Über äquivalente parameterinvariante Variations-probleme erster Ordnung

Von L. JAKÁL (Sopron)

§ 1. Einleitung

Die Extremalkurven der Variationsprobleme erster Ordung

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F(x^i, \dot{x}^i)\, dt = 0, \quad x^i = x^i(t), \quad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$$

sind durch die Euler—Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\mathscr{E}_i(F) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = 0 \tag{1.1}$$

angegeben. Über die Funktion $F(x, \dot{x})$ soll angenommen werden, daß sie in den $\dot{x}^i$ homogen von erster Ordung ist, ferner die im folgenden vorkommenden Varitions-probleme regular sind.

Zwei Variationsprobleme nennen wir äquivalent, wenn ihre Extremalkurven identisch sind. Es seien durch die Grundfunktionen $F(x, \dot{x})$ und $F^*(x, \dot{x})$ zwei Variationsprobleme angegeben. Sind die Relationen

$$\mathscr{E}_i(F^*) \equiv \lambda_i^r(x)\mathscr{E}_r(F) \tag{1.2}$$

für jede Kurve des Raumes erfüllt, so sind die beiden Variationsprobleme offenbar äquivalent.

Wir beschäftigen uns im folgenden mit jenem Fall, wo $\lambda_i^r(x)$ ein nur von x^i abhängiger Tensor ist.

Der durch (1.2) charakterisierten Fall verallgemeinert offenbar die Arbeit von A. Moór [2]. Ist nämlich

$$\lambda_s^r(x) = \delta_s^r \lambda(x),$$

wo $\lambda(x)$ eine skalare Funktion bedeutet, so geht (1.2) offenbar in (1.5) von [2] über.

a) Ist in der Relation (1.2)

$$\operatorname{Det}(\lambda_i^r) \neq 0,$$

so folgt, aus $\mathscr{E}_r(F)=0$ offenbar auch $\mathscr{E}_i(F^*)=0$, und auch umgekehrt aus $\mathscr{E}_i(F^*)= =0$ folgt $\mathscr{E}_r(F)=0$.

b) Ist aber in (1.2)

$$\operatorname{Det}(\lambda_i^r) = 0,$$

dann folgt zwar aus $\mathscr{E}_r(F)=0$, auch $\mathscr{E}_i(F^*)=0$, umgekehrt ist aber das offenbar nicht notwendigerweise gültig.

In dieser Arbeit wollen wir das folgende Problem untersuchen:

Ist die Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ angegeben, so soll die allgemeinste Form von $F^*(x, \dot{x})$ bestimmt werden, so, daß (1.2) für jede Kurve $x^i(t)$ gültig sei.

Das im vorigen gestellte Problem werden wir erstens im n-dimensionalen Fall untersuchen, aber ausführlich werden wir nur den 2- bzw. 3-dimensionalen Fall behandeln. Das 2-dimensionale Problem ist in [3] eingehend studiert, doch wollen wir hier dieses Problem mit einer, dem zweidimensionalen Fall mehr anpassenden anderen Methode lösen. Der Grundgedanke in unseren Untersuchungen ist die Bestimmung der partiellen ableitungen $F_{\dot{x}^i\dot{x}^j}$ durch die Funktion F_1 von L. Berwald (S. [1], (16.3)).

Ich möchte Herrn Professor Arthur Moór meinen besten Dank ausdrücken für die Konsultationen, die er mit mir über meine Arbeit geführt hat.

§ 2. Der n-dimensionale Fall

Bestimmen wir die Relation (1.2) auf Grund von (1.1) in der Form:

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad &\frac{\partial F^*}{\partial x^i} - \lambda_i^r(x)\frac{\partial F}{\partial x^r} - \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial \dot{x}^i\,\partial x^k} - \lambda_i^r(x)\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^r\,\partial x^k}\right)\dot{x}^k - \\ &- \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial \dot{x}^i\,\partial \dot{x}^k} - \lambda_i^r(x)\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^r\,\partial \dot{x}^k}\right)\ddot{x}^k \equiv 0,\end{aligned}$$

was in $x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i$ eine Identität sein soll, dann muß der Koeffizient von $\ddot{x}^k$ verschwinden. Das Verschwinden der $\ddot{x}^k$ enthaltenden Glieder gibt:

$$(2.2)\qquad \frac{\partial^2 F^*}{\partial \dot{x}^i\,\partial \dot{x}^k} \equiv \lambda_i^r(x)\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^r\,\partial \dot{x}^k}.$$

