Itération linéaire d'ordre deux

Par J. G. DHOMBRES (Waterloo, Ontario)

Introduction

Sur un groupe abélien $(G, +)$ on se propose l'étude des fonctions g définies sur G et à valeurs dans G, telles que l'itérée d'ordre deux de g soit une combinaison linéaire de la fonction g et de la variable.

On cherche donc à résoudre l'équation fonctionnelle suivante

$$g(g(x)) = \alpha g(x) + \beta x \quad \text{pour tout} \quad x \in G \tag{1}$$

où α et β sont deux entiers relatifs et $g: G \to G$. On supposera en plus $\alpha + \beta = 1$.

Naturellement si G est un groupe divisible, on autorisera des valeurs rationnelles pour α et β et si G est un espace vectoriel sur le corps des réels, α et β pourront être des nombres réels. Nous supposerons aussi que G *n*'est pas réduit à un seul élément.

Les méthodes usuelles de résolution d'équation fonctionnelles analogues à l'équation (1) sont, semble-t-il, trés liées à la structure ordonnée particulièrement riche de l'axe réel (cf. pour références M. KUCZMA [1]). Nous souhaitons envisager ici d'autres méthodes, valables dans des situations plus générales. Le point de vue choisi est l'étude des points fixes de la fonction g grâce à l'introduction d'une fonction intermédiaire F. Ajoutons immédiatement que si les techniques développées dans ce travail sont élémentaires, elles semblent cependant fécondes pour les équations fonctionnelles, par ailleurs assez variées, de la forme de l'équation (7). Nous introduirons aussi des équations fonctionnelles de deux variables (au sens de [1] J. ACZÉL), plus maniables mais moins générales que (1).

Naturellement, chemin faisant, nous retrouverons des équations fonctionnelles classiques, que nous essaierons de résoudre le plus simplement possible et sans donner une bibliographie extensive.

On peut commencer par remarquer que la fonction g satisfait (1) si et seulement si la fonction $f(x) = g(x) - x$ satisfait l'équation fonctionnelle.

$$f(f(x)) + x) = \gamma f(x) \quad \text{pour} \quad \gamma = \alpha - 1 \tag{2}$$

Heuristiquement, la solution générale de l'équation (1) paraît dépendre de deux paramètres. Or nous remarquons que l'équation fonctionnelle (2) est stable par translation. Grosso modo, il ne nous reste plus qu'a déterminer un seul paramétre!

I. *Définitions et calculs élémentaires*

Quelques cas particuliers méritent une certaine attention.

a Lorsque $\alpha=2$ et $\beta=-1$, l'équation (2) est appelée équation d'Euler, intervenue initialement dans un problème géomètrique, dit problème de Gergonne (cf. W. LÜSSY [1]). Traitée par de nombreux auteurs, ses seules solutions continues sur l'axe réel sont les fonctions constantes (cf. M. KUCZMA [1]; chap XIV §6; L. EULER [1]; K. KURATOWSKI [1], et R. WAGNER [1]). Nous retrouverons aisément ce résultat.

Une équation fonctionnelle à deux variables peut être étudiée en connexion avec l'équation d'Euler:

$$f(f(x)+y)+f(x+f(y)) = f(x)+f(y) \tag{3}$$

b lorsque $\alpha=1$ et $\beta=0$, l'équation (1) est l'équation d'idempotence. On lui associe l'équation fonctionnelle suivante:

$$f(f(x)+y)+f(x+f(y)) = 0 \tag{4}$$

c Lorsque $\alpha=0$ et $\beta=-1$, l'équation (1) est l'équation d'involution, cas particulier de l'équation de Babbage (cf. pour références M. KUCZMA [1]; chap XV).

d Lorsque $\alpha=3$ et $\beta=-2$, l'équation (2) peut être associée à l'équation à deux variables:

$$f(f(x)+y)+f(x+f(y)) = 2(f(x)+f(y)) \tag{5}$$

Cette équation sera appelée équation de semi-additivité. Si l'on a en outre

$$f(f(x)+y) = f(x+f(y)) \tag{6}$$

on dira que f satisfait une équation de semi-additivité symétrique Ce vocabulaire vient de J. G. DHOMBRES [1] où sont étudiées des équations du type (3) (4), (5) ou (6).

