Wir verwenden einen auch auf schief gelegene Räume verallgemeinerten Winkelbegriff. [2]

ursprünglich gegebenen Raumteiles mit dem Produkt der Cosinuse der Winkel (1) multiplizieren,[3]) d.h.

$$I' = I \prod_{n=1}^{j} \cos \alpha_n \tag{2}$$

Falls die Räume R_k und R_l nicht schief zueinander sind, sondern einen Durchschnitt R_p, $p<k$ haben, so gilt

$$\alpha_{j-p+1} = \alpha_{j-p+2} = \ldots = \alpha_j = 0 \tag{3}$$

Mit Rücksicht auf (3) gilt (2) auch im Falle von Räumen, die zueinander nicht schief gelegen sind.

Es sei φ der eindeutige Winkel der Räume R_k und R_l, dann gilt bekanntlich

$$\cos \varphi = \frac{I'_{s_k}}{I_{s_k}} \tag{4}$$

wobei I_{s_k} den Rauminhalt des Simplexes in R_k, und I'_{s_k} den Rauminhalt der orthogonalen Projektion dieses Simplexes auf R_l bedeutet.

Wenden wir den Projektionssatz (2) auf diese Simplexe an:

$$I'_{s_k} = I_{s_k} \prod_{n=1}^{j} \cos \alpha_n \tag{5}$$

Indem wir jetzt (5) in (4) einsetzen, erhalten wir

$$\cos \varphi = \frac{I_{s_k} \prod_{n=1}^{j} \cos \alpha_n}{I_{s_k}} \tag{6}$$

und daraus folgt

$$\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_j \tag{7}$$

der Zusammenhang zwischen den beiden Arten von Winkel.

Eine Folge von (7) ist der folgende

Satz. *Der eindeutig festgelegte Winkel zwier Raumelemente ist immer dann konstruierbar, wenn die entsprechenden Winkel im klassischem Sinne bekannt bzw. konstruierbar sind.*

Es sei nämlich nur zwei von den Winkeln (1), z.B. α_1 und α_2 von Null verschieden:

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0 \quad \text{und} \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = \alpha_j = 0$$

und es seien die Winkel α_1 und α_2 geometrisch bekannt bzw. konstruierbar, dann nimmt (7) die Gestalt

$$\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \tag{8}$$

an.

---

[3] Wir beschäftigen uns mit dem Falle nicht, wo ein oder mehrere α $\frac{\pi}{2}$ sind.

In diesem Falle kann man den Winkel φ mit Hilfe der folgenden drei Rechtwinkligen Dreiecken konstruieren: (Fig. 1).

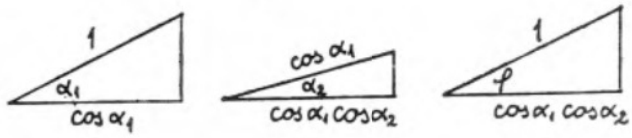

Fig. 1.

Falls für die Winkel (1)

(8.a) $$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0; \quad \text{und} \quad \alpha_4 = \alpha_5 = \ldots \alpha_j = 0$$

gilt, und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bekannt sind, dann haben wir auf Grund von (7):

(9) $$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \cos\alpha_3$$

Wenden wir die Bezeichnung

(10) $$\cos\varphi_1 = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2$$

an, so können wir der Gleichung (9) die Gestalt

(11) $$\cos\varphi = \cos\varphi_1 \cdot \cos\alpha_3$$

geben.

Auf Grund von (10) können wir von α_1 und α_2 ausgehend den Winkel φ_1 durch ein dem obigen analoges Verfahren konstruieren, und ebenso läßt sich dann mit Hilfe von φ_1 und α_3 auch der eindeutige Winkel φ konstruieren.

Das im Falle (8a) unter (10) angewandtes Verfahren kann auch im allgemeinen Falle, wo keiner der α_i aus (1) gleich Null ist, eine fortgesetzte Anwendung finden.