Offenbar ist die linke Seite dieser Gleichung in i, k symmetrisch. Daraus folgt, daß auch die rechte Seite symmetrisch sein muß, d. h. der schiefsymmetrische Teil der rechten Seite identisch Null ist:

$$\lambda_i^r(x)\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^r\,\partial \dot{x}^k} - \lambda_k^r(x)\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^r\,\partial \dot{x}^i} \equiv 0.$$

Nach einer Kontraktion mit $\dot{x}^i$, bekommt man, in Hinsicht auf die Homogenität erster Ordnung von $F(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$, die folgende Relation:

$$(2.3)\qquad \lambda_s^r(x)\dot{x}^s\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^r\,\partial \dot{x}^k} \equiv 0.$$

Verwenden wir jetzt die Bezeichnungen:

(2.4) $\xi^r \overset{\text{def}}{=} \lambda^r_s(x)\dot{x}^s$, (2.5) $a_{kr} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^r \, \partial \dot{x}^k}$,

so bekommt man statt (2.3):

$$a_{kr}\xi^r = 0. \tag{2.6}$$

Es folgt ferner aus der Homogenität erster Ordung von $F(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$:

$$\dot{x}^r \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^r \, \partial \dot{x}^k} \equiv \dot{x}^r a_{rk} \equiv 0 \tag{2.7}$$

d. h.: $\underset{(1)}{\xi^r} = \lambda(x, \dot{x})\dot{x}^r$ ist immer eine Lösung von (2.6), wo $\lambda(x, \dot{x})$ einen Skalar bedeutet.

Auf Grund von (2.7) gilt für den Rang von (a_{kr}):

$$\operatorname{Rang}(a_{kr}) \leqq n-1. \tag{2.8}$$

Betrachten wir nun in (2.6) die ξ^r als unbekannte Größen (d. h. (2.4) ist dann nur eine der möglichen Formen von ξ^r), so folgt aus (2.6) und (2.8), daß *das Gleichungssystem (2.6) — abgesehen von einem skalaren Faktor — für die ξ^r immer mindestens eine Lösung hat* (nähmlich $\lambda \dot{x}^r$).

Ist nun

$$\operatorname{Rang}(a_{kr}) = n-m, \quad m \geqq 1, \tag{2.9}$$

so hat (2.6) für ξ^r offenbar genau m linear unabhängige Lösungen, die wir mit $\underset{(\alpha)}{\xi^r}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ bezeichnen wollen. *Die allgemeine Lösung* kann nun in der Form:

$$\xi^r = \sum_{\alpha=1}^{m} \varrho_\alpha \underset{(\alpha)}{\xi^r}$$

angegeben werden, d. h. es gilt nach (2.6):

$$\sum_{\alpha=1}^{m} a_{kr} \varrho_\alpha \underset{(\alpha)}{\xi^r} \equiv \sum_{\alpha=1}^{m} \varrho_\alpha \underset{(\alpha)}{\xi^r} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^r \, \partial \dot{x}^k} \equiv 0. \tag{2.10}$$

Vergleichen wir (2.3) und (2.10), so kann — wegen der Identität in der Relation (1.2) — der folgende Satz behauptet werden:

Satz 1. *Bestehen die Relationen (1.2) und (2.9), so gilt*

$$\lambda^r_k(x)\dot{x}^k \equiv \sum_{\alpha=1}^{m} \varrho_\alpha(x, \dot{x}) \underset{(\alpha)}{\xi^r}, \tag{2.11}$$

wo die $\varrho_\alpha(x, \dot{x})$ entsprechende Skalare bedeuten. Es kann immer $\underset{(1)}{\xi^r} = \dot{x}^r$ gesetzt werden.

Die so abgeleitete Relation (2.11) ist eine Verallgemeinerung der Relation (2.4) von [3]; unser Resultat bezeieht sich aber nur auf solche Variationsprobleme, deren Grundfunktionen von x^i, $\dot{x}^i$ abhängig sind.