Lemme 1. *Les seules solutions affines de* (2), *sur un groupe sans torsion, sont*

$$f(x) \equiv 0 \quad et \quad f(x) = (\alpha-2)\,x+b$$

où b *est un élément quelconque de* G.

Si $g(x)=ax+b$, où a est un nombre réel tel que $ax\in G$ pour tout $x\in G$, on doit avoir $a^2-a\alpha-\beta=0$ et $(a+1-\alpha)b=0$. Si $a=1$, la deuxième équation fournit $b=0$ lorsque $\alpha\neq 2$, et b quelconque lorsque $\alpha=2$. Si $a=\alpha-1$, la seconde équation est toujours satisfaite. Il suffit de revenir à f pour conclure.

Ce lemme laisse penser qu'il est avantageux de définir la fonction $F:G\to G$ selon

$$f(x) = (\alpha-2)\,(x-F(x))$$

bien sûr lorsque $\alpha\neq 2$. On obtient alors une équation fonctionnelle dont la résolution équivaut à celle de l'équation (2), pour $\alpha\neq 2$ et dans un groupe divisible:

$$F(x) = F(g(x)) \tag{7}$$

Il est alors indispensable de calculer l'itérée d'ordre n de g. On pose $g^0(x)=x$ et on obtient sans difficulté le

Lemme 2. *Si g satisfait* (1), *on a pour tout entier $n \geqq 0$ et tout x de G*:

$$\alpha \neq 2: \qquad g^n(x) = x + \big((\alpha-1)^n - 1\big)\big(x - F(x)\big)$$

et

$$\alpha = 2: \qquad g^n(x) = x + n\,f(x).$$

Lemme 3. *Si g satisfait* (1) *avec $\alpha \neq 1$ et si G est un groupe divisible, la fonction g est injective.*

De $g(x_1) = g(x_2)$, on déduit $F\big(g(x_1)\big) = F\big(g(x_2)$, et grâce à (7) on a $F(x_1) = F(x_2)$, c'est-à-dire

$$g(x_1) = x_1 + (\alpha-2)\big(x_1 - F(x_1)\big) = x_2 + (\alpha-2)\big(x_2 - F(x_1)\big)$$

soit

$$(\alpha-1)(x_2 - x_1) = 0$$

et donc $x_1 = x_2$. La démonstration est analogue pour $\alpha = 2$.

Lemme 4. *Si g est surjective et si G est divisible, on a pour tout entier relatif n et tout $\alpha \neq 2$*

$$g^n(x) = x + \big((\alpha-1)^n - 1\big)\big(x - F(x)\big)$$

et

$$F\big(g^n(x)\big) = F(x).$$

Pour un entier positif n, on définit $g_n(x) = x + \big((\alpha-1)^{-n} - 1\big)\big(x - F(x)\big)$. On calcule aisément

$$g_n\big(g^n(x)\big) = g^n(x) + \big((\alpha-1)^{-n} - 1\big)\big(g^n(x) - F(x)\big) =$$

$$= \big(g^n(x) + \big((\alpha-1)^n - 1\big)F(x)\big)\frac{1}{(\alpha-1)^n} = \frac{\big((\alpha-1)^n - 1\big)x + x}{(\alpha-1)^n} = x.$$

Grâce à l'hypothése faite et au lemme 3, g est une bijection. D'où $g_n(x) = g^{-n}(x)$ et on en déduit le lemme 4.

II. *Cas de l'axe réel.*

Pour simplifier l'écriture, on pose $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = (\alpha-1)x$.

