Eine Methode zur Lösung von metrischen Aufgaben der Perspektive (Zentralaxonometrie)

Von J. SZABÓ (Debrecen)

Wir betrachten in dieser Arbeit den Begriff der Perspektive nach STIEFEL [2] als eine eigentlich degenerierte Abbildung des projektiven Raumes auf eine projektive Ebene. Diese Abbildung wird in der Literatur auch Zentralaxonometrie, Projektivaxonometrie, oder Perspektive genannt. Nach dem Hauptsatz dieser Abbildung läßt sich diese Perspektive eines Objekts **K** immer als eine projektive Transformation einer Zentralprojektion von **K** zu betrachten. Dieser Satz kann noch durch eine Bedingung verschärft werden: Wenn die Fluchtpunkte der Bildachsen nicht auf einer Geranden liegen, können wir das perspektivische Bild von **K** affin zu einer solchen Zentralprojektion des Gegenstands **K** betrachten. Eine weitere Verschärfung ist unmöglich, so daß diese Perspektive im allgemeinen Fall eine Zentralprojektion ist. Für den Fall der Zentralprojektion ist eine notwendige und hinreichende Bedingung von KRUPPA bekannt (siehe z. B. [1] S. 181.) Aus den bisherigen Tatsachen folgen zwei Wege zur Lösung von metrischen Aufgaben. Einer der Wege ist die Zurückführung der Perspektiva durch eine projektive Transformation auf eine Zentralprojektion, der andere Weg die Bestimmung der Mongesche Projektionen durch die Inversabbildung.

In dieser Arbeit werden wir eine dritte Methode geben, mit der die metrischen Aufgaben dieser Perspektive einheitlich gelöst werden können. Eine der Verallgemeinerungen des Eckhartschen Einschneideverfahrens führt zur Perspektive, genauer gesagt in der Arbeit [3] befinden sich notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, in welchen Fällen das Ergebnis des zentralen Einschneiderverfahrens ein lineares Bild d. h. eine Perspektive ist. Die Figuren 1. und 2. zeigen die zwei verschiedene Fälle und die Bedingungen. S^1 und S^2 sind die Mittelpunkte der zwei Projektionsstrahlenbüschel; $\mathbf{K}'$ und $\mathbf{K}''$ sind projektive Transformationen der Mongeschen Projektionen der räumlichen Konfiguration **K**. Die Fluchtpunkte U_y^s, U_x^s müssen auf der Geraden S^1S^2 liegen. Ein Punkt L_z muß noch existieren, so daß L_z', L_z'', S^1, S^2 kollinear sind. Endlich dürfen die Punkte O' und O'' nicht auf die Gerade S^1S^2 fallen.

In dieser Untersuchung betrachten wir zwei Fälle:

1. Das Achsenkreuz der Perspektive hat die folgenden Eigenschaften:
   a) Die Fluchtpunkte $U_x^sU_y^s$ bestimmen eine solche Gerade, die zur Achse z^s senkrecht ist.

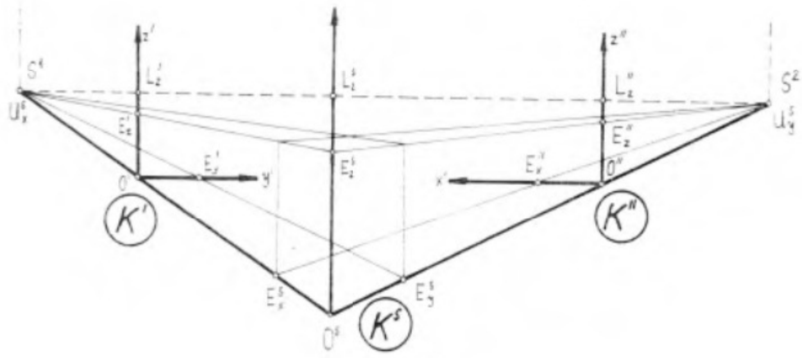

Fig. 1.

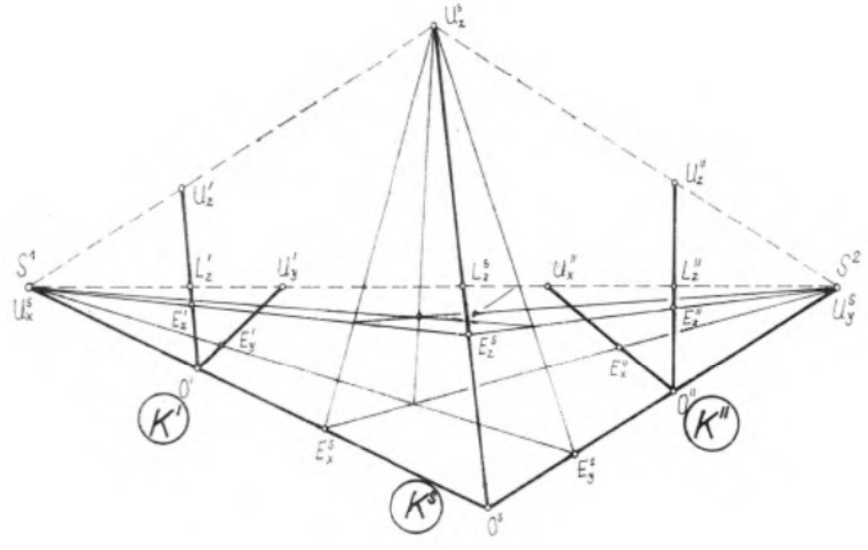

Fig. 2.

b) Der Fluchtpunkt U_z^s ist ein unendlichferner Punkt, dh. die Punktreihe z und z^s sind affin zueinander.