Gilt statt (2.9) die Relation: Rang $(a_{ik})=n-1$, d. h. hat (2.6) bis auf einen skalaren Faktor nur die einzige Lösung $\dot{x}^k$, so folgt aus (2.11) das

Korollar 1. Ist Rang $(a_{ik})=n-1$, *so besteht die Relation*

$$\lambda_s^r(x)\dot{x}^s = \lambda(x)\dot{x}^r. \tag{2.12}$$

Bemerkung. Der Faktor $\lambda(x)$ ist sicher von $\dot{x}^k$ unabhängig. Der Beweis kann ebenso geführt werden wie in [3], § 2.

Nach einer partiellen Ableitung nach $\dot{x}^k$ bekommen wir die Formel

$$\lambda_k^r(x) = \lambda(x)\delta_k^r, \tag{2.13}$$

und somit wird (1.2) in die Relation (1.5) von [2] übergehen. Dieser Fall ist dort sehr ausführlich behandelt.

§ 3. Der 2-dimensionale Fall

Die bisherigen Untersuchungen sind im n-dimensionalen Fall durchgeführt worden. Im folgenden wollen wir den 2-dimensionalen Fall untersuchen.
Im 2-dimensionalen Fall gelten die Relationen (16.3) von [1]:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^1 \partial \dot{x}^1} = (\dot{x}^2)^2 F_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^1 \partial \dot{x}^2} = -\dot{x}^1\dot{x}^2 F_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2 \partial \dot{x}^2} = (\dot{x}^1)^2 F_1. \tag{3.1}$$

Verwenden wir diese Formeln in (2.3) und dann die Bezeichnung (2.4), so wird:

$$F_1\dot{x}^2(\dot{x}^2\xi^1-\dot{x}^1\xi^2) = 0, \quad F_1\dot{x}^1(\dot{x}^2\xi^1-\dot{x}^1\xi^2) = 0. \tag{3.2}$$

(3.2) ist somit dann, und nur dann gültig, wenn:

a) $F_1 = 0$,

b) $\dot{x}^2\xi^1-\dot{x}^1\xi^2 = 0$.

a) Aus $F_1=0$ und in Hinsicht auf (3.1) folgt, daß $F(x, \dot{x})$ und in Hinsicht auf (2.2) auch $F^*(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^k$ linear sein muß, d. h.

(3.3) $F(x, \dot{x}) = a_s(x)\dot{x}^s$, (3.4) $F^*(x, \dot{x}) = b_s(x)\dot{x}^s$.

(3.3) und (3.4) gibt für (2.1):

$$\left(\frac{\partial b_s}{\partial x^i} - \frac{\partial b_i}{\partial x^s}\right)\dot{x}^s - \lambda_i^r\left(\frac{\partial a_s}{\partial x^r} - \frac{\partial a_r}{\partial x^s}\right)\dot{x}^s \equiv 0. \tag{3.5}$$

Nach einer partiellen Ableitung nach $\dot{x}^j$ wird:

$$\frac{\partial b_j}{\partial x^i} - \frac{\partial b_i}{\partial x^j} \equiv \lambda_i^r \left(\frac{\partial a_j}{\partial x^r} - \frac{\partial a_r}{\partial x^j} \right). \tag{3.6}$$

Unsere bisherigen Resultate fassen wir in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 2. *Gelten die Relationen $F_1=0$ und (1.2), so hat $F(x, \dot{x})$ die Form (3.3), und $F^*(x, \dot{x})$ wird durch (3.4) bestimmt, wo aber noch für die Funktionen $a_s(x)$ $b_s(x)$ die Relationen (3.6) gelten.*

Die Umkehrung dieses Satzes ist trivial, weil jene Funktionen $F(x, \dot{x})$ und $F^*(x, \dot{x})$ welche (3.3) und (3.4), ferner (3.6) erfüllen, genügen auch (1.2), bzw. die damit äquivalente (2.1). Offenbar bekommt man nämlich durch Einsetzen von (3.3) und (3.4) in (2.1) die Gleichung (3.5), die somit wegen (3.6) eine Identität wird. Aus (3.6) folgt noch das

Korollar 2: Wenn $a_s(x)$ ein Gradientenvektor ist, so ist auch $b_s(x)$ ein Gradientenvektor.

