Über das Ähnlichkeitsprinzip für hyperpseudoholomorphe Funktionen

Von C. WITHALM (Graz)

In der Theorie der pseudoholomorphen Funktionen spielt das Ähnlichkeitsprinzip eine ganz wesentliche Rolle. Nach einer kurzen Definition der hyperpseudoholomorphen Funktionen soll für diese ein Ähnlichkeitsprinzip formuliert und deren Hauptzweig eingeführt werden.

1. *Einführung:* Es sei D_0 ein Gebiet der komplexen Ebene; $E:=(FG)$ heißt ein Element des Erzeugendenraumes E_{D_0} oder ein Erzeugendenvektor, wenn gilt

$$\text{(E1)} \qquad \bigwedge_{z\in D_0} \operatorname{Im}(\bar{F}\cdot G)>0, \qquad\qquad \text{(E2)} \qquad \bigwedge_{z\in D_0} E\in H^1\times H^1.$$

Ist $D\subset\subset D_0$, so wollen wir mit Ω_D den Vektorraum über $\mathbf{R}$ der in D reellen Vektorfunktionen $\omega=\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$ bezeichnen. $w=E\omega$ heißt in D reguläre pseudoholomorphe Funktion, wenn für $x+iy=z$, $x_0+iy_0=z_0$ gilt

$$(\triangle) \qquad \bigwedge_{z_0\in D\subset\subset D_0} \frac{d_{(E)}w}{dz}(z_0):=\dot{w}(z_0):=\lim_{z\to z_0} E(z)\,\frac{\omega(x,y)-\omega(x_0,y_0)}{z-z_0}.$$

Wir definieren $\left(E\cdot\Omega_D,\dfrac{d_{(E)}}{dz}\right)=:P_D(E)$. Für $w=E\omega\in P_D(E)$ gilt $\omega\in C^1\times C^1$, $\dot{w}=E\omega_z$, $0=E\omega_{\bar{z}}$. Ist $E=(1i)=:A$, so ist $A\omega$ holomorph in D, $P_D(A)$ bezeichnet also die Menge der in D holomorphen Funktionen.

Es sei $E=(FG)\in E_{D_0}$ und $E^1=(F_1G_1)\in E_{D_0}$ und es existiere in D_0 ein holomorphes Funktionenpaar $(\sigma,\tau)\in H^1\times H^1$ mit positiven Imaginärteilen, so daß $F_1=F\sigma$ und $G_1=G\tau$ ist. Ist dann $D\subset\subset D_0$ und $w=E\omega=F\varphi+G\psi\in P_D(E)$, $w_1=E^1\omega^1=F_1\varphi_1+G_1\psi_1\in P_D(E^1)$, $F^\sigma=(F\,\sigma F)$, $G^\tau=(G\,\tau G)$ und $w_F=F(\varphi+\sigma\varphi_1)=:$ $=:F^\sigma\omega^\sigma$, $w_G=G(\psi+\tau\psi_1)=:G^\tau\omega^\tau$, und sind $P_D^0(E)\subset P_D(E)$ und $P_D^0(E^1)\subset P_D(E^1)$ so erklärt, daß entweder $\varphi+\sigma\varphi_1$ oder $\psi+\tau\psi_1$ holomorph in D ist, so gilt

Satz 1. *Die Abbildung* $\theta: P_D^0(E)\times P_D^0(E^1)\in(w,w_1)\to(w_F,w_G)\in P_D^0(F^\sigma)\times P_D^0(G^\tau)$ *existiert und ist ein Isomorphismus, wobei* w_F *bzw.* w_G *in der Form* $F\Phi$ *bzw.* $G\Psi$ *mit in* D *holomorphen Funktionen* Φ *bzw.* Ψ *dargestellt werden kann.*

BEWEIS. Für die Existenz von Θ zeigen wir, daß F^σ ein Element von E_{D_0} ist; dazu überlegen wir, daß (E1) $\mathrm{Im}\,(\bar{F}\sigma F) = \mathrm{Im}\,(\sigma|F|^2) > 0$ und (E2) $F^\sigma \in H^1 \times H^1$ erfüllt ist. Da für $\varphi + \sigma\varphi_1 \in P_D(A)$,

$$\bigwedge_{z_0 \in D \subset\subset D_0} \frac{d_{(F^\sigma)} w_F}{dz}(z_0) = \dot{w}(z_0) = \lim_{z \to z_0} F^\sigma(z) \frac{\omega^\sigma(x, y) - \omega^\sigma(x_0, y_0)}{z - z_0}$$

