Verallgemeinerter Summenbegriff in der p-adischen Analysis mit Anwendung auf die endlichen p-Gruppen

Von L. MÁRKI und L. RÉDEI (Budapest)

Kertész Andor in memoriam

In dieser Arbeit werden wir Summen von der Form $\sum_{i=0}^{\tau} a_i$ definieren, wobei τ eine beliebige ganze p-adische Zahl und die a_i geeignete p-adische Zahlen sind. Kurz gesprochen handelt es sich also um Summen, in denen die obere Summationsgrenze eine ganze p-adische Zahl ist. Die Idee, solche Summen zu definieren, entstand aus gruppentheoretischen Bedürfnissen; es hat sich nämlich gezeigt, daß sie in der Beschreibung der endlichen p-Gruppen gute Dienste leisten. (Hierauf kommen wir am Schluß dieser Arbeit zu sprechen.)

In unseren Untersuchungen brauchen wir einige einfache Eigenschaften der p-adischen Zahlen; hierüber weisen wir auf [3] und [7] hin. Besonders oft werden wir Eigenschaften von ihnen anwenden, die daraus folgen, daß die ganzen p-adischen Zahlen mit der p-adischen Metrik einen kompakten metrischen Raum bilden. (Über solche Räume s. [1].)

Wir bezeichnen den p-adischen Zahlkörper mit $\mathbf{Q}_p$, den Ring der ganzen p-adischen Zahlen mit $\mathbf{Z}_p$ (selbstverständlich beide mit der p-adischen Topologie versehen); $\mathbf{N}$ ist die Menge der nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen und $\mathbf{N}_p$ ist dasselbe wie $\mathbf{N}$ als Teilraum von $\mathbf{Z}_p$ betrachtet.

Eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ von p-adischen Zahlen nennen wir *zulässig*, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{t_n} a_i$ stets existiert, insofern $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (wie auch später) eine in $\mathbf{Z}_p$ konvergente Folge von nichtnegativen ganzen Zahlen ist.

Behauptung. *Für eine zulässige Folge $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ hängt der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{t_n} a_i$ nur von der Folge $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ und vom Grenzwert $\tau=\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ ab, den wir deshalb mit $\sum_{i=0}^{\tau} a_i$ bezeichnen.*

BEWEIS. Es sei $t_n\to\tau$ und $u_n\to\tau$ für $n\to\infty$. Betrachten wir die „gemischte" Folge $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mit $v_n=\begin{cases} t_k & n=2k \\ u_k & n=2k+1 \end{cases}$, die für $n\to\infty$ ebenfalls gegen τ konvergiert.

Da $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ eine zulässige Folge ist, haben wir

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{v_{n+1}} a_i-\sum_{i=0}^{v_n} a_i\right)=0,$$

also auch

$$0=\lim_{k\to 0}\left(\sum_{i=0}^{v_{2k+1}} a_i-\sum_{i=0}^{v_{2k}} a_i\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{u_k} a_i-\sum_{i=0}^{t_k} a_i\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{u_k} a_i-\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{t_k} a_i,$$

w. z. b. w.

Wir bezeichnen mit $\hat{C}(\mathbf{Z}_p)$ die Menge derjenigen Funktionen $f:\mathbf{Z}_p\to\mathbf{Q}_p$, die stetig sind, abgesehen von einer möglichen hebbaren Unstetigkeit an der Stelle Null.

Satz 1. *Eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ $(a_i\in\mathbf{Q}_p)$ ist dann und nur dann zulässig, wenn es eine Funktion $f\in\hat{C}(\mathbf{Z}_p)$ gibt derart, daß $f(i)=a_i$ für alle $i\in\mathbf{N}_p$.*

Beweis. Nach Definition ist $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ dann und nur dann zulässig, wenn für alle Folgen $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathbf{N}_p$, die in $\mathbf{Z}_p$ konvergent sind,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{t_{n+1}} a_i-\sum_{i=0}^{t_n} a_i\right)=0$$

ist. Da aber im Falle $t_n\neq 0$ $(n\in\mathbf{N})$ mit $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ auch $(t_n-1)_{n\in\mathbf{N}}$ in $\mathbf{N}_p$ enthalten ist und in $\mathbf{Z}_p$ konvergiert, ist für eine zulässige Folge $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{t_{n+1}-1} a_i-\sum_{i=0}^{t_n-1} a_i\right)=0.$$

Also gilt

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}(a_{t_{n+1}}-a_{t_n})=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{i=0}^{t_{n+1}} a_i-\sum_{i=0}^{t_n} a_i\right)-\left(\sum_{i=0}^{t_{n+1}-1} a_i-\sum_{i=0}^{t_n-1} a_i\right)\right]=0$$

für alle Folgen $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathbf{N}_p\setminus\{0\}$, die in $\mathbf{Z}_p$ konvergent sind.