Die Umkehrung dieses Satzes ist im allgemeinen nicht gültig, nur dann wenn Det $(\lambda_i^r) \neq 0$.

b) Die charakteristische Gleichung dieses Falles ist ausführlich

$$-\lambda_1^2(x)(\dot{x}^1)^2 + \big(-\lambda_2^2(x) + \lambda_1^1(x)\big)\dot{x}^1\dot{x}^2 + \lambda_2^1(x)(\dot{x}^2)^2 = 0.$$

Nachdem das in $\dot{x}^i$ eine Identität ist, hat man

$$\lambda_1^2 = 0; \quad \lambda_2^2 = \lambda_1^1; \quad \lambda_2^1 = 0. \tag{3.7}$$

Aus (3.7) kann man gleich sehen, daß

$$\mathscr{E}_1(F^*) \equiv \lambda_1^1 \mathscr{E}_1(F), \quad \mathscr{E}_2(F^*) \equiv \lambda_2^2 \mathscr{E}_2(F).$$

Wegen (3.7) gehen diese Formeln in

$$\mathscr{E}_i(F^*) = \lambda(x)\mathscr{E}_i(F) \qquad \lambda(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \lambda_1^1(x) = \lambda_2^2(x)$$

über, und so haben wir wieder den Fall von A. Moór bekommen, welchen — wie schon erwähnt wurde — in [2] ausführlich behandelt ist.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß (3.2) auch dann erfüllt ist, wenn: im Fall b) $\xi^1 = \xi^2 = 0$ gilt. Das ergibt aber nach (2.4): $\lambda_s^r = 0$. Ist noch in b) $\xi^i = \lambda \dot{x}^i$, so haben wir offenbar wieder den Typ (2.12) erhalten.

§ 4. Der 3-dimensionale Fall

Schreiben wir die Eulerschen Homogenitätsrelationen von $F_{\dot{x}^i}(x, \dot{x})$ in dem 3-dimensionalen Fall ausführlich auf, so wird:

$$F_{\dot{x}^1 \dot{x}^i}\dot{x}^i = 0, \quad F_{\dot{x}^2 \dot{x}^i}\dot{x}^i = 0, \quad F_{\dot{x}^3 \dot{x}^i}\dot{x}^i = 0.$$

Betrachten wir $F_{\dot{x}^i \dot{x}^k}$ falls $i \neq k$ als angegebene Größe, und drücken wir jene $F_{\dot{x}^i \dot{x}^k}$, wo $i = k$ ist, durch $F_{\dot{x}^i \dot{x}^k}$ $(i \neq k)$ aus, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} F_{\dot{x}^1 \dot{x}^1} &= -\frac{1}{\dot{x}^1}\left(F_{\dot{x}^1 \dot{x}^2}\dot{x}^2 + F_{\dot{x}^1 \dot{x}^3}\dot{x}^3\right), \\ F_{\dot{x}^2 \dot{x}^2} &= -\frac{1}{\dot{x}^2}\left(F_{\dot{x}^2 \dot{x}^1}\dot{x}^1 + F_{\dot{x}^2 \dot{x}^3}\dot{x}^3\right), \\ F_{\dot{x}^3 \dot{x}^3} &= -\frac{1}{\dot{x}^3}\left(F_{\dot{x}^3 \dot{x}^1}\dot{x}^1 + F_{\dot{x}^3 \dot{x}^2}\dot{x}^2\right). \end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

Substituiert man diese Formeln in (2.3), so bekommt man in Hinsicht auf (2.4) nach entsprechenden Unformungen

$$\left\{\begin{aligned} (\dot{x}^1\xi^2 - \dot{x}^2\xi^1)\, F_{\dot{x}^1 \dot{x}^2} + (\dot{x}^1\xi^3 - \dot{x}^3\xi^1)\, F_{\dot{x}^1 \dot{x}^3} &= 0, \\ -(\dot{x}^1\xi^2 - \dot{x}^2\xi^1)\, F_{\dot{x}^1 \dot{x}^2} + (\dot{x}^2\xi^3 - \dot{x}^3\xi^2)\, F_{\dot{x}^2 \dot{x}^3} &= 0, \\ -(\dot{x}^1\xi^3 - \dot{x}^3\xi^1)\, F_{\dot{x}^1 \dot{x}^3} - (\dot{x}^2\xi^3 - \dot{x}^3\xi^2)\, F_{\dot{x}^2 \dot{x}^3} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