nach Voraussetzung eigentlich existiert, ist $w_F \in P_D(F^\sigma)$. Für $\psi + \tau\psi_1 \in P_D(A)$ erkennt man, daß $G^\tau \in E_{D_0}$ und $w_G \in P_D(G^\tau)$ ist. Die Voraussetzungen zusammen mit der Konstruktion von Θ implizieren fast unmittelbar, daß diese Abbildung injektiv, surjektiv und homomorph ist, falls $\varphi + \sigma\varphi_1$ und $\psi + \tau\psi_1$ simultan holomorph sind.

Es sei $\psi + \tau\psi_1 \in P_D(A)$, dann ist $0 = F^\sigma \omega^\sigma_{\bar z} + G^\tau \omega^\tau_{\bar z}$.[1] Für $w_F = F^\sigma \omega^\sigma$ folgt $0 = F^\sigma \omega^\sigma_{\bar z} = F\varphi_{\bar z} + (F\sigma)\varphi_{1\bar z}$; da $\sigma \in P_D(A)$ ist, ist $\sigma_{\bar z} = 0$, also gilt $0 = F\varphi_{\bar z} + (F\sigma)\varphi_{1\bar z} + F\sigma_{\bar z}\varphi_1 = F(\varphi + \sigma\varphi_1)_{\bar z}$ und da F in D_0 nirgends verschwindet, ist $(\varphi + \sigma\varphi_1)_{\bar z} =: \Phi_{\bar z} = 0$, woraus wegen $\Phi \in C^1$ die Behauptung $\Phi \in P_D(A)$ folgt. Entsprechend erkennt man die Richtigkeit der Aussage $\psi + \tau\psi_1 =: \Psi \in P_D(A)$, falls $\varphi + \sigma\varphi_1 \in P_D(A)$ ist.

2. $HP_D(E)$. Wählen wir speziell $(\sigma, \tau) = (i, i)$, so gelangen wir bei geeigneter Definition eines Differentialoperators zu den hyperpseudoholomorphen Funktionen.[2] Unter $H\Omega_D$ wollen wir die Menge der in $D \subset\subset D_0$ erklärten Vektorfunktionen $\chi := \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Phi \\ \psi\end{pmatrix}$ mit holomorphen Komponenten verstehen. Auf $E \cdot H\Omega_D$ erklären wir dann in folgender Weise einen Differentialoperator. Ist $w = E_\chi \in E \cdot H\Omega_D$, so sei $\frac{d_{(HE)}}{dz} w = E\chi'$. Das Tupel $\left(E \cdot H\Omega_D, \frac{d_{(HE)}}{dz}\right)$ wollen wir als den Raum $HP_D(E)$ der hyperpseudoholomorphen Funktionen bezeichnen.

Korollar 1. *$HP_D(E)$ ist ein additiver Vektorraum über* $\mathbf{C}$.

BEWEIS. Es sei $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, und $(w_\lambda = E\chi_\lambda, w_\mu = E\chi_\mu) \in HP_D(E) \times HP_D(E)$, dann ist $\lambda w_\lambda + \mu w_\mu = E(\lambda\chi_\lambda + \mu\chi_\mu) \in HP_D(E)$.

Korollar 2. *$\frac{d_{(HE)}}{dz}$ ist ein linearer Endomorphismus in $HP_D(E)$.*

BEWEIS. Sind (λ, μ) und (w_λ, w_μ) wie im Beweis zum vorigen Korollar erklärt, so gilt $\frac{d_{(HE)}}{dz}(\lambda w_\lambda + \mu w_\mu) = \lambda \cdot E\chi'_\lambda + \mu \cdot E\chi'_\mu = \lambda \frac{d_{(HE)}}{dz} w_\lambda + \mu \frac{d_{(HE)}}{dz} w_\mu$.

Aus der Theorie der pseudoholomorphen Funktionen wissen wir, daß die Ableitung $\dot{w}$ von $w \in P_D(E)$ wieder eine pseudoholomorphe Funktion modulo eines Erzeugendenvektors E^1 ist, während w selbst als Ableitung einer pseudoholomorphen Funktion modulo E^{-1} gedeutet werden kann. Setzt man $E := E^0$, so sagt man, E sei in die Erzeugendenfolge $(E^\nu)_{\nu \in Z}$ eingebettet. Existiert ein $\mu > 1$, sodaß für alle $\nu \in Z$
$E^{\nu+\mu} = E^\nu$ ist, so heißt μ eine Periode der Erzeugendenfolge.[3]

---

[1] $0 = E\omega_{\bar z} + E^1\omega^1_{\bar z}$.