Theorème 1. *Pour $\alpha > 1, \alpha \neq 2$, l'ensemble des solutions continues de l'équation* (1) *sur* $(\mathbf{R}, +)$ *est donné par*

$$g_1(x); \quad g_2(x) + c \quad \textit{pour tout } c \textit{ réel et}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_2(x) + \big(g_1(a) - g_2(a)\big) & \text{si} \quad x < a \\ g_1(x) & \text{si} \quad a \leqq x \leqq b \\ g_2(x) + \big(g_1(b) - g_2(b)\big) & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

pour tous les choix possibles a, b tels que $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$.

Enonçons d'abord un lemme trés simple et sans doute classique, mais dont la démonstration n'est pas indispensable pour ce qui suit.

Lemme 5. *Soit* $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une fonction continue possédant les propriétés suivantes: Il existe un nombre réel* x_∞ *et* $g(x) \geqq x_\infty$ *pour tout* $x \geqq x_\infty, g(x) \neq x$ *pour tout* $x > x_\infty$, *enfin* $g(x_\infty) = x_\infty$.

Soit $F: T\mathbf{R} \to T\mathbf{R}$ *une fonction continue telle que pour tout* x *de* $\mathbf{R}$ $F(g(x)) = F(x)$. *Alors* $F(x) = F(x_\infty)$ *pour tout* $x \geqq x_\infty$.

Démonstration. 1er *cas.* Supposons qu'il existe un $x' > x_\infty$ tel que $g(x') > x'$. On en déduit $g(x) > x$ pour tout $x > x_\infty$ (Par contradiction, s'il existe x'', $x'' > x_\infty$ et $g(x'') < x''$, grâce à la continuité de g, il doit exister un y dans l'intervalle déterminé par x'' et x' de sorte que $g(y) = y$, ce qui est refusé).

Dès lors, posons $x_0 > x_\infty$. On remarque qu'il existe des y dans $[x_\infty, x_0]$ tels que $g(y) \leqq x_0$. On définit

$$x_1 = \sup \{y | y \geqq x_\infty; \quad g(y) \leqq x_0\}$$

et plus généralement

$$x_n = \sup \{y | y \geqq x_\infty; \quad g(y) \leqq x_{n-1}\}.$$

Puisque $g(x) > x$, on obtient une suite décroissante minorée par x_∞. Cette suite converge donc vers y. Cependant $g(x_n) \leqq x_{n-1}$ et donc $g(y) \leqq y$ ce qui donne $y \leqq x_\infty$. Mais nous avons aussi $y \geqq x_\infty$. D'où $y = x_\infty$. Dés lors, utilisant la continuité de g, on note que $g(x_n) = x_{n-1}$ et

$$F(x) = F(g(x_1)) = F(x_1) = F(g(x_2)) = F(x_2) = \ldots = F(x_n)$$

Soit $F(x_0) = F(x_\infty)$ et ce pour tout $x_0 > x_\infty$

2eme cas. S'il existe $x' > x_\infty$ tel que $g(x') < x'$, on note comme précédemment que $g(x) < x$ pour tout $x > x_\infty$. Pour tout $x_0 > x_\infty$, on définit alors $x_n = g(x_{n-1})$, la suite x_n est décroissante, minorée par x_∞. De façon analogue au premier cas, cette suite converge vers x_∞. Donc $F(x_0) = F(x_1) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_\infty)$ ce qui termine la démonstration du lemme.

Remarque. Le lemme 5 reste exact sous les hypothèses symétriques concernant $g: g(x) \leqq x_\infty$ pour tout $x \leqq x_\infty$; $g(x) \neq x$ et $g(x_\infty) = x_\infty$ et dans bien d'autres situations.