Die Matrix dieses Gleichungssystems ist die folgende:

$$M \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} F_{\dot{x}^1 \dot{x}^2} & F_{\dot{x}^1 \dot{x}^3} & 0 \\ -F_{\dot{x}^1 \dot{x}^2} & 0 & F_{\dot{x}^2 \dot{x}^3} \\ 0 & -F_{\dot{x}^1 \dot{x}^3} & -F_{\dot{x}^2 \dot{x}^3} \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Die Determinante von M ist gleich Zero, folglich gibt es eine nicht triviale Lösung.

Bestimmen wir erstens die triviale Lösung, d. h.:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}^1\xi^2 - \dot{x}^2\xi^1 &= 0, \\ \dot{x}^1\xi^3 - \dot{x}^2\xi^1 &= 0, \\ \dot{x}^2\xi^3 - \dot{x}^3\xi^2 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4.4}$$

Aus (4.4) folgt unmittelbar

$$\xi^i = \varrho(x, \dot{x})\dot{x}^i$$

und so bekommen wir wieder den schon im Korollar 1. und in den nachfolgenden Zeilen besprochenen Fall.

Betrachten wir jetzt den Fall, wo der Rang von $M = 0$ ist, d. h.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i\, \partial \dot{x}^k} = 0.$$

Mit diesem Fall beschäftigt sich [2].

Untersuchen wir jetzt den Fall, wenn der Rang von M gleich 1 ist.

Ohne der Beschränkung der Allgemeinheit, können wir annehmen, daß $F_{\dot{x}^1\dot{x}^2}\neq 0$; somit bekommt man nach der Annahme über den Rang von M, ferner nach der dritten Formel von (4.1), daß

$$F_{\dot{x}^3\dot{x}^k}=0. \tag{4.5}$$

Aus den Relationen (4.2) folgt somit:

$$\dot{x}^1\xi^2-\dot{x}^2\xi^1=0.$$

Daraus ergibt sich $\xi^\alpha=\varrho(x,\dot{x})\dot{x}^\alpha$. Die griechischen Indizes bedeuten jetzt, und im folgenden immer die Zahlen 1, 2. Auf Grund (2.4) erhält man somit:

$$\lambda^\alpha_j(x)\dot{x}^j=\varrho(x,\dot{x})\dot{x}^\alpha, \tag{4.6}$$

$$\lambda^3_j(x)\dot{x}^j=\lambda_j(x)\dot{x}^j, \tag{4.7}$$

wo $\lambda_j(x)$ eine nur von $\dot{x}^i$ abhängige Funktion ist.

Von (4.6) bekommt man, nach einer partiellen Ableitung nach $\dot{x}^i$:

$$\lambda^\alpha_i(x)=\frac{\partial\varrho}{\partial\dot{x}^i}\dot{x}^\alpha+\varrho\delta^\alpha_i. \tag{4.8}$$

Nach einer Überschiebung mit $\dot{x}^i$ ergibt sich aus (4.8) für $\alpha=1$

$$\lambda^1_i(x)\dot{x}^i=\frac{\partial\varrho}{\partial\dot{x}^i}\dot{x}^i\dot{x}^1+\varrho\dot{x}^1.$$

In Hinsicht auf (4.6) gilt für $\alpha=1$, daß

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\dot{x}^i}\dot{x}^i=0$$

bestehen muß, d. h. $\varrho(x,\dot{x})$ ist homogen von nullter Dimension in den $\dot{x}^i$. Wir bilden nun die partielle Ableitung nach $\dot{x}^3$ der Relation (4.8), somit wird:

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial\dot{x}^3\,\partial\dot{x}^i}\dot{x}^\alpha+\frac{\partial\varrho}{\partial\dot{x}^3}\delta^\alpha_i=0,\quad(\alpha=1,2). \tag{4.9}$$