2. Das Achsenkreuz ist allgemein, aber nicht degeneriert.

Unser Bestreben geht dahin, daß wir zur Perspektive $\mathbf{K}^*$ eines Gegenstands $\mathbf{K}$ Bilder $\mathbf{K}'$ und $\mathbf{K}''$ konstruieren, aus denen wir das Bild $\mathbf{K}^*$ mit dem zentralen Einschneideverfahren herstellen können; gleichzeitig lassen sich die Bilder $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}''$ durch „einfache" Transformationen in die Mongesche Lage bringen.

1. Fall.

Es sei das perspektivische Achsenkreuz $O^*, E_x^*, E_y^*, E_z^*\ U_x^*, U_y^*, U_{z\infty}^*$, gegeben, wo $O^*E_z^*$ senkrecht zur Geraden $U_x^*U_y^*$ ist und sei außerdem die wahre Länge der Einheitsstrecke $\mathbf{e}$ gegeben. (Fig. 3) Wählen wir die Strecken $\overline{O'E_z'}=\overline{O''E_z''}=\mathbf{e}$, dann ist für die Strecke $\overline{O'L_z'}=\overline{O''L_z''}$, also ist die Gerade $O'O''$ parallell zur S^1S^2, und E_y'', E_x' fallen auf $O'O''$. Im allgemeinen Fall ist $\overline{O'E_x'}\neq\overline{O''E_y''}\neq\mathbf{e}$. Durch eine orthogonale Affinität wählen wir zu $\mathbf{K}'$ ein Bild $\tilde{\mathbf{K}}'$ auf die folgende

Weise: die Affinitätachse sei $O'E_z'$, und für den zu E_x' gehörenden Punkt $\tilde{E}_x'$, gelte $O'\tilde{E}_z'=\mathbf{e}$. Auf ähnliche Weise bekommt man aus $\mathbf{K}''$ das Bild $\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}''$, und deswegen besteht zwischen $\tilde{\mathbf{K}}'$ und $\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}''$ ein Mongesches Verhältnis, eine Mongesche Lage.

2. Fall.

Die Projektionszentren S^1, S^2, S^3 müssen als $S^1=U_y^*$, $S^2=U_x^*$, $S^3=U_z^*$ gewählt werden. [3]. In diesem Fall können wir spezielle Bilder $\mathbf{K}', \mathbf{K}'', \mathbf{K}'''$ konstruieren,

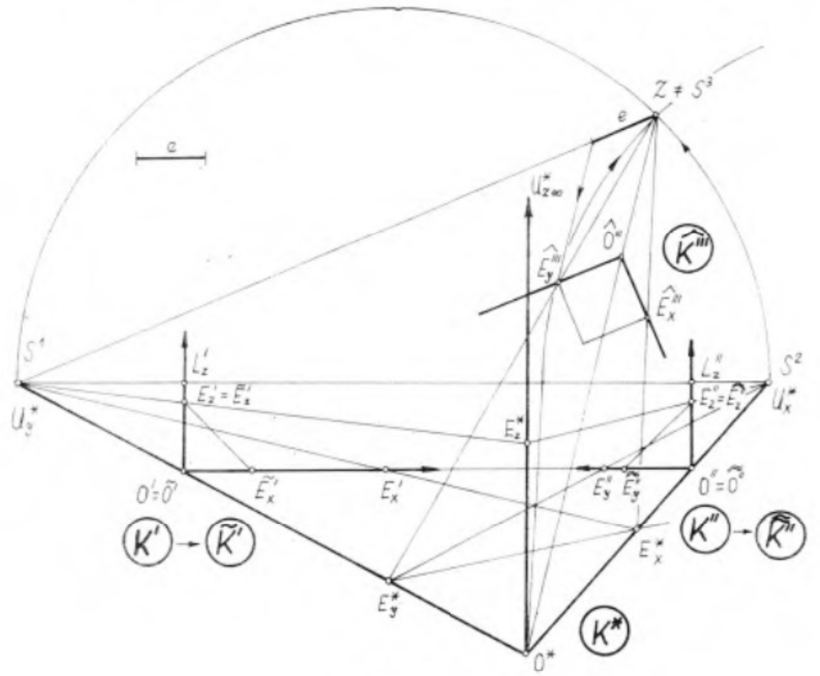

Fig. 3.