Démonstration *du théorème 1.* 1er *cas.* Commencons par supposer $1 < \alpha < 2$. On note grâce au lemme 2 que $\lim_{n\to\infty} g^n(x) = F(x)$. Par suite

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(g^n(x)) = F(F(x)).$$

Revenant à la relation entre g et F, on obtient

$$g(F(x)) = F(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}. \tag{8}$$

Soit I l'image de F. Si $I = \mathbf{R}$, (8) fournit $g(x) = x = g_1(x)$ pour tout x. Si I est réduit à un point, on obtient $g(x) = g_2(x) + c$ pour tout x et pour un nombre réel c convenable. Enfin, si I est un intervalle $|a, b|$ (ouvert, fermé ou semi-ouvert avec $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$), on dispose de $g(x) = x$ pour tout x dans $[a, b]$. En outre $g(x) \neq x$ si $x \notin I$ (En effet $g(x)=x$ équivaut à $F(x)=x$ lorsque $\alpha \neq 2$). Notons enfin que $g(x) \geqq b$ dés que $x \geqq b$ (Sinon, grâce à la continuité de g, il existerait $y, y>b$ et $g(y)=t \in |a, b|$. Dès lors $g(t)=t=g(y)$ ce qui, grâce au lemme 4, entraîne $t=y$, relation impossible puisque $y>b>t$). De même, $g(x) \leqq a$ dès que $x \leqq a$.

Finalement on peut appliquer le lemme 5 avec $x_\infty = b$ et son symétrique avec $x_\infty = a$. Ceci termine la démonstration du premier cas, du moins si l'on prend soin de noter que les solutions possibles sont effectivement solutions. (On pourrait éventuellement se passer du lemme 5 et terminer directement, comme le cas général le suggèrera plus loin).

2^{me} *cas.* Lorsque $\alpha > 2$, on note d'abord que g est surjective. En effet, le lemme 3 implique, avec la continuité de g, que cette fonction est strictement monotone. Mais g ne peut tendre vers une limite finie en $\pm\infty$ puisque, grâce à (1), une telle limite l satisferait $g(l) = \alpha l \pm \beta\infty$. Par suite, grâce à la continuité de g, l'image de g est $\mathbf{R}$ tout entier. On utilise alors le lemme 3 et par suite on se ramène au cas où l'on choisit $(\alpha-1)^{-1}+1 = \alpha(\alpha-1)^{-1}$ au lieu de α dans la relation entre g et F. Si $\alpha > 2$, $1 < \alpha(\alpha-1)^{-1} < 2$ et on est conduit au cas précédent avec g^{-1}.

Thèorème 2. *Pour* $\alpha < 1$; $\alpha \neq 0$, *l'ensemble des solutions continues de l'équation* (1) *sur* $(\mathbf{R}, +)$ *est donné par* $g_1(x)$ *et* $g_2(x)+c$ *ou* c *parcourt l'axe réel.*

La démonstration est analogue mais on ne peut avoir de cas où I est différent d'un point ou de $\mathbf{R}$ entier. En effet, lorsque $\alpha < 1$, la fonction g qui s'en déduirait n'est pas injective.

Pour être complet, donnons *les solutions continues* de (1) pour les valeurs omises de α.

Pour $\alpha = 1$, $g(x) = g_1(x)$ *pour tout* $x \in [a, b]$ *et pour valeurs de* x, $g(x) \in [a, b]$. *Ceci est valable pour tout choix de* a, b *tel que* $-\infty \leqq a \leqq b \leqq +\infty$.

Pour $\alpha = 2$, $g(x) = x + c$ *pour tout choix du nombre réel* c (cf. § IV).

Pour $\alpha = 0$, *on a* $g_1(x)$ *comme solution et une famille de solutions qui dépend d'un nombre réel arbitraire* c *et d'une fonction continue arbitraire strictement monotone sur* $]-\infty, c[$. (cf. [1], M. Kuczma, chap XV).

III. *Cas général*

Commençons par étudier le cas où $1 < \alpha < 2$ et soit $g: G \to G$ une fonction satisfaisant (1) sur un groupe abélien divisible. Nous supposerons que G est un groupe topologique sur Q et que g est continue. Soit I l'image de la fonction F. Comme précèdemment, on note que $F^2 = F$ et donc $g(F(x)) = F(x)$, c'est-à-dire que g est l'identité sur I. Précisement I apparaît comme l'ensemble des points fixes de g. C'est donc un fermé.

Pour tout x de I, on définit S_x comme le sous-ensemble de tous les y de G tels que $F(y) = x$.