Wählen wir in (4.9) $\alpha=1$ und $i=2$ bzw. $i=3$; nachher $\alpha=2$ und $i=1$; somit folgt, daß

$$\frac{\partial}{\partial\dot{x}^i}\frac{\partial\varrho}{\partial\dot{x}^3}=0,\quad(i=1,2,3), \tag{4.10}$$

woraus erhält man, daß entweder

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\dot{x}^3}=\sigma(x), \tag{4.11}$$

oder möglicherweise

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\dot{x}^3}=0 \tag{4.12}$$

sein muß. $\frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^3}$ ist aber wegen der Homogenität nullter Dimension von ϱ in den $\dot{x}^i$, homogen von (-1)-ter Dimension, und deshalb kann (4.11) nicht gelten; somit folgt von (4.12) für ϱ:

$$\varrho = \varrho(x^1, x^2, x^3, \dot{x}^1, \dot{x}^2). \tag{4.13}$$

In Hinsicht auf (4.13) bekommt man aus der Homogenität nullter Dimension in den $\dot{x}^\alpha$ von ϱ:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^1}\dot{x}^1 + \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^2}\dot{x}^2 = 0. \tag{4.14}$$

Wählen wir in (4.8) $\alpha=1$ und $i=1$, bzw. $\alpha=2$ und $i=2$, so wird:

$$\lambda_1^1(x) = \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^1}\dot{x}^1 + \varrho,$$

$$\lambda_2^2(x) = \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^2}\dot{x}^2 + \varrho.$$

Addieren wir diese Gleichungen, so wird im Hinblick auf (4.14)

$$\lambda_1^1(x) + \lambda_2^2(x) = 2\varrho. \tag{4.15}$$

Von (4.15) sieht man offensichtlich, daß ϱ nur von x^i abhängt, d. h. $\varrho = \varrho(x)$.

Wenn wir das in (4.6), (4.7) beachten, so erhalten wir nach einer Ableitung nach $\dot{x}^k$

$$\lambda_k^\alpha(x) = \varrho(x)\delta_k^\alpha, \quad \lambda_k^3(x) = \lambda_k(x). \tag{4.16}$$

Unser Grundproblem gibt jetzt nach (2.2) und (4.5)

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k} = \varrho(x)\delta_i^\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^k}, \tag{4.17}$$

was im Fall $i=\gamma$, $k=\beta$ sich auf die Form

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial \dot{x}^\gamma \partial \dot{x}^\beta} = \varrho(x)\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^\gamma \partial \dot{x}^\beta} \tag{4.18}$$

reduziert. Aus (4.5) kann man leicht sehen daß die Funktion F die folgende Form haben muß:

$$F = \tilde{F}(x, \dot{x}^\alpha) + \tilde{a}(x)\dot{x}^3. \tag{4.19}$$

Von (4.5) und von (4.17) folgt offensichtlich

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial \dot{x}^3 \partial \dot{x}^k} \equiv 0. \tag{4.20}$$

Die Formeln (4.18), (4.5) und (4.20) kann man zusammenfassend in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k} \equiv \varrho(x) \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k},$$

woraus folgt

$$F^* = \varrho(x) F(x, \dot{x}) + a_k(x) \dot{x}^k. \tag{4.21}$$

Bemerkung: Wegen der Homogenität erster Dimension kann F^* kein nur von x^i abhängiges Glied enthalten. —

Bestimmen wir jetzt die Form der Funktion F. Substituieren wir (4.21) in (1.2), so bekommt man auf Grund von (4.16)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varrho}{\partial x^i} F + \varrho \dfrac{\partial F}{\partial x^3} \delta_i^3 - \dfrac{d\varrho}{dt} \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} - \varrho \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^3} \delta_i^3 + \\ + \left(\dfrac{\partial a_k}{\partial x^i} - \dfrac{\partial a_i}{\partial x^k} \right) \dot{x}^k \equiv \left(\dfrac{\partial F}{\partial x^3} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^3} \right) \lambda_i(x). \end{cases} \tag{4.22}$$

