Über linksnoethersche Ringe, die linksartinsch sind

Von DINH VAN HUYNH (Hanoi/Halle) und ANDOR KERTÉSZ (Debrecen)

Unter einem Ring verstehen wir in dieser Arbeit stets einen *assoziativen* Ring. Ein Ring heißt *linksnoethersch* (linksartinsch), wenn er der Maximalbedingung (Minimalbedingung) für Linksideale genügt. Entsprechend werden rechtsnoethersche (rechtsartinsche) Ringe definiert. Ein Ring heißt *einseitig* linksartinsch, wenn er linksartinsch aber *nicht* rechtsartinsch ist. Wie in [1] (siehe auch [2]) bezeichnen wir Ringe mit *echt eingeschränkter* Minimalbedingung *k-ter Stufe* für Rechtsideale als EE_k *MIR-Ringe*. Dabei soll k eine natürliche Zahl sein. Nach einem Satz des ersten Verfassers [1] ist ein einseitig linksartinscher Ring dann und nur dann linksnoethersch, wenn er ein EE_kMIR-Ring mit einem bestimmten natürlichen k ist. Wir fragen in dieser Arbeit nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein linksnoetherscher Ring einseitig linksartinsch ist. Doch zunächst wollen wir die wichtigen Bezeichnungen aufführen: Für einen Ring R sei $(R, +)$ die additive Gruppe von R; $J(R)$ bezeichnet das Jacobsonsche Radikal von R. Für eine Primzahl p sei $Z(p)$ die zyklische Gruppe der Ordnung p und $Z(p^\infty)$ die Prüfersche p-Gruppe. Mit $Z(\infty)$ bezeichnen wir die unendliche zyklische Gruppe.

Wir beweisen den folgenden

Satz. *Ein linksnoetherscher Ring R ist dann und nur dann einseitig linksartinsch, wenn er die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) *R ist ein EE_kMIR-Ring mit einem natürlichen k,*

(b) *Ist der Faktorring R/A für ein Ideal A von R nicht rechtsartinsch, so ist A kein Primideal von R. Ist ferner $R^2 \subseteqq B$ für ein Ideal B von R, so gilt $(R/B, +) \neq Z(\infty)$.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden Hilfssatz, den wir ohne Beweis angeben:

Hilfssatz ([4]). *Ein linksnoetherscher Ring R ist dann und nur dann linksartinsch, wenn R die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a′) *Der Rechtsannulator $(0: R')_r$ jedes Faktorringes R' von R ist endlich,*

(b′) *Jedes Primideal P $(\neq R)$ ist maximal und der Faktorring R/P ist linksartinsch.*

Beweis des Satzes. R sei ein linksnoetherscher Ring, der einseitig linksartinsch sei. Nach [1] ist R ein EE_kMIR-Ring. Dabei ist k eine geeignete natürliche Zahl. Es gilt also (a). Das Radikal $J(R)$ von R ist nilpotent. Ist P ein Primideal von R, so gilt $P \supseteqq J(R)$. Daher ist klar, daß R/P radikalfreier linksartinscher Ring ist. Somit ist

R/P auch rechtsartinsch. Es sei A ein Ideal von R, für welches $R^2 \subseteqq A$ gilt, d. h. der Faktorring R/A ist ein Zeroring. Da R/A andererseits linksartinsch ist, gilt offenbar $(R/A, +) \neq Z(\infty)$. R erfüllt also die Bedingung (b).

Umgekehrt, sei R ein linksnoetherscher Ring, der die Bedingungen (a) und (b) des Satzes erfüllt. Da R nicht rechtsartinsch ist, genügt es wegen Hilfssatz zu zeigen, daß R die Bedingungen (a′) und (b′) erfüllt.

Nach [2] ist $J(R)$ nilpotent und $R/J(R)$ rechtsartinsch. Es sei $P \neq R$ ein Primideal von R. Dann gilt $P \supseteqq J(R)$. Der Faktorring R/P ist also ein *primär* radikalfreier rechtsartinscher Ring. Folglich ist R/P einfach und linksartinsch. P ist also maximales Ideal von R. R erfüllt tatsächlich die Bedingung (b′) des Hilfssatzes. (a′) beweisen wir durch vollständige Induktion nach k.

Für $k=1$ ist R ein nicht primer $EE_1 MIR$-Ring, besitzt also die Struktur von Satz 5 ein [5]. Wäre R Radikalring, so wäre es nach [5] ein Zeroring. Wieder nach [5] gälte entweder $(R, +) \cong Z(\infty)$ oder enthielte R ein Ideal A $(\cong Z(\infty))$, so daß R/A ein Ideal vom Typ $Z(p^\infty)$ besäße. Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung über R. Folglich besitzt R nach [5] (Satz 5) ein Linkseinselement. R erfüllt also die Bedingung (a′) des Hilfssatzes. Es sei $k>1$ eine natürliche Zahl, und sei vorausgesetzt, daß die Behauptung für alle natürlichen Zahlen n mit $n<k$ bewiesen sei. Da $k>1$ ist, enthält R ein solches minimales Ideal N, daß R/N ein EE_{k-1}MIR-Ring ist. R/N ist wieder linksnoethersch und erfüllt offenbar die Bedingung (b) des Satzes. Nach Induktionsvoraussetzung erfüllt R/N also die Bedingung (a′).

