Об одном варианте метода усреднения для нелинейных систем интегро дифференциальных уравнений стандартного вида

Г. Хр. Сарафова—Д. Д. Байнов (София)

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \varepsilon X\Big(t, x, \int_0^t \varphi\big(t, s, x(s)\big)\, ds\Big) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

Пусть существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X\Big(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x)\, ds\Big)\, dt = X_0(x). \tag{3}$$

Усредненной системой для системы (1), (2) назовем систему

$$\dot{\xi} = \varepsilon X_0(\xi) \tag{4}$$

с начальным условием

$$\xi(0) = x_0. \tag{5}$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть функции $X(t, x, y)$ и $\varphi(t, s, x)$ определены и непрерывны соответственно в областях $Q_1 = \Delta_1 \times \Omega(x) \times \Omega(y)$ и $Q_2 = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Omega(x)$ где $\Delta_1 = \Delta_2 = [0, \infty]$, а $\Omega(x) \subset R^n$, $\Omega(y) \subset R^q$-открытые ограниченные области. В соответствующих проекциях области $\Omega(t, s, x, y) = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Omega(x) \times \Omega(y)$ выполнены неравенства*

1. $\|X(t, x, y)\| \leqq M, \quad M = \text{const}.$
2. $\|X(t, x', y') - X(t, x'', y'')\| \leqq \lambda\{\|x' - x''\| + \|y' - y''\|\}, \quad \lambda = \text{const} > 0.$
3. $\|\varphi(t, s, x') - \varphi(t, s, x'')\| \leqq \mu(t, s)\|x' - x''\|$
4. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds = 0.$
5. *В каждой точке $x \in \Omega(x)$ существует предел* (3).

6. $\left\| \int_0^t \overline{X}(\tau, x)\, d\tau \right\| \leqq P, \quad P = \text{const}.$

7. *Функция* $\psi(t, x) = \int_0^t \overline{X}(\tau, x)\, d\tau$ *непрерывна.*

8. $\left\| \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \overline{X}(\tau, x)\, d\tau \right\| \leqq Q, \quad Q = \text{const}.$

Здесь $\overline{X}(\tau, x(\tau)) = X\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(\tau))\, ds\right) - X_0(x(\tau))$

9. *Решение* $\xi = \xi(t)$, $\xi(0) = x_0 \in \Omega(x)$ *определено для всех* $t \geqq 0$ *и лежит* $\boldsymbol{в}$ $\Omega(x)$ *с некоторой* ϱ*-окрестностью.*

Тогда для любого $L > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при* $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$ ***на отрезке*** $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqq [\lambda ML\delta(\varepsilon) + \varepsilon(P + MQL)]\, e^{\lambda[L + \delta(\varepsilon)]} \tag{6}$$

где

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{0 \leqq \tau \leqq L} \tau \bar{\mu}_0\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad \bar{\mu}_0(t) = \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds.$$

Доказательство: Оценим разность $x(t) - \xi(t)$. Имеем

$$x(t) - \xi(t) = \varepsilon \int_0^t X\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s))\, ds\right) d\tau - \varepsilon \int_0^t X_0(\xi(\tau))\, d\tau = \tag{7}$$

$$= \varepsilon \int_0^t \left[X\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s))\, ds\right) - X\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(s))\, ds\right)\right] d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \left[X\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(s))\, ds\right) - X\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds\right)\right] d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \left[X\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds\right) - X_0(\xi(\tau))\right] d\tau.$$

Из (7) следует

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqq \varepsilon\lambda \int_0^t \left[\|x(\tau) - \xi(\tau)\| + \int_0^\tau \mu(\tau, s) \|x(s) - \xi(s)\|\, ds\right] d\tau +$$

$$+ \varepsilon\lambda \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s) \|\xi(s) - \xi(\tau)\|\, ds + \varepsilon \left\| \int_0^t \overline{X}(\tau, \xi(\tau))\, d\tau \right\| \leqq$$

$$\leqq \varepsilon\lambda \int_0^t \left[\|x(\tau) - \xi(\tau)\| + \int_0^\tau \mu(\tau, s) \|x(s) - \xi(s)\|\, ds\right] d\tau +$$

$$+ \lambda ML\delta(\varepsilon) + \left\| \varepsilon \int_0^t \overline{X}(\tau, \xi(\tau))\, d\tau \right\|.$$

Имея ввиду, что

$$\int_0^t \overline{X}(\tau, \xi(\tau))\, d\tau = \int_0^t \overline{X}(\tau, \xi(t))\, d\tau - \int_0^t \left[\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} \int_0^\tau \frac{\partial \overline{X}(\theta, \xi(\tau))}{\partial \xi(\tau)}\, d\theta\right] d\tau$$

получаем

$$\|x(t)-\xi(t)\| \leqq \varepsilon\lambda \int_0^t \left[\|x(\tau)-\xi(\tau)\| + \int_0^\tau \mu(\tau, s)\|x(s)-\xi(s)\|\, ds\right] d\tau + \lambda ML\delta(\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon \left\|\int_0^t \overline{X}(\tau, \xi(t))\, d\tau\right\| + \varepsilon \int_0^t \left[\left|\left|\varepsilon X_0(\xi(\tau))\right|\right| \int_0^\tau \left\|\frac{\partial \overline{X}(\theta, \xi(\tau))}{\partial \xi(\tau)}\right\| d\theta\right] d\tau \leqq$$

$$\leqq \varepsilon\lambda \int_0^t \left[\|x(\tau)-\xi(\tau)\| + \int_0^\tau \mu(\tau, s)\|x(s)-\xi(s)\|\, ds\right] d\tau +$$

$$+\lambda ML\delta(\varepsilon) + \varepsilon(P+\varepsilon MQt)$$

или

$$\|x(t)-\xi(t)\| \leqq [\lambda ML\delta(\varepsilon) + \varepsilon(P+MQL)]\, e^{\lambda[L+\delta(\varepsilon)]}.$$

Так как функция $\xi(t)$ принадлежит области $\Omega(x)$ при $0 \leqq t < \infty$ со своей ϱ-окрестностю, то можно указать такое ε_0, чтобы при $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$ выполнялось неравенство

$$[\lambda ML\delta(\varepsilon) + \varepsilon(P+MQL)]\, e^{\lambda[L+\delta(\varepsilon)]} < \varrho.$$

Тогда решение $x(t)$ не выдет из области $\Omega(x)$ при $0 \leqq t \leqq \dfrac{L}{\varepsilon}$ и выражение (6) справедливо на отрезке $0 \leqq t \leqq \dfrac{L}{\varepsilon}$.

Замечание. Метод усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений был впервые обосновах А. Н. Филатовым. Обширная библиография по этой тематике имеется в [1].

Литература

1. А. Н. Филатов, Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Изд-во "ФАН", *Ташкент,* 1971.

ПЛОВДИВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. П. ГИЛЕНДАРСЛОГО

(*Поступила*: 13. X. 1974)