In Hinsicht auf die Form von F, d. h. wegen (4.19) ferner unter Beachtung von

$$\frac{d\tilde{a}(x)}{dt} = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3} \dot{x}^3$$

geht (4.22) in

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varrho}{\partial x^i} (\tilde{F} + \tilde{a}\dot{x}^3) + \varrho \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x^3} \delta_i^3 + \varrho \dfrac{\partial \tilde{a}}{\partial x^3} \dot{x}^3 \delta_i^3 - \dfrac{d\varrho}{dt} \left(\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta_i^\alpha + \tilde{a} \delta_i^3 \right) - \\ - \varrho \dfrac{d\tilde{a}}{dt} \delta_i^3 + \left(\dfrac{\partial a_k}{\partial x^i} - \dfrac{\partial a_i}{\partial x^k} \right) \dot{x}^k \equiv \left(\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x^3} - \dfrac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha \right) \lambda_i(x) \end{cases} \tag{4.23}$$

über. Dividieren wir (4.23) in zwei Gleichungen, wo wir in die erste die $\dot{x}^3$ enthaltenden Glieder, und in die zweite die $\dot{x}^3$ nicht enthaltenden Glieder nehmen. Es wird im ersten Falle:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x^\alpha} \tilde{a} \delta_i^\alpha - \frac{\partial \varrho}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta_i^\alpha + \frac{\partial a_3}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^3} \equiv 0, \tag{4.24}$$

wo wir noch die Relation

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x^i} = \frac{\partial \varrho}{\partial x^\alpha} \delta_i^\alpha + \frac{\partial \varrho}{\partial x^3} \delta_i^3$$

benützt haben. (4.24) ist für $i=3$ identisch Null. Wenn $i=\beta$ gesetzt wird, so erhält man:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x^\beta} \tilde{a} - \frac{\partial \varrho}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}^\beta} + \frac{\partial a_3}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^3} \equiv 0, \tag{4.25}$$

woraus nach einer Kontraktion mit $\dot{x}^\beta$, ergibt sich im Falle $\frac{\partial \varrho}{\partial x^3} \neq 0$, wegen der Homogenität erster Dimension von $\tilde{F}$ in den $\dot{x}^\alpha$ für $\tilde{F}$:

$$\tilde{F} = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x^3}\right)^{-1} \left[\frac{\partial \varrho}{\partial x^\beta} \dot{x}^\beta \tilde{a} + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^3}\right) \dot{x}^\beta\right], \quad \frac{\partial \varrho}{\partial x^3} \neq 0. \tag{4.26}$$

Verweden wir jetzt die Bezeichnung:

$$b_\beta(x) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x^3}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x^\beta} \tilde{a} + \frac{\partial a_3}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^3}\right),$$

so bekommt man statt (4.26)

$$\tilde{F}(x, \dot{x}^\alpha) = b_\gamma(x) \dot{x}^\gamma, \tag{4.27}$$

Betrachten wir jetzt in (4.23) die $\dot{x}^3$ nicht enthaltenden Glieder:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varrho}{\partial x^i} \tilde{F} + \varrho \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^3} \delta_i^3 - \frac{\partial \varrho}{\partial x^\beta} \dot{x}^\beta \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta_i^\alpha + \tilde{a} \delta_i^3\right) - \varrho \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha \delta_i^3 + \\ &+ \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^\alpha}\right) \dot{x}^\alpha \equiv \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha\right) \lambda_i(x). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Auf Grund von (4.27) geht (4.28) wegen der Willkürlichkeit von $\dot{x}^1$, $\dot{x}^2$ in die Formeln

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varrho}{\partial x^i} b_\gamma(x) + \varrho \dfrac{\partial b_\gamma}{\partial x^3} \delta_i^3 - \dfrac{\partial \varrho}{\partial x^\gamma} (b_\alpha \delta_i^\alpha + \tilde{a} \delta_i^3) - \varrho \dfrac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\gamma} \delta_i^3 + \\ + \dfrac{\partial a_\gamma}{\partial x^i} - \dfrac{\partial a_i}{\partial x^\gamma} \equiv \left(\dfrac{\partial b_\gamma}{\partial x^3} - \dfrac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\gamma}\right) \lambda_i(x) \end{cases} \tag{4.29}$$