Dies bedeutet, daß für jede solche Folge $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ auch (a_{t_n}) eine in $\mathbf{Q}_p$ konvergente Folge ist, und daß $a_{t_n}\to a_t$ für $t_n\to t\in\mathbf{N}_p\setminus\{0\}$ gilt. Dementsprechend ist die Funktion $\tilde{f}:\mathbf{N}_p\to\mathbf{Q}_p: i\mapsto a_i$ stetig, abgesehen von einer möglichen hebbaren Unstetigkeit an der Stelle Null. Es bezeichne nun a den Grenzwert der Funktion $\tilde{f}$ in Null. Wir bilden die Folgen

$$b_i=\begin{cases} a & i=0\\ a_i & i\neq 0\end{cases}\quad\text{und}\quad c_i=\begin{cases} a_0-a & i=0\\ 0 & i\neq 0\end{cases}.$$

Die Folge $(c_i)_{i\in\mathbf{N}}$ ist offenbar zulässig, und es gilt $\sum_{i=0}^{\tau} c_i=a_0-a$ für alle $\tau\in\mathbf{Z}_p$. Es ist klar, daß die Summe (und die Differenz) von zwei zulässigen Folgen wieder zulässig ist, also gilt das auch für $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$. Man sieht auch gleich, daß für $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ die Relation $(*)$ für alle Folgen $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathbf{N}_p$, die in $\mathbf{Z}_p$ konvergieren, erfüllt ist. Dies bedeutet nicht nur, daß $\tilde{g}:\mathbf{N}_p\to\mathbf{Q}_p: i\mapsto b_i$ eine stetige Funktion ist, sondern auch, daß $\tilde{g}$ sich zu einer stetigen Funktion $g:\mathbf{Z}_p\to\mathbf{Q}_p$ fortsetzen läßt (s. z. B. [1], Chap. I,

§ 8, Th. 1). Diese Fortsetzung ist natürlich eindeutig, denn $\mathbf{N}_p$ ist dicht in $\mathbf{Z}_p$. Betrachten wir nun die Funktion $f:\mathbf{Z}_p \to \mathbf{Q}_p$,

$$f(\tau) = \begin{cases} a_0 = g(0)+(a_0-a) & \tau = 0 \\ g(\tau) & \tau \neq 0 \end{cases}, \quad \text{so gilt}$$

$f \in \hat{C}(\mathbf{Z}_p)$ und $f(i) = a_i$ für alle $i \in \mathbf{N}_p$.