(1) S_x est un sous-espace fermé tel que $S_x \cap I = \{x\}$.
(2) $S_x \cap S_{x'} = \emptyset$ pour tout $x \neq x'$.
(3) Si $y \in S_x$, alors $\gamma y + (1-\gamma)x \in S_x$ où $\gamma = \alpha - 1$ (On note que $0 < \gamma < 1$).
(4) $\bigcup_{x \in I} S_x = G$
(5) L'application $y \to x$, de G dans I, définie par la relation $y \in S_x$, est continue.

Réciproquement, soit I un fermé de G et S_x une famille de fermés possédant les propriétés (1), (2), (3), (4) et (5). Pour simplifier, on dit que $\{S_x\}_{x\in I}$ est une décomposition itérative convexe de G. On définit alors pour tout y de G

$$g(y) = \gamma y + (1-\gamma)\, x \quad \text{oú } x \text{ est associé à } y \text{ par (5).}$$

Il est facile de constater que g satisfait la relation (1).

$$g(g(y)) = \gamma g(y) + (1-\gamma)\, x = \gamma g(y) + g(y) - y = (\gamma+1)\, g(y) - y =$$
$$= \alpha g(y) + \beta y.$$

En outre, grâce à (5), g est une fonction continue. Résumons.

Thèorème 3. *Soit* $1<\alpha<2$. *Une fonction continue* $g\colon G\to G$ *sur un espace vectoriel topologique séparé sur* Q *satisfait* (1) *si et seulement s'il existe une décomposition itérative convexe* $\{S_x\}_{x\in I}$ *de* G *telle que* $F(S_x)=x$ *où l'on a défini* F *par* $y+(\alpha-2)\left(y-F(y)\right)=g(y)$ *et où* $\gamma=\alpha-1$

Grâce au lemme 4, on dispose aussitôt du

Thèorème 4. *Soit* $\alpha>2$ *et* g *une fonction continue surjective sur un espace vectoriel topologique séparé sur* Q. *Le théorème* 1 *reste valable en ajoutant que la décomposition itérative convexe de* G *vérifie en outre* $(\alpha-1)y+(2-\alpha)x\in S_x$ *dès que* $y\in S_x$.

Le problème consiste donc maintenant à construire des décompositions itératives convexes de G. Il en existe de très nombreuses variantes. Commençons par une remarque facile (On suppose $1<\lambda<2$).

Lemme 6. *Si* x *appartient à l'intérieur de* I, *on a* $S_x=\{x\}$

Pour n assez grand, si $y\in S_x$ $g^n(y)$ est voisin de x, par suite appartient à I si x est à l'intérieur de I. On a donc $g^n(y)=z=g(z)$ (D'ailleurs $z=x$). Mais g est une fonction injective et on déduit facilement que $y=x$.

Exemple 1. Soit I un corps convexe c'est à dire un sous-ensemble convexe, fermé d'intérieur non vide et appartenant à un espace vectoriel topologique E sur le corps des réels. Pour fixer les idées supposons que I soit un voisinage de l'origine. Soit $p(x)$ la jauge de Minkowski de I. On dispose de $I=\{x|x\in E;\, p(x)\leqq 1\}$. On définit alors les fermés $S_x=\{x\}$ si $p(x)\leqq 1$ et si $p(x)=1$ on prend $S_x=\{y|y=\lambda x$ ou $\lambda\geqq 1\}$. Ceci fournit une décomposition itérative convexe de E, comme il n'est pas difficile de le vérifier mais n'épuise pas tous les cas possibles.

Exemple 2. Soit I un polygone convexe du plan pour fixer les idées. Pour x à l'intérieur du polygone on pose $S_x=\{x\}$. Pour x appartenant à un côté (b, c) du polygone mais distinct d'un sommet on définit S_x comme la demi-droite issue de x extérieure au polygone et orthogonale au côté bc. Enfin, si x est le sommet b, appartenant aux côtés ab et bc on définit S_x comme le domaine angulaire fermé issu de b et compris entre les perpendiculaires élevé es en b aux côtés ab et bc.