Nun ist es klar, daß man durch sukzessive Konstruktion einer Reihe rechtwinkliger Dreiecke auch von einer beliebigen endlichen Anzahl der Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$ ausgehend φ konstruieren kann. Damit ist unser Satz bewiesen.

Figur 1.a zeigt die abgekürzte Form der Konstruktion.

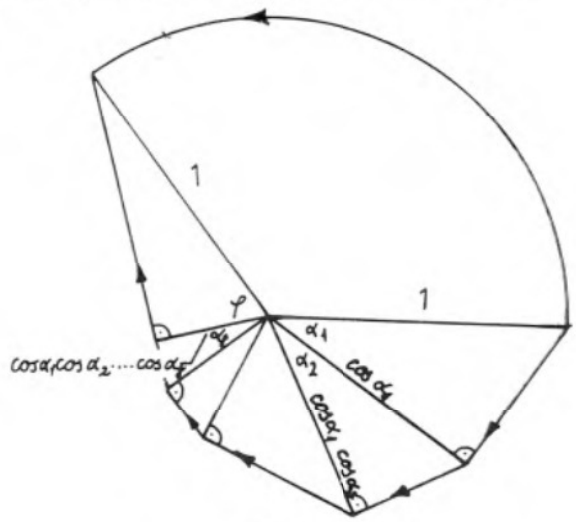

Fig. 1a

II. *Bestimmung der Winkel zweier Ebenen des R_4 auf konstruktivem Wege.* Es seien die beiden Ebenen $\mathbf{E}$ und $\overline{\mathbf{E}}$, die beiden Ebenen sollen nicht in einem R_3 enthalten sein und es sei P ihr gemeinsamer Punkt. Zur Durchführung der Konstruktion haben wir folgende aus dem Schrifttum bekannten Sätze nötig: ([2] S. 801).

Die Ebenen $\mathbf{E}$ *und* $\overline{\mathbf{E}}$ *schließen miteinander zwei Winkel im klassischen Sinne ein. Sind diese Winkel durch die Geraden* a_1 *und* $\bar{a}_1$, *bzw.* a_2 *und* $\bar{a}_2$ *bestimmt, d.h. gilt*

$$\alpha_1 = (a_1\bar{a}_1)\sphericalangle \quad \text{und} \quad \alpha_2 = (a_2\bar{a}_2)\sphericalangle \tag{12}$$

dann sind a_1 *und* a_2 *bzw.* $\bar{a}_1$ *und* $\bar{a}_2$ *zwei Geradenpaare aus* $\mathbf{E}$ *bzw. aus* $\overline{\mathbf{E}}$, *und* a_1 *ist auf* a_2, $\bar{a}_1$ *auf* $\bar{a}_2$ *senkrecht. Es sind weiter die orthogonalen Projektionen von* a_1 *und* a_2 *auf* $\mathbf{E}$ *die Geraden* $\bar{a}_1$ *bzw.* $\bar{a}_2$, *und umgekehrt, die Projektion von* $\bar{a}_1$ *und* $\bar{a}_2$ *auf* $\mathbf{E}$ *ist* a_1 *und* a_2.

Bezeichnen wir die zum Punkte P *gehörigen Normalebenen von* $\mathbf{E}$ *bzw.* $\overline{\mathbf{E}}$ *mit* $\mathbf{N}$ *bzw.* $\overline{\mathbf{N}}$, *dann werden die Winkel* $(a_1\bar{a}_1)\sphericalangle, (a_2\bar{a}_2)\sphericalangle$ *aus* $\mathbf{E}$ *und* $\overline{\mathbf{E}}$ *von zwei durch* P *hindurchgehenden Ebenen* $\mathbf{M}_1$ *und* $\mathbf{M}_2$ *ausgeschnitten, die aus jeder Ebenen* $\mathbf{E}$, $\overline{\mathbf{E}}$, $\mathbf{N}$, $\overline{\mathbf{N}}$, *je eine Gerade herausschneiden.*