Umgekehrt, es sei $f \in \hat{C}(\mathbf{Z}_p)$. Wir wollen zeigen, daß $(f(i))_{i\in\mathbf{N}}$ eine zulässige Folge ist. Der Kürze halber nennen wir eine Funktion $f \in \hat{C}(\mathbf{Z}_p)$ zulässig, wenn $(f(i))_{i\in\mathbf{N}}$ eine zulässige Folge ist. Es ergibt sich trivialerweise, daß für zwei beliebige zulässige Funktionen f und g und für eine beliebige p-adische Zahl α auch $f+g$ und αf zulässige Funktionen sind. Betrachten wir unsere Funktion $f \in \hat{C}(\mathbf{Z}_p)$; man kann sie (eindeutig) derart in der Form $f=g+h$ darstellen, daß $g:\mathbf{Z}_p \to \mathbf{Q}_p$ eine stetige Funktion ist und die Funktion h in der Menge $\mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$ identisch verschwindet. Da wir schon gesehen haben, daß jede Folge $(a, 0, \dots, 0, \dots)$ zulässig ist, ist die Funktion h gewiß zulässig. Nach der obigen Bemerkung brauchen wir deshalb nur die stetigen Funktionen zu untersuchen. Wir dürfen also annehmen, daß unsere Funktion $f:\mathbf{Z}_p \to \mathbf{Q}_p$ stetig ist. Ist nun $f(x)=1$ für alle $x \in \mathbf{Z}_p$, so ist $\sum_{i=0}^{t} f(i) = t+1$ für $t \in \mathbf{N}_p$; bei $\tau \in \mathbf{Z}_p$, $t_n \in \mathbf{N}_p$, $t_n \to \tau$ existiert also $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{t_n} f(i) = \lim_{n\to\infty} (t_n+1) = \tau+1$. Deshalb sind alle konstanten Funktionen zulässig. Betrachten wir nun die Potenzfunktion $f(x)=x^k$ für irgendeine natürliche Zahl k. Diese Funktion ist auch zulässig, denn $\sum_{i=0}^{t} i^k$ $(t \in \mathbf{N}_p)$ ist ein Polynom $k+1$-ten Grades in t, und deshalb stetig. Bisher wissen wir also, daß jedes Polynom (mit Koeffizienten aus $\mathbf{Q}_p$) eine zulässige Funktion ist. Nun wollen wir das p-adische Analogon des Weierstrass'-schen Approximationssatzes anwenden, das zuerst von J. Dieudonné [2] bewiesen wurde: jede stetige Funktion $f: \mathbf{K} \to \mathbf{Q}_p$, wobei $\mathbf{K}$ ein kompakter Teilraum von $\mathbf{Q}_p$ ist, läßt sich durch Polynome (mit koeffizienten aus $\mathbf{Q}_p$) gleichmäßig approximieren. Hieraus folgt, daß jede stetige Funktion zulässig ist — um aber darauf schließen zu können, müssen wir noch zeigen, daß die Grenzfunktion einer konvergenten Folge von zulässigen Funktionen wieder zulässig ist. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß f_n für $n \to \infty$ gegen f gleichmäßig in $\mathbf{Z}_p$ konvergiert, und daß die Funktionen f_n zulässig sind. Ferner sei ε eine beliebige positive (reelle) Zahl, und $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{N}_p$ eine Folge, die zu einer Zahl $\tau \in \mathbf{Z}_p$ konvergiert. Es sei noch $\Delta_n = \sum_{i=0}^{t_{n+1}} f(i) - \sum_{i=0}^{t_n} f(i)$; wir suchen eine natürliche Zahl M derart, daß für $n > M$ $|\Delta_n| < \varepsilon$ ist ($|x|$ bezeichnet den (p-adischen) Betrag von $x \in \mathbf{Q}_p$). Nach Voraussetzung gilt $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbf{Z}_p$, wenn $m > M'$ mit einem geeigneten M' ist. Nehmen wir nun eine Zahl $k > M'$. Dann ist

$$\Delta_n = \left(\sum_{i=0}^{t_{n+1}} [f(i) - f_k(i)]\right) + \left(\sum_{i=0}^{t_{n+1}} f_k(i) - \sum_{i=0}^{t_n} f_k(i)\right) + \left(\sum_{i=0}^{t_n} [f_k(i) - f(i)]\right) = A_n + B_n + C_n.$$

Wegen der Wahl von k ist $|A_n| < \varepsilon$ und $|C_n| < \varepsilon$, und weil f_k zulässig ist, gibt es eine Zahl M mit $|B_n| < \varepsilon$ für $n > M$. Mit diesem M haben wir also $|\Delta_n| < \varepsilon$ für $n > M$, w. z. b. w.

Jetzt wollen wir die durch die Summenbildung angegebenen Funktionen untersuchen. Bekanntlich ist die Menge der stetigen Funktionen $f:\mathbf{Z}_p\to\mathbf{Q}_p$ versehen mit der Norm $\|f\|=\sup\limits_{\tau\in\mathbf{Z}_p}|f(\tau)|$ ein nicht-archimedischer Banachraum, den wir mit $C(\mathbf{Z}_p)$ bezeichnen. Es ist auch leicht zu sehen, daß $\hat{C}(\mathbf{Z}_p)$ ausgestattet mit denselben Operationen und mit derselben Norm ebenfalls ein nicht-archimedischer Banachraum ist. $C(\mathbf{Z}_p)$ ist wohl ein maximaler Unterraum von $\hat{C}(\mathbf{Z}_p)$.

Es sei aus $f\in\hat{C}(\mathbf{Z}_p)$ die „Summenfunktion"

$$\varphi_f(\tau)=\sum_{i=0}^{\tau-1}f(i)$$

gebildet. (Dadurch, daß wir die Summation bis $\tau-1$ und nicht bis τ führen, werden wir für die Summenfunktionen der stetigen Funktionen eine einfache Charakterisierung erreichen.)