Naturellement, l'ensemble I apparaît comme un rétracte topologique de G puisque $F\colon G\to I$ est continue et $F(x)=x$ pour tout x de I. Deux problèmes se posent alors, problèmes que nous n'aborderons pas dans le cadre de cette étude élémentaire.

Problème 1. Si G est un espace vectoriel topologique sur le corps des réels, tout S_x non réduit à un point est-il nécessairement un cône de sommet x?

Problème 2. Quels sont les rétractes topologiques d'un espace vectoriel topologique sur Q pour lesquels il existe une décomposition itérative convexe associée?

IV. *Utilisation d'autres équations fonctionnelles*

1. *Cas général.* Pour trouver d'autres exemples de solutions de (1) pour les valeurs non singulières de α, prenons le cas de l'équation (5), dite de semi-additivité.

Proposition 1. Soit f une fonction continue telle que $g(x)=x+f(x)$ soit surjective. Alors si f est semi-additive sur un espace vectoriel topologique sur Q, elle est en fait semi-additive symétrique.

De (5), on déduit que f satisfait (2) avec $\gamma=2$. Par suite, il existe x_0 tel que $f(x_0)=0$ d'après le théorème 4. On écrit alors (5) avec $x_0+f(y)=x$ et $y=z$. Il vient

$$f(x_0+f(y)+f(z))+f(z+f(x_0+f(y))) = 2(f(x_0+f(y))+f(z))$$

Mais $f(x_0+f(y))=f(y)$, soit

$$f(x_0+f(y)+f(z))+f(z+f(y)) = 2(f(y)+f(z)).$$

Par symétrie on a bien

$$f(z+f(y)) = f(y+f(z))$$

Sur $(\mathbf{R}, +)$, la proposition 1 reste vraie sans qu'il soit nécessaire d'imposer la surjectivité de g. Celle-ci est en effet acquise comme nous l'avons déjà remarqué. On peut vraisemblablement conjecturer qu'en général cette condition est superflue.

En tout cas on dispose d'une caractérisation des fonctions semi-additives symétriques sur un groupe topologique abélien.

Theorème 5. *Une fonction continue $f:G\to G$ où G est un groupe topologique abélien, satisfait l'équation de semi-additivité symétrique si et seulement s'il existe un sous-groupe fermé H de G et un relèvement continu h de G/H dans G de sorte que $f(x)=x-h(\Pi_H(x))$ où Π_H désigne l'application canonique quotient de G sur G/H.*

La condition est suffisante puisque, $\Pi_H(x)-\Pi_H(h(\Pi_H x)))=\Pi_H(x)-\Pi_H(x)=$ $=0$ donc $f(x+f(y))=x+f(y)-h(\Pi_H(x)+\Pi_H(f(y)))=x+f(y)-h(\Pi_H(x))=f(x)+$ $+f(y)$.

La condition est nécessaire puisqu'en posant $\tilde{f}(x)=x-f(x)$, on calcule aisément

$$\tilde{f}(x+f(y)) = \tilde{f}(x).$$

On note H le sous-groupe des périodes de la fonction continue $\tilde{f}$. Ce sous-groupe est fermé et $\tilde{f}$ est une fonction continue, notée h, définie sur le sous-groupe topologique quotient G/H et à valeurs dans G. On a $\tilde{f}(x)=h(\Pi_H(x))$ Cependant, puisque $f(x)\in H$ pour tout x de G, on déduit que $\Pi_H(f(x))=0$ et donc $\Pi_H=\Pi_H$ o h o Π_H. Par suite, h est un relèvement continu de G/H dans G. Lorsque h est un homomorphisme de G/H dans G, on voit que le groupe topologique G est isomorphe, algèbriquement et topologiquement, à la somme directe topologique $H\oplus h(G/H)$.