über. Unsere bisherige Resultate kann man im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 3. *Wenn im dreidimensionalen Raum der Rang von M in (4.3) gleich* 1 *ist, ferner $\frac{\partial \varrho}{\partial x^3} \neq 0$, so kann die Relation (1.2) dann und nur dann bestehen, wenn die Funktionen $F(x, \dot{x})$ und $F^*(x, \dot{x})$ die Formen (4.19) und (4.21) haben, wo $\tilde{F}(x, \dot{x}^\alpha)$ durch (4.26) bestimmt ist; die Funktionen $\tilde{\alpha}(x)$, $\lambda_i(x)$, $\varrho(x)$ und $a_i(x)$ müssen dem Differentialgleichungssystem (4.29) genügen.*

Wegen der Kompliziertheit des Differentialgleichungssystems (4.29), werden wir im folgenden einige notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen ableiten, welche leichter übersichtbar sind.

Wählen wir in (4.28) erstens $i = \gamma$, nachher $i = 3$. So wird:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x^\gamma} \tilde{F} - \frac{\partial \varrho}{\partial x^\beta} \dot{x}^\beta \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}^\gamma} + \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}\right) \dot{x}^\beta \equiv \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\beta} \dot{x}^\beta\right) \lambda_\gamma, \tag{4.30}$$

bzw. im Falle $i = 3$:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x^3} \tilde{F} + \varrho \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varrho}{\partial x^\beta} \dot{x}^\beta \tilde{a} - \varrho \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha + \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^\alpha}\right) \dot{x}^\alpha \equiv \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha\right) \lambda_3. \tag{4.31}$$

Von (4.30) wird nach einer Kontraktion mit $\dot{x}^\gamma$, in Hinsicht auf die Homogenität erster Ordnung von $\tilde{F}$ in $\dot{x}^\alpha$:

$$\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta\right)\lambda_\gamma(x)\dot{x}^\gamma \equiv 0. \tag{4.32}$$

Diese Relation kann dann und nur dann gelten, wenn entweder

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta, \tag{4.33}$$

oder

$$\lambda_\gamma(x)\dot{x}^\gamma = 0. \tag{4.34}$$

Statt (4.33) bekommt man nach einer partiellen Ableitung nach $\dot{x}^\alpha$, in Hinsicht auf die Form von F, d. h. wegen (4.26):

$$\frac{\partial}{\partial x^3}\left[\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x^3}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x^\alpha}\tilde{a}(x) + \frac{\partial a_3}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^3}\right)\right] - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\alpha} \equiv 0. \tag{4.35}$$

Aus (4.34) folgt offensichlich, daß $\lambda_\gamma(x)=0$.

Substituieren wir jetzt in (4.31) in dem ersten Glied statt $\tilde{F}(x, \dot{x}^\alpha)$ die in (4.26) gegebene Form. Nach den möglichen Umformungen ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha\right)\left(\varrho(x) - \lambda_3(x)\right) \equiv 0. \tag{4.36}$$

So kann man leicht sehen, daß entweder gilt (4.35), oder $\varrho(x)=\lambda_3(x)$.

Auf Grund unseren Untersuchungen kann man den folgenden Satz behaupten:

Satz 4. *Wenn im dreidimensionalen Raum die Relation (1.2) gelten, und der Rang von M in (4.3) gleich* 1 *ist, so besteht entweder (4.35), oder es ist* $\lambda_\gamma(x)=0$. *Wenn aber in (4.32)*

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta \neq 0$$

so gelten wegen (4.32) und (4.36) $\lambda_\gamma(x)=0$ und $\varrho(x)=\lambda_3(x)$.

Wenn der Rang von M gleich 2 ist, so bekommen wir denselben Fall, wie in § 2. Deshalb gilt hier das Korollar 1. und somit auch (2.12) und (2.13); die Indizes bedeuten aber jetzt 1, 2, 3.

Literatur

[1] L. Berwald, On Finsler and Cartan Geometries III. *Annals of Math.* **42** (1941), 84—112.

[2] A. Moór, Über äquivalente Variationsprobleme erster und zweiter Ordnung. *J. Reine Angew. Math.* **223** (1966), 131—137.

[3] A. Moór, Über gewisse Type äquivalenter Variationsprobleme von einem Parameter. *Ann. Pol. Math.* **19** (1967), 107—113.

(Eingegangen am 2. März 1975.)