Satz 2. *Die Abbildung $\varphi:f(\tau)\mapsto\varphi_f(\tau)$ ist ein isometrischer Isomorphismus von $\hat{C}(\mathbf{Z}_p)$ auf $C(\mathbf{Z}_p)$; dabei wird $C(\mathbf{Z}_p)$ auf denjenigen seiner Unterräume der Kodimension 1 abgebildet, der aus den in Null verschwindenden Funktionen besteht.*

Beweis. Zuerst beweisen wir die Stetigkeit von $\varphi_f(\tau)$ $\left(f\in\hat{C}(\mathbf{Z}_p)\right)$. Es sei $\tau_n\to\tau$ in $\mathbf{Z}_p$ für $n\to\infty$. Wir sollen zeigen, daß $\varphi_f(\tau_n)\to\varphi_f(\tau)$ für $n\to\infty$. Wählen wir für jedes n eine in $\mathbf{Z}_p$ gegen τ_n konvergierende Folge $(t_{kn})_{k\in\mathbf{N}}$ von positiven ganzen Zahlen, ferner eine Folge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ von positiven reellen Zahlen mit $\varepsilon_n\to 0$. Mit t_n bezeichnen wir ein Element der Folge $(t_{kn})_{k\in\mathbf{N}}$ mit $|t_n-\tau_n|<\varepsilon_n$ und $|\varphi_f(t_n)-\varphi_f(\tau_n)|<\varepsilon_n$. Dann ist $t_n\to\tau$, also $\varphi_f(t_n)\to\varphi_f(\tau)$ für $n\to\infty$, und unsere Behauptung folgt nun aus der zweiten Eigenschaft von t_n.

Es ist klar, daß φ eine lineare Abbildung ist. Um die Umkehrbarkeit von φ zu beweisen, genügt es deshalb zu zeigen, daß aus $\varphi_f(\tau)\equiv 0$ für alle $t\in\mathbf{N}_p$ $f(t)=0$ folgt, denn $\mathbf{N}_p$ ist dicht im Bereich $\mathbf{Z}_p\setminus\{0\}$, in welchem $f(t)$ stetig ist, und $0\in\mathbf{N}_p$ ist. Nun gilt aber $0=\varphi_f(t)=\sum\limits_{i=0}^{t-1}f(i)$, also erhalten wir die gewünschte Behauptung durch Induktion nach t. Somit ist φ ein Isomorphismus des Vektorraumes $\hat{C}(\mathbf{Z}_p)$ auf einen Unterraum von $C(\mathbf{Z}_p)$. Als nächster Schritt beweisen wir, daß φ eine isometrische Abbildung ist. Für $f\equiv 0$ ist auch $\varphi_f\equiv 0$. Es sei $f\in\hat{C}(Z_p)$, $\|f\|=\sup\limits_{\tau\in\mathbf{Z}_p}|f(\tau)|=M>0$. Dann ist für ein beliebiges $\tau\in\mathbf{Z}_p$

$$|\varphi_f(\tau)|=\left|\lim_{t_n-1\to\tau-1}\sum_{i=0}^{t_n-1}f(i)\right|\leqq\sup_{i\in\mathbf{N}_p}|f(i)|,$$

also $\|\varphi_f\|\leqq\|f\|$. Andererseits ist es leicht zu zeigen, daß es ein $t\in\mathbf{N}_p$ mit $f(t)=M$ gibt. Bezeichnen wir mit t_0 die kleinste natürliche Zahl, für welche diese Gleichheit gilt. Dann ist

$$|\varphi_f(t_0+1)|=\left|\sum_{i=0}^{t_0}f(i)\right|=|f(t_0)|=M,$$

und deshalb $\|\varphi_f\|\geqq\|f\|$. Damit ist $\|f\|=\|\varphi_f\|$ bewiesen.