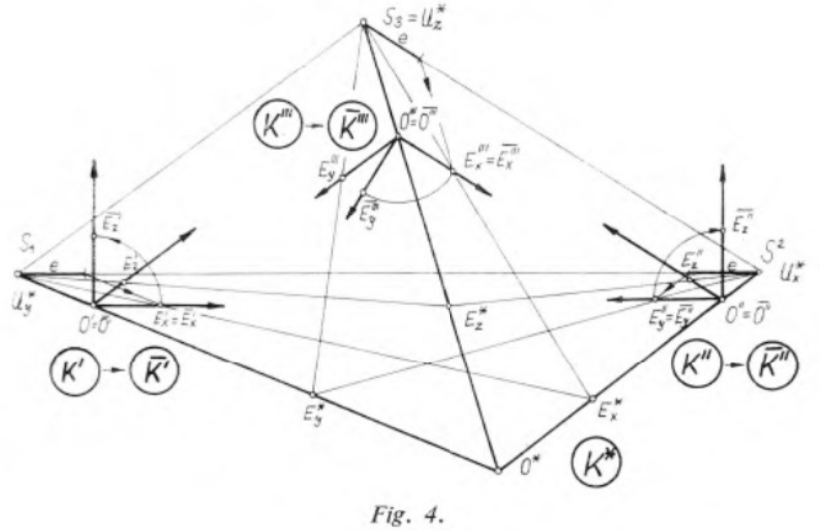

Fig. 4.

die zu den entsprechenden Mongeschen Bildern $\overline{\mathbf{K}}', \overline{\mathbf{K}}'', \overline{\mathbf{K}}'''$ affin sind, und aus $\mathbf{K}', \mathbf{K}'', \mathbf{K}'''$ wir das perspektivische Bild $\mathbf{K}^*$ mit dem Einschneideverfahren herstellen können. (Fig. 4.) Es ist auch möglich, je eine Strecke in den Bildern $\mathbf{K}', \mathbf{K}''$, $\mathbf{K}'''$ frei wählen, d. h. $\overline{O'X'}=\overline{O''Y''}=\overline{O'''X'''}=\mathbf{e}$. Es ist auch möglich zu den Bildern $\mathbf{K}', \mathbf{K}'', \mathbf{K}'''$ durch je eine perspektive Affinität solche Bilder $\overline{\mathbf{K}}', \overline{\mathbf{K}}'', \overline{\mathbf{K}}'''$ zu nehmen, die als Mongeschen Projektionen des Gegenstands $\mathbf{K}$ betrachten können. Die Achse der schiefen Affinität zB. zwischen $\mathbf{K}'$ und $\overline{\mathbf{K}}'$ ist $O'E_x'$ und die entsprechenden Punktepaare sind $E_2' \to \overline{E}_2'$, wo $\overline{O'E_2'}=\overline{O'E_x'}$ ist, und die Gerade $O'\overline{E}_2'$ senkrecht zu $O'E_x'$ ist. Zwei Bilder aus $\overline{\mathbf{K}}', \overline{\mathbf{K}}'', \overline{\mathbf{K}}'''$ lassen sich durch eine Drehung in eine Mongesche Lage bringen.

Also gilt der

Satz. *Zur Zentralaxonometrie (Perspektive)* $\mathbf{K}^*$ *eines Gegenstands* $\mathbf{K}$ *kann man immer ein Paar von Seitenbildern* $\mathbf{K}'$ *und* $\mathbf{K}''$ *konstruieren, aus denen das Bild* $\mathbf{K}^*$ *durch das zentrale Einschneideverfahren entsteht und die Bilder können durch je eine perspektive Affinität (in* 1. *Fall durch eine orthogonale, in* 2. *Fall durch eine schiefe) und mit einer Drehung (im* 1. *Fall ohne das) in eine Mongesche Lage gebracht werden.*

Bemerkung: Im 1. Fall können wir zum perspektivischen Grundriß kein Bild $\mathbf{K}'''$ konstruieren, so daß das Bild $\mathbf{K}'''$ zur entsprechenden Mongeschen Projektion affin wäre, und die Perspektive $\mathbf{K}^*$ aus $\mathbf{K}'''$ und z. B. aus $\mathbf{K}'$ durch daß Einschneideverfahren erhalten werden kann. Man muß das Zentrum S^3 im unendlichfernen Punkt der Achse z^* wählen [3]. Infolgedessen besteht zwischen dem entsprechenden Bild $\mathbf{K}'''$ und dem perspektivischen Grundriß immer eine perspektive Affinität. Durch eine perspektive Kollineation können wir zu $\mathbf{K}'''$ oder gleich zum perspektivischen Grundriß ein solches Bild $\overline{\mathbf{K}}'''$ nehmen, daß dieses als Mongesche Projektion betrachtet werden kann.

Literatur

[1] E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie. I. B. *Leipzig* und *Wien* (1923).
[2] E. Stiefel, Lehrbuch der darstellenden Geometrie *Basel* (1947).
[3] J. Szabó, Eine Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens *Publ. Math.* (Debrecen) **14** (1967), 311—319.

(Eingegangen am 2. August 1974.)