[2] Siehe [11].

[3] Siehe [6].

Korollar 3. *Die Periode der Erzeugendenfolge hyperpseudoholomorpher Funktionen ist unabhängig von E immer $\mu=1$.*

Das heißt, wir erhalten die Rekursionsformel

$$\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \frac{d^{n+1}_{(HE)}}{dz^{n+1}} w = E\frac{d}{dz}\left(\frac{d^n}{dz^n}\chi\right).$$

Satz 2.

(i) $P^0_D(E)\oplus P^0_D(iE)$ *bzw.* $P^0_D(F^i)\oplus P^0_D(G^i)$ *und* $HP_D(E)$ *sind isomorph zu einem Teilraum* $HP^0_D(E)$ *von* $HP_D(E)$;

(ii) $P_D(F^i)$ *und* $P_D(G^i)$ *sind Teilräume von* $HP_D(E)$.

Beweis. Der Beweis zu (i) folgt aus Satz 1 zusammen mit der Definition von $HP_D(E)$. Für (ii) brauchen wir nur einmal $\Psi=0$ und einmal $\Phi=0$ zu setzen.

3. *Ähnlichkeitsprinzip.* Ist $w\in P_D(E)$, $E=(FG)\in E_{D_0}$, $D\subset\subset D_0$, so gibt es eine in D beschränkte Funktion s aus H^1, sodaß $w=e^s f$, worin $f\in P_D(A)$.

Diese Funktion bestimmt sich zu

$$s(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{D\ni\zeta=\xi+i\eta} \frac{a(\zeta)+b(\zeta)\big(\overline{w}(\zeta)/w(\zeta)\big)}{\zeta-z}\,d\xi\wedge d\eta$$

wenn a und b die charakteristischen Koeffizienten

$$a=-\frac{\overline{F}G_{\bar z}-F_{\bar z}\overline{G}}{F\overline{G}-\overline{F}G},\quad b=\frac{FG_{\bar z}-F_{\bar z}G}{F\overline{G}-\overline{F}G}$$

bedeuten. Für $w_{\bar z}$ erhalten wir dann die Darstellung $aw+b\overline{w}$.

Wir formulieren ein entsprechendes Ähnlichkeitsprinzip für hyperpseudoholomorphe Funktionen von $HP^0_D(E)$.

Es sei also $HP^0_D(E)\ni 2w=w_R+w_I\in P^0_D(E)\oplus P^0_D(iE)$; wir können leicht nachrechnen, daß für die korrespondierenden Koeffizienten a_R, b_R bzw. a_I, b_I die Beziehungen $a_R=a_I$ und $b_R=-b_I$ gelten.

Satz 3. *Es sei* $HP^0_D(E)\ni 2w=w_R+w_I\in P^0_D(E)\oplus P^0_D(iE)$; *setzen wir*

$$s(z):=-\frac{1}{\pi}\int_{D\ni\zeta=\xi+i\eta}\frac{a_R(\zeta)+b_R(\zeta)\big(\overline{w}_R(\zeta)-\overline{w}_I(\zeta)\big)/2w(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\wedge d\eta$$

so ist s *gleichmäßig stetig in* D, $|s|\leqq M=M(D,E)$, $f=e^{-s}w$ *ist holomorph in* D.

Beweis. Es sei $q(z):=\int_{D\ni\zeta=\xi+i\eta}\frac{\varrho(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\wedge d\eta$; ist $\bigwedge_{z\in D}|\varrho|\leqq K$, so gibt es eine nur von D abhängige Konstante K_D, sodaß $\bigwedge_{z\in D}|q|\leqq KK_D$ ist; ist $\varrho\in H$ an $z_0\in D$, dann existieren $q_z(z_0)$ und $q_{\bar z}(z_0)$ und es gilt $q_{\bar z}(z_0)=-\pi\varrho(z_0)$. [4)]

[4)] Siehe etwa [1], speziell Lemma 2.1.