Jetzt zeigen wir, daß alle Funktionen $\varphi_f(\tau)$ mit $f \in C(\mathbf{Z}_p)$ in Null verschwinden. Wegen der Isometrie von φ genügt es als f nur Polynome in Betracht zu ziehen, denn sie sind dicht in $C(\mathbf{Z}_p)$. Da aber φ auch linear ist, dürfen wir uns auf die Funktionen $f(\tau)=\tau^k$ beschränken, wobei k jede nichtnegative ganze (rationale) Zahl sein kann. Für $k=0$ ist $\varphi_f(\tau)=\tau$, also $\varphi_f(0)=0$. Im Fall $k>0$ nehmen wir eine Folge in $\mathbf{N}_p$, die gegen Null konvergiert, z. B. $(p^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Wir müssen also die Potenzsummem

$$\varphi_f(p^n)=\sum_{i=0}^{p^n-1} i^k$$

untersuchen. Allgemeiner betrachten wir die Potenzsummen

$$S(m,k)=\sum_{i=0}^{m} i^k.$$

Aus der bekannten Formel für $S(m,k)$ als Summe der ersten $m+1$ Glieder einer arithmetischen Folge k-ter Ordung folgt die Existenz einer von m unabhängigen natürlichen Zahl $c=c(k)$ derart, daß $cS(m,k)$ durch $m+1$ teilbar ist (für alle $m\in\mathbf{N}$). Dann ist $c\varphi_f(p^n)$ als ganze rationale Zahl teilbar durch p^n, und deshalb $|c\varphi_f(p^n)|\leqq|p^n|$, also $|\varphi_f(p^n)|\leqq\frac{|p^n|}{|c|}\to 0$ für $n\to\infty$. Damit ist $\varphi_f(0)=0$ bewiesen.

Schließlich sei h irgendeine Funktion aus $C(\mathbf{Z}_p)$, ferner sei $g(\tau)=h(\tau)-h(0)$. Dann ist $h(\tau)=g(\tau)+h(0)$ und $h(0)$ ist die Summenfunktion von $\hat{f}(\tau)=\begin{cases} h(0) & \tau=0 \\ 0 & \tau\neq 0\end{cases}$.
Wir haben also $g\in C(\mathbf{Z}_p)$, $g(0)=0$ und suchen eine Funktion $f\in C(\mathbf{Z}_p)$ mit $g=\varphi_f$. Zunächst wollen wir zeigen, daß wir uns auf den Fall beschränken dürfen, daß g ein Polynom ist. Es sei g eine beliebige Funktion aus $C(\mathbf{Z}_p)$ mit $g(0)=0$. Dann gibt es eine Folge von Polynomen $\tilde{p}_n$, die gleichmäßig gegen g konvergiert. Wir betrachten die Polynome $p_n(\tau)=\tilde{p}_n(\tau)-\tilde{p}_n(0)$; wegen $\tilde{p}_n(0)\to g(0)=0$ konvergiert die Folge p_n ebenfalls gleichmäßig gegen g. Da die Polynome p_n in Null verschwinden, gibt es nach Voraussetzung Funktionen $f_n\in C(\mathbf{Z}_p)$ mit $p_n=\varphi_{f_n}$. Da aber φ^{-1} eine isometrische, lineare Abbildung ist, und die Folge p_n gleichmäßig konvergiert, tut das auch die Folge $f_n=\varphi^{-1}_{p_n}$. Ist f ihre Grenzfunktion, so gilt $\varphi_f=g$. Damit haben wir die gewünschte Funktion gefunden. Wir brauchen also nur die in Null verschwindenden Polynome darzustellen. Zu diesem Zweck genügt es aber zu bemerken, daß für $f(\tau)=\tau^k\,(k\in\mathbf{N})$ die Funktion φ_f ein in Null verschwindendes Polynom $k+1$-ten Grades ist; diese Polynome φ_f bilden also eine Basis des Vektorraumes der in Null verschwindenden Polynome. Wegen der Linearität von φ kann deshalb jedes Polynom g mit $g(0)=0$ in der Form $g=\varphi_f$ dargestellt werden, wobei wir sogar wissen, daß für ein Polynom g n-ten Grades die zugehörige Funktion f ein Polynom $n-1$-ten Grades ist. Dies schließt den Beweis vom Satz 2.

Bemerkung. Wenn wir $C(\mathbf{Z}_p)$ (oder $\hat{C}(\mathbf{Z}_p)$) als eine nicht-archimedische Banachalgebra auffassen, ist φ kein Homomorphismus mehr. Z. B. ist für $f(\tau)=\tau$ $(\varphi_f)^2\neq\varphi_{f^2}$, da φ_f ein Polynom zweiten und φ_{f^2} ein Polynom dritten Grades ist.