Wir können die Ebenen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ konstruieren, indem wir die Ebenen $\mathbf{E}$, $\overline{\mathbf{E}}$, $\mathbf{N}$, $\overline{\mathbf{N}}$, mit einer beliebigen Hyperebene $\mathscr{H}$ (d.h. mit einem dreidimensionalem Raum) zur Schnitt bringen. Diese Hyperebene schneidet aus den vier Ebenen ebensoviele Geraden heraus. Bringen wir nun die beiden Transversalen der vier Geraden mit dem Punkte P zur Verbindung, so erhalten wir die Ebenen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$. (Fig. 2)

Bei der Durchführung der Konstruktion wenden wir, wie schon erwähnt, die Maurinsche Abbildung an. Für $\overline{\mathbf{E}}$ wählen wir die erste Bildebene (das können wir tun, da nötigenfalls nach zwei Bildebenentransformationen jede Ebene in eine Bildebene überführt werden kann [4] S. 660). Die Ebene $\mathbf{E}$ geben wir durch seine drei Spurpunkte $[N_1, N_2, N_3]$ an. Die beiden Ebenen haben als gemeinsamen Punkt $P(P'=N_1', P''=N_1'', P'''=N_1''')$. Die Spurpunkte der zu P gehörigen Normalebene $\mathbf{N}$ bezeichnen wir mit $[N_1^n, N_2^n, N_3^n]$. $\mathbf{N}$ ist die Schnittebene der zwei, auf die beiden Geraden von $\mathbf{E}$ senkrechten und durch P hindurchgehenden Hyperebenen. Deshalb können wir seine Spurpunkte herstellen, indem wir auf die durch den Punkt P hindurchgehenden Geraden $N_1N_3=k$ bzw. $N_1N_2=l$ der Ebene $\mathbf{E}$ die Hyperebenen $\mathscr{H}_1$ (n_1, n_2, n_3) und $\mathscr{H}_2$ $(\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3)$ (wobei n_1, n_2, n_3 bzw. $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ die Spurlinien der Hyperebenen sind) senkrecht stellen. Die gemeinsamen Punkte der entsprechenden Spurlinien der beiden Hyperebenen ergeben die Spurpunkte N_1^n, N_2^n, N_2^n der Ebene $\mathbf{N}$. Bei der Durchführung dieser Teilkonstruktion mussten wir nur davon Gebrauch machen, dass die Spurlinien einer auf eine Gerade senkrechten Hyperebene auf die entsprechenden Bilder der Geraden senkrecht sind. Da $\overline{\mathbf{E}}$ erste Bildebene ist, ist $\overline{\mathbf{N}}$ eine Ebene die durch P hindurchgeht, und in der P umfassenden und auf die x Achse senkrechen Hyperebene (dessen Spurlinien $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3$ auf die x Achse senkrecht sind) liegt. Auch ist $\overline{\mathbf{N}}$ mit der durch die Bildebenen 2. und 3. bestimmten Hyperebene parallel. Die unendlichferne Gerade von $\overline{\mathbf{N}}$ sei $\bar{n}_\infty$, die Punkte Q_∞ und R_∞ dieser Geraden sind die unendlichfernen Punkte von $\hat{n}_2$ bzw. $\hat{n}_3$.

Die somit dargestellen Ebenen $\mathbf{E}$, $\overline{\mathbf{E}}$, $\mathbf{N}$, $\overline{\mathbf{N}}$ sollen, dem vorher gesagten gemäß, mit