De ce théorème 5, on déduit des solutions particulières de l'équation (1) où $\alpha=3$. Prenons par exemple $G=\mathbf{R}^2$ pour l'addition et $H=R$. On se donne une application continue quelconque $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. L'application $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, définie par

$$g(x,y) = \big(x, 2y-h(x)\big)$$

satisfait (1) avec $\alpha=3$. L'ensemble I associé à g par le théorème 2 est le graphe de h tandis que les S_x sont des droites verticales (D'ailleurs, dans le cas de $\mathbf{R}^2$, et pour la solution générale de (1), si deux S_x sont des droites, ces droites sont nécessairement parallèles).

2. *Cas de la valeur singulière* $\alpha=2$. Considérons maintenant le cas de l'équation (2) avec $\alpha=2$. On a aussi (7) avec $f=F$ et $g(x)=x+f(x)$. Dans le cas de $\mathbf{R}$, où g est bijectif comme nous l'avons vu, $g^n(x)=x+nf(x)$ pour tout entier relatif n. Ou bien $f(x)=0$ pour tout x, auquel cas $g(x)=x$ identiquement, ou bien il existe un x_0 tel que $f(x_0)\neq 0$. Dans ce dernier cas, tout x de $\mathbf{R}$ appartient à $[g^k(x_0), g^{k'}(x_0)]$ où k et k' sont des entiers relatifs convenables. Puisque g est strictement monotone comme bijection continue de $\mathbf{R}$, $\dfrac{g^n(x)}{z}$ appartient à l'intervalle limité par $\dfrac{g^{k'+n}(x_0)}{n}$ et $\dfrac{g^{k'+n}(x)}{n}$.

En faisant tendre n vers l'infini, on déduit $f(x)=f(x_0)$. Finalement f est constante et $g(x)=x+c$ comme nous l'avions annoncé, ce qui fournit la solution classique de l'équation d'Euler sur l'axe réel. Le cas général s'avère très différent. Il est clair que si $f:G\to H$ où H est le sous-groupe des périodes de f, alors f satisfait (2) avec $\gamma=1$. Sur $\mathbf{R}^2$ par exemple, il existe de nombreuses solutions continues comme la fonction suivante:

$$f(x,y) = (y,0)$$

D'ailleurs, on peut reprendre dans le cas d'un groupe abélien bien des arguments développés par R. Wagner [1] sur l'axe réel, ce que nous ne ferons pas ici.

Quant à l'équation (3), il n'est pas difficile de montrer qu'une solution f satisfait, du moins sur un groupe abélien ne possédant pas de sous-groupe d'ordre deux, la relation

$$f^3(x) = f(0)$$

ainsi que

$$f\big(f^2(x)+f(y)\big) = f^2(y)$$

et

$$f\big(x+f(x)+f(y)\big) = f\big(x+f(y)\big)$$

La solution générale n'apparaît pas de façon simple.

3. *Cas de la valeur singulière* $\alpha=1$. Considérons le cas de l'équation (1) avec $\alpha=1$. L'ensemble I des points fixes de g est un rétracte topologique de g et ceci caractérise les solutions de (1). (cf. aussi Problème $n^0 2$). Par contre, l'équation (4) ne fait intervenir que des rétractes assez particuliers. En utilisant les mêmes notations qu'au Théorème 5, on a précisément:

Theorème 6. *Soit G un groupe topologique abélien ne contenant pas de sous-groupes d'ordre deux. Soit $f:G\to G$ une fonction continue. Cette fonction satisfait* (4) *si et seulement s'il existe deux sous-groupes fermés H et I avec $I\supset H$, un relèvement continu h du groupe topologique quotient G/I dans G et un relèvement continu i de I/H dans I tel que $i(-x)+i(x)=0$, de sorte que*

$$f(x) = i\left[\pi_H\{h(\pi_I(x))-x\}\right] \tag{9}$$

DÉMONSTRATION On note d'abord que $2f^2(0)=0$ et donc $f^2(0)=0$ d'après l'hypothèse faite sur G. En outre (4) fournit

$$f(f(x)+f(y))+f(y+f^2(x)) = 0$$

donc par symétrie

$$f(y+f^2(x)) = f(x+f^2(y)) \tag{10}$$

d'où en particulier $f^3=f$.