Jetzt wollen wir noch die in Aussicht gestellte gruppentheoretische Anwendung unserer Ergebnisse andeuten. Hierbei stützen wir uns wesentlich auf die Arbeit

L. Rédei [5], deren Methode wir nun erweitern, indem wir mit p-adischen ganzen Zahlen anstatt mit nichtnegativen ganzen Zahlen arbeiten. Natürlich wird dabei A^α für ein Gruppenelement A von p-Potenzordnung $O(A)$ und für ein $\alpha\in\mathbf{Z}_p$ als A^a erklärt, indem man für a eine ganze rationale Zahl mit $\alpha\equiv a \pmod{O(A)}$ nimmt. Hier besprechen wir aber nur die Abweichungen der zugrunde liegenden Vektorrechnung, ohne die in [5] dargestellte Theorie zu wiederholen. Unter anderem hat diese erweiterte Vektorrechnung den bedeutenden Vorteil, daß man durch sie in der Gruppe nicht nur die Bildung von Produkten und Potenzen (wie mit der Vektorrechnung in [4]), sondern auch die des Inversen beherrschen kann. Dieser Umstand bedeutet eine wesentliche Vereinfachung, wenn man die Gruppe vermittels einer Basis angibt. Eine ausführliche Beschreibung der endlichen p-Gruppen, die auch die hier folgenden Bemerkungen benützt, wird das Buch [6] darstellen, das zur Zeit noch in Vorbereitung ist.

Wir erweitern also die Vektorrechnung, die auf den Seiten 428—430 von [5] gegeben ist. Die Elemente s_{ijk} seien nun aus $\mathbf{Z}_p$ gewählt, mit der Einschränkung, daß für $j=k$ sogar $|s_{ijj}-1|\leqq|p|$ vorausgesetzt wird (d. h. die Elemente s_{ijj} Einseinheiten sind). Die Variable t wählen wir ebenfalls aus $\mathbf{Z}_p$. Die Rechengesetze geben wir auch in diesem Fall mit Hilfe der Funktionen α_l und β_l und der „Hilfsfunktionen" $a_l, b_l, c_l, d_l, e_l, f_l$ an, die wir wieder mit den rekursiven Formeln (4)—(12) aus [5] definieren wollen. Da in diesen Formeln auch Summen mit einer oberen Summationsgrenze aus $\mathbf{Z}_p$ vorkommen, brauchen wir nach Satz 1 die Stetigkeit unserer Funktionen und Hilfsfunktionen. Dies prüft man durch Induktion leicht nach, wenn man die folgenden zwei Tatsachen in Betracht zieht:

1) Nach Satz 2 sind die Summenfunktionen auch stetig.

2) Die Funktion x^y ist für Einseinheiten x eine stetige Funktion von $y\in\mathbf{Z}_p$ (s. z. B. [3]).

Damit können wir die in [5] definierte Vektorrechnung auch in diesem allgemeineren Fall durchführen.

Bemerkung bei der Korrektur. Erst inzwischen wurde uns die Arbeit von G. Overholtzer [4] bekannt, in der unsere (p-adischen) Summenfunktionen ebenfalls definiert sind. Er benützt sie bei der Untersuchung einer p-adischen Gammafunktion. Die einzige Überdeckung mit obigem besteht im kleinen Teil unseres Satzes 2, daß die Summenfunktion einer (gleichmäßig) stetigen Funktion auf $\mathbf{Z}_p$ wieder eine solche Funktion ist.

Literaturverzeichnis

[1] N. Bourbaki, Topologie générale, Chap. I, II, 3^e éd. *Paris*, 1961.
[2] J. Dieudonné, Sur les fonctions continues p-adiques, *Bull. Sci. Math.* **68** (1944), 79—95.
[3] H. Hasse, Zahlentheorie, 2. Aufl., *Berlin*, 1963.
[4] G. Overholtzer, Sum functions in elementary p-adic analysis, *Amer. J. Math.* **74** (1952), 332—346.
[5] L. Rédei, Eine Vektorrechnung mit Anwendung in der Theorie der endlichen p-Gruppen, *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai*, **6**. *Rings, Modules and Radicals* (Keszthely, 1971), North-Holland, *Amsterdam* (1973), 423—445.
[6] L. Rédei, *Endliche p-Gruppen, I.* Akadémiai Kiadó, *Budapest* (in Vorbereitung).
[7] A. C. M. van Rooij—W. H. Schikhof, Non-Archimedean Analysis, *Nieuw Arch. v. Wisk.* (2) **19** (1971), 120—160.

(Eingekommen am 14. Februar 1975.)