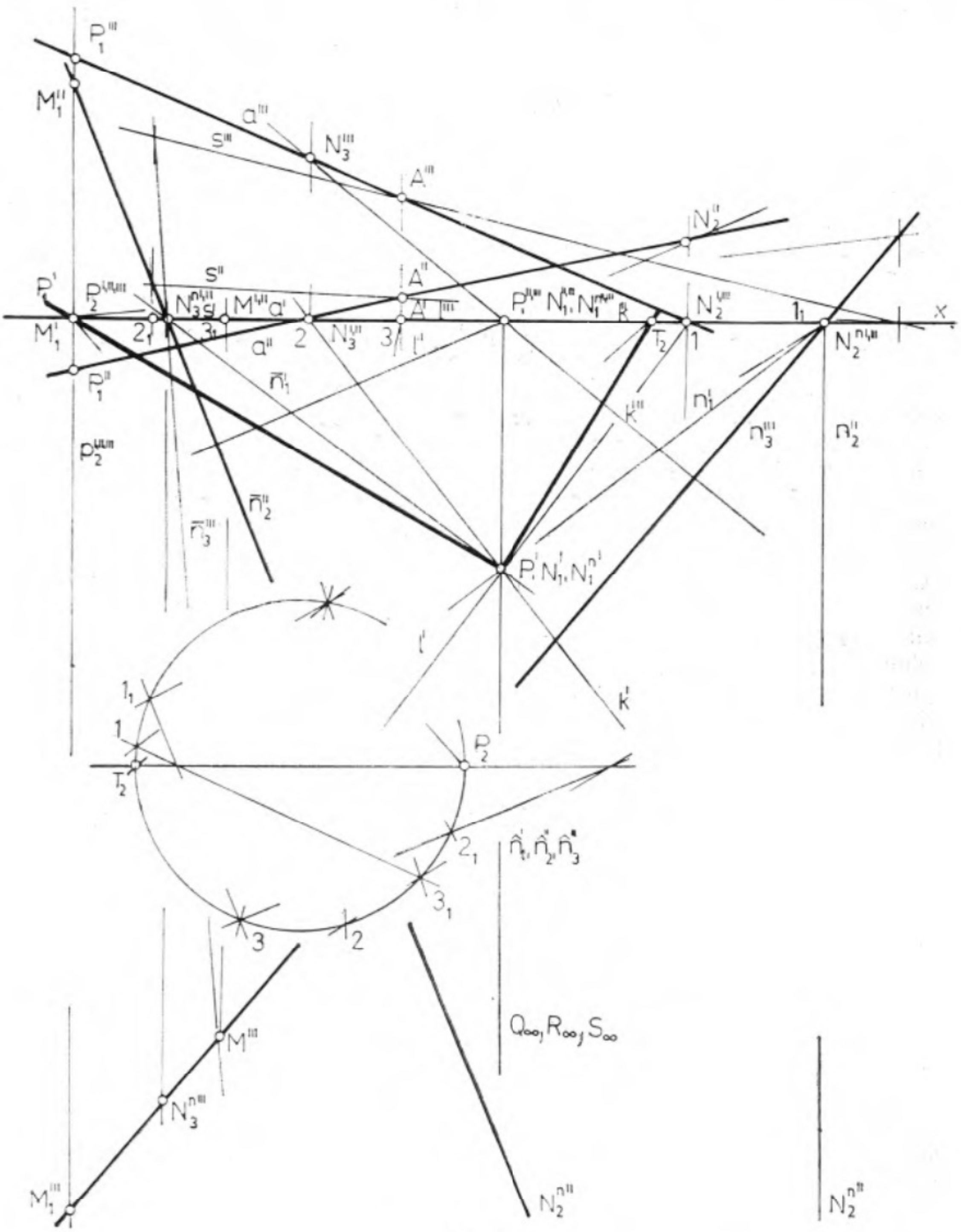

Fig. 2

einer Hyperebene zum Schnitt gebracht werden. Es sei dies die durch die Bildebenen 2. und 3. bestimmte Hyperebene. Dann sind die Schnittgeraden

$$|N_2N_3|, \quad x, \quad |N_2^n N_3^n| \quad \text{und} \quad \bar{n}_\infty. \tag{13}$$

Um die gemeinsame Transversale der vier Geraden herzustellen, legen wir durch die Geraden $|N_2N_3|$, $|N_2^nN_3^n|$ und $\bar{n}_\infty$ ein hyperbolisches Paraboloid P^2, und wir bestimmen den Schnittpunkt von P^2 mit der Geraden x[4]). Die durch die Schnittpunkte hindurchgehenden Erzeugenden des Paraboloids sind die gesuchten Transversalen.