Es sei D ein beliebiges Ideal von R. Wegen der Induktionsvoraussetzung ist der Rechtsannulator von $R/(D+N)$ endlich. Es sei $\bar{A}$ der Rechtsannulator von R/D. $\bar{N}$ sei das Bild von N bei dem natürlichen Homomorphismus von R auf R/D. Ist $\bar{N}=(\bar{0})$, d. h. $D \supseteqq N$, so gilt $R/(D+N) \cong R/D$. Daher ist $\bar{A}$ endlich. Es sei $\bar{N} \neq (\bar{0})$. Es gilt dann $N \cap D=(0)$. Ist $\bar{N} \subseteqq \bar{A}$, so gilt $RN=(0)$. Ist auch $NR=(0)$, so gilt wegen der Minimalität (von N) $N \cong Z(p)$ (p sei Primzahl). Daher ist $\bar{A}$ endlich (denn $\bar{A}/\bar{N}$ ist endlich). Es sei nun $NR \neq (0)$, es gilt dann $NR=N$. Wir können leicht einsehen, daß R in diesem Falle kein Radikalring ist. Wir betrachten N als einen R-Rechtsmodul und machen es zu einem $\bar{\bar{R}}(\stackrel{\text{def}}{=} R/J(R))$—Rechtsmodul durch die folgende Definition:

$$x\bar{\bar{r}} \stackrel{\text{def}}{=} xr \quad (x \in N, r \in R, \bar{\bar{r}} \in \bar{\bar{R}}).$$

Dies ist möglich, da $NJ(R)=(0)$ gilt. Jeder $\bar{\bar{R}}$-Untermodul von N ist offenbar auch ein R-Untermodul. Da N ein einfacher R-Rechtsmodul ist (das folgt unmittelbar aus der Minimalität von N und aus $RN=(0)$), muß N auch einfacher $\bar{\bar{R}}$-Rechtsmodul sein. Folglich ist N einfacher unitärer $\bar{\bar{R}}$-Rechtsmodul. Nach [3] (Satz 8.9) gilt

$$\bar{\bar{R}} = S_{n_1}^{(1)} \boxplus \ldots \boxplus S_{n_t}^{(t)},$$

wobei $S_{n_i}^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, t)$ der Ring aller Matrizen vom Typ $n_i \times n_i$ mit Elementen aus dem Schiefkörper $S^{(i)}$ ist. Es gibt dann ein $S^{(j)}$, etwa $S^{(1)}$, mit $NS_{n_1}^{(1)}=N$. N ist also ein unitärer einfacher $S_{n_1}^{(1)}$ rechtsmodul. Daher ist N $S_{n_1}^{(1)}$-isomorph zu einem minimalen Rechtsideal des Ringes-$S_{n_1}^{(1)}$. Wegen $RN=(0)$ ist jede Untergruppe von $(N, +)$ ein Ideal Linksideal von R. Daher ist $(N, +)$ eine Gruppe mit Maximalbedingung für Untergruppen. Hätte $S^{(1)}$ die Charakteristik Null, so besäße $(N, +)$ eine Untergruppe U, die zur additiven Gruppe aller rationalen Zahlen isomorph ist. Folglich hätte $(N, +)$ keine Maximalbedingung für Untergruppen, denn U hat keine solche.

$S^{(1)}$ hat also die Primcharakteristik p. Es gilt also $pN=(0)$. $(N, +)$ ist folglich die direkte Summe von Exemplaren der Gruppe $Z(p)$. Wegen der Maximalbedingung ist N endlich. Wie oben ist $\bar{A}$ dann endlich.

Es sei jetzt $\bar{A} \supseteqq \bar{N}$. Dann gilt $\bar{A} \cap \bar{N} = (\bar{0})$. Daher gilt $\bar{A} \cong \bar{A} + \bar{N}/\bar{N}$. Da $\bar{A} + \bar{N}/\bar{N}$ in den Rechtsannullator von $R/(D+N)$ isomorph eingebettet werden kann, ist $\bar{A}$ endlich. Wir haben also gezeigt, daß R die Bedingung (a′) des Hilfssatzes erfüllt.

Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

Literatur

[1] DINH VAN HUYNH, Über artinsche Ringe, die noethersch sind, *Publ. Math. (Debrecen)* **23**, (im Druck).

[2] DINH VAN HUYNH, Über Ringe mit eingeschränkter Minimalbedingung höherer Stufe für Rechtsideale I, *Math. Nachr.* (im Druck).

[3] A. KERTÉSZ, Vorlesungen über artinsche Ringe, *Budapest—Leipzig*, 1968.

[4] A. KERTÉSZ, Über noethersche Ringe, die artinsch sind, *Acta Sci. Math. Szeged* **31** (1970), 219—221.

[5] A. WIDIGER, Über Ringe mit eingeschränkter Minimalbedingung für Rechtsideale, *Beiträge zur Algebra und Geometrie Halle* **1** (1971), 141—156.

(Eingegangen am 18. November, 1974.)