Setzen wir $\varrho:=a_R+b_R(\overline{w}_R-\overline{w}_I)/2w$, so ist $|\varrho|\leqq\sup\limits_{z\in D}(|a_R|+|b_R|)=K_1$. In $D^*=$ $=D\setminus N_w$ ist w aus H, wenn N_w die isolierten Nullstellen von w in D sind; [5] es ist dort also $s_{\bar z}=a_R+b_R(\overline{w}_R-\overline{w}_I)/2w$, also gilt under Berücksichtigung von $2w_{\bar z}=$ $=a_R w_R+b_R\overline{w}_R+a_I w_I+b_I\overline{w}_I$

$$2f_{\bar z}=e^{-s}(-s_{\bar z}\cdot 2w+2w_{\bar z})=e^{-s}[(-a_R-b_R(\overline{w}_R-\overline{w}_I)/2w)\,2w+$$
$$+a_R\cdot 2w+b_R(\overline{w}_R-\overline{w}_I)]=0,$$

und da $f\in C^1$ ist, folgt, daß f holomorph in D^* und beschränkt an den Nullstellen von w ist; f ist also holomorph in D.

4. *Hauptzweig.* $w\in P_D(E)$ habe nach dem Ähnlichkeitsprinzip für pseudoholomorphe Funktionen die Darstellung $e^s f$. Ist $e^s\in H^1$, so ist w pseudoholomorph [6] modulo $S:=(e^s ie^s)$; wir sagen dann, w nehme seinen Hauptzweig in $P_D(S)$ an. Entsprechend wollen wir sagen, $w\in HP_D(E)$ nehme seinen Hauptzweig in $HP_D(S)$ an, wenn in $2w=w_R+w_I\in P_D^0(E)\oplus P_D^0(iE)$ sowohl $w_R=e^{s_R}f_R$ seinen Hauptzweig in $P_D(S_R)$ mit $S_R:=(e^{s_R}ie^{s_R})$ als auch $w_I=e^{s_I}f_I$ seinen Hauptzweig in $P_D(S_I)$ mit $S_I=(e^{s_I}ie^{s_I})$ annimmt, und S durch $(e^{s_R}e^{s_I})$ erklärt ist. Setzen wir $\lambda:=$ $:=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}f_R\\ f_I\end{pmatrix}\in H\Omega_D$, so gilt

Korollar 4. *Nimmt $w\in HP_D(E)$ seinen Hauptzweig in $HP_D(S)$ an, so gilt*

$$\frac{d_{(HS)}}{dz}w=S\lambda'.$$

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition der hyperpseudoholomorphen Funktionen zusammen mit der Erklärung ihres Hauptzweiges.

Es sei $E=(FG)\in E_{D_0}$ und Γ ein rektifizierbares Kurvenstück in $D\subset\subset D_0$ mit dem Anfangspunkt z_0 und dem Endpunkt z und es sei $W\in C(\Gamma)$. Unter dem E-$*$-Integral über W längs Γ versteht man den Ausdurck

$${}_*\!\int_{z_0\,\Gamma}^{z} W d_{(E)}\zeta:=\operatorname{Re}\int_{z_0\,\Gamma}^{z} G^*W d\zeta+i\operatorname{Re}\int_{z_0\,\Gamma}^{z} F^*W d\zeta,$$

wobei

$$F^*:=\frac{-2\overline{F}}{F\overline{G}-\overline{F}G},\quad G^*:=\frac{2\overline{G}}{F\overline{G}-\overline{F}G}$$

und $E^*:=(F^*G^*)\in E_{D_0}$ der zu E adjungierte Erzeugendenvektor heißt.

Das E-Integral über W längs Γ ist dann durch

$$\int_{z_0\,\Gamma}^{z} W d_{(E)}\zeta:=F(z)\operatorname{Re}{}_*\!\int_{z_0\,\Gamma}^{z} W d_{(E)}\zeta+G(z)\operatorname{Im}{}_*\!\int_{z_0\,\Gamma}^{z} W d_{(E)}\zeta$$

erklärt.

---

[5]) Die Nullstellen pseudoholomorpher Funktionen sind isoliert. Vergleiche [1], [2], [8].

[6]) Siehe [9].

Ist $w = E\omega \in P_D(E)$, so gelten die Beziehungen [7])

$$_*\int_{z_0}^{z} \dot{w} d_{(E)}\zeta = A\big(\omega(x, y) - \omega(x_0, y_0)\big),$$

mit $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, und [8])

$$\int_{z_0}^{z} \dot{w} d_{(E)}\zeta = w(z) - E(z)\,\omega(x_0, y_0).$$

Satz 1 zusammen mit der Definition der hyperpseudoholomorphen Funktionen legen dann die folgende Definition eines Integraloperators auf $HP_D(E)$ fest.