Das Paraboloid P^2 stellen wir als Strahlengebilde derjenigen projektiven Ebenenbüschel um den Geraden $|N_2N_3|$ und $|N_2^nN_3^n|$ her, deren entsprechende Elemente in je einen Punkt von $\bar{n}_\infty$ fallen. Die beiden projektiven Ebenenbüscheln scheiden aus der Geraden x zwei projektive Punktreihen gemeinsamer Lage heraus, als deren Doppelpunkte sich dann die Schnittpunkte von x und P^2 ergeben. Ein Paar entsprechender Elemente der projektiven Punktreichen gemeinsamer Lage erhalten wir, indem wir die Gerade x mit dem entsprechenden Ebenenpaar der beiden projektiven Ebenenbüscheln zum Schnitt bringen. Zur Bestimmung dieser Schnittpunkte legen wir durch x eine Hilfsebene, z. B. die 2. Bildebene. Diese Hilfsebene schneide die Gerade $\bar{n}_\infty$ im Punkte Q_∞. Die Schnittpunkte von x und des zum Punkte Q_∞ gehörigen Ebenenpaares können wir unter Anwendung unserer Hilfsebene leicht bestimmen. Man muß nämlich den Punkt Q_∞ mit den Schnittpunkten der Hilfsebene und der Reihgeraden der beiden Ebenenbüschel verbinden. Es seien diese Schnittpunkte N_2 und N_2^n. Die so gewonnene Gerade schneidet aus x das entsprechende Punktpaar $1, 1_1$ heraus. Noch zwei Punktpaare $2, 2_1$ und $3, 3_1$ bestimmen wir auf analoge Weise. Als Hilfsebene wählen wir dabei die Bildebene 3. bzw. die Ebene durch den Punkt A der Geraden N_2N_3, und durch x.

$$(2 = |R_\infty N_3| \cap x,\ 2_1 = |R_\infty N_3^n| \cap x,\ [xA] = [x, s] \cap |N_2^n N_3^n| = M,$$

$$3 = |S_\infty A| \cap x, \quad 3_1 = |S_\infty M| \cap x).$$

Die Doppelelemente P_2 und T_2 der projektiven Punktreihen

$$1, 2, 3, \ldots . \quad \overline{\wedge} \quad 1_1, 2_1, 3_1 \ldots \tag{14}$$

bestimmen wir mit Hilfe der Steinerschen Konstruktion. Diese Doppelpunkte sind immer im reellen gelegen, da wir die vier Geraden (13) als Schnittgeraden von zwei Ebenen und der entsprechenden Normalebenen mit einer Hyperebene gewonnen haben; vier Geraden die so zueinander gelegen sind, haben immer mindestens zwei reelle Transversalen[5]) (p_2, t_2).

---

[4]) Die ganze Konstruktion geht in einer Hyperebene $\mathscr{R}_3$ vor sich, so daß die Verfahren des gewöhnlichen Raumes anwendbar sind.

[5]) Wir beschäftigen uns nicht mit Sonderfällen.

Die durch die Doppelpunkte P_2 und T_2 hindurchgehenden Erzeugenden der Paraboloide sind mit der Ebene $\overline{\mathbf{N}}$ parallel, und sie schneiden die Geraden (13) in den Punkten

$$P_1(P_1', P_1'' P_1'''),\quad P_2(P_2', P_2'', P_2'''),\quad M_1(M_1', M_1'', M_1'''),\quad M_{2\infty}$$

(15) bzw.

$$T_1(T_1', T_1'', T_1'''),\quad T_2(T_2', T_2'', T_2''')\quad M_1^*(M_1^{*\prime}, M_1^{*\prime\prime}, M_1^{*\prime\prime\prime}),\quad M_{2\infty}^*$$