Es seien E und Γ wie oben erklärt und es sei wieder $F^i = (F\, iF)$, $G^i = (G\, iG)$ und für W sei in einer Umgebung von Γ die Darstellung $2W = W_F + W_G$ mit $W_F = F\Phi$, $W_G = G\Psi$ und $(\Phi, \Psi) \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$ erlaubt. Dann wollen wir unter dem HE-$*$-Integral über $2W$ längs Γ die Beziehung

$$2\, {}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma W d_{(HE)}\zeta := {}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma W_F d_{(F^i)}\zeta + {}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma W_G d_{(G^i)}\zeta$$

und unter dem HE-Integral über $2W$ längs Γ die Bezeihung

$$2 \int_{z_0}^{z}{}_\Gamma W d_{(HE)}\zeta := \int_{z_0}^{z}{}_\Gamma W_F d_{(F^i)}\zeta + \int_{z_0}^{z}{}_\Gamma W_G d_{(G^i)}\zeta$$

verstehen.

Satz 4. *Ist* $w = E\chi \in HP_D(E)$ [9]), *so gilt*

$$2\, {}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma w d_{(HE)}\zeta = \int_{z_0}^{z}{}_\Gamma (\Phi + \Psi) d\zeta,$$

$$\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma w d_{(HE)}\zeta = E(z) \int_{z_0}^{z}{}_\Gamma \chi d\zeta.$$

Der Beweis findet sich in [11].

Korollar 5. *Nimmt* $w \in HP_D(E)$ *seinen Hauptzweig in* $HP_D(S)$ *an, so gilt unter den Vereinbarungen am Anfang dieser Nummer*

$$2\, {}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma w d_{(HS)}\zeta = \int_{z_0}^{z}{}_\Gamma (f_R + f_I) d\zeta, \quad \int_{z_0}^{z}{}_\Gamma w d_{(HS)}\zeta = S(z) \int_{z_0}^{z}{}_\Gamma \lambda d\zeta.$$

---

[7]) $w = E\omega$ heißt auch pseudoholomorphe Funktion erster Art und $_*w = A\omega$ die korrespondierende pseudoholomorphe Funktion zweiter Art.

[8]) Siehe etwa [1], [2].

[9]) $X = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\varphi \\ \psi\end{pmatrix} \in H\Omega_D$.

5. *Zusammenhang.* Wir wollen noch einige einfache Aussagen über den Zusammenhang von $P_D(E), P_D(iE)$ und $HP_D(E)$ beweisen. Jedem $w_I=(iE)\omega^I\in\in P_D(iE)$ entspricht umkehrbar eindeutig ein $w_{R(I)}=E\omega^I\in P_D(E)$; ist Γ ein rektifizierbares Kurvenstück in $D\subset\subset D_0$ mit dem Anfangspunkt z_0 und dem Endpunkt z, so gilt

Satz 5. *Es gelten die Beziehungen*

$$\text{(i)}\quad {}_*w_I = {}_*w_{R(I)}\,^{10)}, \qquad (ii)\quad \frac{d_{(iE)}}{dz}w_I = i\frac{d_{(E)}}{dz}w_{R(I)},$$

$$\text{(iii)}\quad {}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_I d_{(iE)}\zeta = {}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_{R(I)} d_{(E)}\zeta,$$

$$\text{(iv)}\quad \int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_I d_{(iE)}\zeta = i\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_{R(I)} d_{(E)}\zeta.$$

(v) *Nimmt* $w_{R(I)}\in P_D(E)$ *seinen Hauptzweig in* $P_D(S)$ *an, so nimmt* $w_I\in P_D(iE)$ *seinen Hauptzweig in* $P_D(iS)$ *und* $2w:=w_{R(I)}+w_I$ *seinen Hauptzweig in* $HP_D(S)$ *an.*

BEWEIS. (i) ${}_*w_I=A\omega^I={}_*w_{R(I)}$.