Indem wir die Punkte (15) mit P verbinden, erhalten wir die gesuchten Winkel

(16) $$\alpha_1 = P_1PP_2\sphericalangle \quad\text{und}\quad \alpha_2 = T_1PT_2\sphericalangle$$

der beiden Ebenen, bzw. die Winkel

$$M_1PM_{2\infty}\sphericalangle \quad\text{und}\quad M_2^*PM_{2\infty}^*$$

der Normalebenen (letztere haben wir in der Figur nicht angedeutet). Die ersten Bilder der Winkel α_1 und α_2 fallen in je eine Gerade. Es handelt sich nämlich eigentlich um den Bildebenenwinkel der Ebene **E**, und so liegen die Ebenen der Winkel in einer ersten projizierenden Hyperebene. Die Ebenen der Winkel α_1 und α_2 sind, wie wir vorher festgestellt haben, zueinander orthogonal, und diese Orthogonalität kommt auch auf einem ersten Bilde zur Geltung.

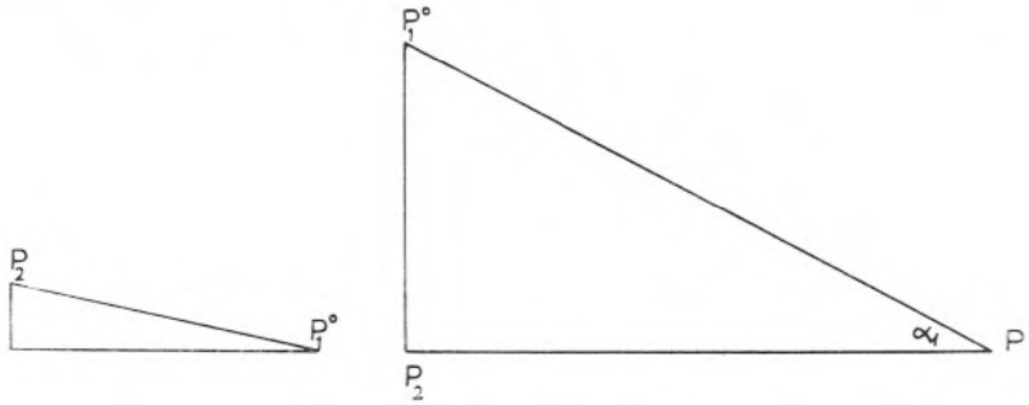

Fig. 2a

Die wahre Größe des Winkels α_1 erhalten wir, indem wir die Ebene des Winkels um die Gerade P_2P in die erste Bildebene drehen. Der Winkel α_1 ist gleich dem, der Seite $\overline{P_2P_1^0}$ gegenüber liegenden Winkel des rechtwinkligen Dreiecks $P_2PP_1^0\triangle$. Die Entfernung $P_2P_1^0$ bestimmen wir auf Grund des Zusammenhanges (Fig. 2a)

$$\overline{P_2P_1^0}^2 = \overline{P_2''P_1''} + \overline{P_2'''P_1'''}^2$$

Die wahre Größe des Winkels α_2 läßt sich aus dem Dreieck $T_2PT_1^0\triangle$ auf ähnliche Weise ermitteln.

Nach bestimmung der beiden im klassischen Sinne genommenen Winkel können wir auf Grund der Relation (8) auch den eindeutig definierten Winkel der beiden Ebenen ermitteln. Die oben angeführten Figuren 1 ergeben gerade den eindeutigen Winkel φ der Ebenen $\mathbf{E}$ und $\overline{\mathbf{N}}$.

An der Hand dieses Beispiels haben wir somit gezeigt, wie man in mehrdimensionalen Räumen die beiden Arten von Winkel zweier Raumelemente auf konstruktivem Wege bestimmen kann.

Literaturverzeichnis

[1] *C. R. Paris,* **225**. p. 560—562.
[2] *Encykl. d. math. Wiss.,* Leipzig, (1921—1928) **III. 2.**, 800—801.
[3] P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie II. *Leipzig,* 1905. I. 96.
[4] Az első magyar matematikai kongresszus közleményei, *Budapest,* 1952, 656—660.

(Eingegangen am 23. May 1975.)