$$\text{(ii)}\quad \frac{d_{(iE)}}{dz}w_I = (iE)\,\omega_z^I = i\cdot E\omega_z^I = i\cdot\frac{d_{(E)}}{dz}w_{R(I)}.$$

$$\text{(iii)}\quad {}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_I d_{(iE)}\zeta = \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma (iG)^* w_I d\zeta + i\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma (iF)^* w_I d\zeta =$$

$$= \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma G^*(-iw_I)\,d\zeta + i\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma F^*(-iw_I)\,d\zeta =$$

$$= \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma G^* w_{R(I)} d\zeta + i\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma F^* w_{R(I)} d\zeta =$$

$$= {}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_{R(I)} d_{(E)}\zeta.$$

$$\text{(iv)}\quad \int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_I d_{(iE)}\zeta = iF(z)\operatorname{Re}{}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_I d_{(iE)}\zeta + iG(z)\operatorname{Im}{}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_I d_{(E)}\zeta =$$

$$= i\left[F(z)\operatorname{Re}{}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_{R(I)} d_{(E)}\zeta + G(z)\operatorname{Im}{}_*\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_{R(I)} d_{(E)}\zeta\right] =$$

$$= i\int_{z_0}^{z}{}_\Gamma\, w_{R(I)} d_{(E)}\zeta.$$

---

[10]) Vergleiche Fußnote [7]).

(v) Gilt nach dem Ähnlichkeitsprinzip für pseudoholomorphe Funktionen $w_{R(I)} = e^s f$, so ist $w_I = (ie^s)f$, also $w_{R(I)} \in P_D(S)$ impliziert $w_I \in P_D(iS)$. Für das Ähnlichkeitsprinzip von $2w := w_{R(I)} + w_I \in HP_D(E)$ gilt

$$s_w(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{D \ni \zeta = \xi + i\eta} \frac{a_{R(I)}(\zeta) + b_{R(I)}(\zeta)\big(\overline{w}_{R(I)}(\zeta) - \overline{w}_I(\zeta)\big)/2w(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi \wedge d\eta =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{D \ni \zeta = \xi + i\eta} \frac{a_{R(I)}(\zeta) + b_{R(I)}(\zeta)\, \overline{w}_{R(I)}(\zeta)(1+i)/\big(w_{R(I)}(\zeta)(1+i)\big)}{\zeta - z}\, d\xi \wedge d\eta =$$

$$= s_{w_{R(I)}}(z) = s;$$

ist also $w_{R(I)} \in P_D(S)$, so folgt die letzte Behauptung.

Literatur

[1] L. Bers, Theory of pseudo-analytic functions, *New York University*, 1953.

[2] L. Bers, Local theory of pseudo-analytic functions, Lectures on Functions of a Complex Variable, *University of Michigan Press*, 1955, 213—244.

[3] K. Habetha, Über die Wertverteilung pseudoanalytischer Funktionen, *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. AI* **406** (1967), 20 S.

[4] K. Habetha, Zum Phragmén-Lindelöf'schen Prinzip bei quasiholomorphen und pseudoanalytischen Funktionen, *Appl. Analysis* **2** (1972), 169—185.

[5] G. D. Methiev, Abschätzugen in Klassen schlichter pseudoanalytischer Funktionen, *Akad. Nauk Azerbaidz. SSR, Doklady* **24** (1968), 3—5 Russisch.

[6] N. H. Protter, The periodicity problem for pseudoanalytic functions, *Ann. of Math.* **64** (1956), 154—174.

[7] W. Tutschke, Pseudoholomorphe Exponentialfunktionen, *Wiss. Beitr. Martin Luther Universität, Halle-Wittenberg, R. M.* (1970), No. 1 (M2), (1971), 115—121 *und Beitr. Analysis* **1** (1971), 115—121.

[8] J. N. Vekua, Verallgemeinerte analytische Funktionen, *Berlin*, 1963.

[9] C. Withalm, Der Hauptzweig pseudoanalytischer Funktionen, *Mathematica Balkanica* **3**. 77, (1973), 605—609.

[10] C. Withalm, Über algebraische Strukturen pseudoanalytischer Funktionen, *Glasnik Matematicki*, Ser. III. **9** (29) 1974, 233—240.

[11] C. Withalm, Über die Begründung der Theorie der hyperpseudoholomorphen Funktionen, *Mathematica Balkanica*, 1974, erscheint demnächst.

II. MATHEMATISCHES INSITUT, LEHRKANZEL FÜR ANGEWANDTE
MATHEMATIK, UNIVERSIÄT, GRAZ,
A-8010 GRAZ, STEYRERGASSE 17.

(Eingegangen am 11 Oktober 1974.)