Cependant il existe toujours un x_0 tel que $f(x_0)=0$. (Prendre $x_0=x+f(x)$). La fonction $f_1(x)=f(x+x_0)$ satisfait encore (4) et s'annule en 0. On peut donc se contenter d'étudier le cas $f(0)=0$, quitte ensuite à effectuer une translation. L'équation (4) fournit aussitôt $f^2=-f$ et (10) donne

$$f(x-f(y)) = f(y-f(x)).$$

On pose alors $f'(x)=-f(x)$ pour obtenir l'équation symétrique (6) quant à f'. On sait résoudre complètement (6) sur un groupe abélien quelconque et sans hypothèse de continuité (cf. J. G. DHOMBRES [2]). Rappelons le résultat. On désigne par H le sous-groupe des périodes de la fonction f'. En outre, on définit g' par $g'(x)=x-f'(x)$. On appelle I le sous-groupe des éléments x de G tels que $g(x+y)-g(y)\in H$ pour tout y de G. On vérifie que $H\subset I$ et l'on a avec des notations qu'il est inutile de préciser

$$x = x_H \oplus x_{I/H} \oplus x_{G/I}$$

et

$$f'(x) = i'(x_{I/H}+h'(x_{G/I})) \oplus (x_{I/H}+h'(x_{G/H})) \oplus 0$$

où $h':G/I\to I/H$ et $i':I/H\to G$. On peut encore noter (8) sous une autre forme. La fonction Π_H désigne l'application canonique quotient de G sur G/H et nous appelons relèvement de G/H dans G une application $G:G/H\to G$ telle que Π_H oh soit l'identité sur G/H. On a

$$f'(x) = i'(\Pi_H[x-h'(\Pi_I(x))]) \tag{11}$$

où h' est un relèvement de G/I dans G et i' un relèvement de I/H dans I. On note que $\Pi_H(x-h'(\Pi_I(x)))$ est un élément de $\Pi_H(I)$, groupe identifiable à I/H. Pour que f satisfasse maintenant (4), on doit avoir

$$0 = i'(\Pi_H(x)-\Pi_H(y)+\Pi_H(h'(\Pi_I(y)))-\Pi_H(h'(\Pi_I(x))))+$$
$$+i'(\Pi_H(y)-\Pi_H(x)+\Pi_H(h'(\Pi_I(x)))-\Pi_H(h'(\Pi_I(y))))$$

soit pour tout z de I/H

$$i'(z)+i'(-z) = 0$$

puisque tout z peut s'écrire sous la forme suivante où l'on prend $y=0$ et $x\in I$

$$z = \Pi_H(x)-\Pi_H(y)+\Pi_H(h'(\Pi_I(y)))-\Pi_H(h'(\Pi_I(x)))$$

Lorsque f est supposée continue, les sous-groupes H et I sont nécessairement fermés d'après leur définition et les relèvements associés nécessairement continus. En posant $i'(x)=-i(x)$ on obtient la forme (9) pour f, ce qui démontre la nécessité au théorème 5. Il faut toutefois remarque que si f est donnée par (7), une translatée quelconque de f est encore sous la forme (9) après un changement convenable de fonction h. La suffisance au théorème 6 se vérifie par un calcul direct. Lorsque G contient un sous-groupe d'ordre deux, engendré par y où par $y\neq 0$, la fonction constante $f(x)=y$ satisfait (4). Elle est d'ailleurs de la forme (9) avec $H=I=G$ et $i\{0\}=y$.

Nous ne considérerons pas ici le cas singulier $\alpha=0$, lequel nous entraînerait aussitôt dans la discussion de l'itération fractionnaire (cf. M. Kuczma [1]; chap XV).

Remarques finales

1. L'équation fonctionnelle de point fixe (7), base de notre étude, peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = F((\alpha-1)\,x-(\alpha-2)\,F(x))$$

Elle n'est donc qu'un cas particuler d'une équation fonctionnelle traitée par D. Brydak ([1] et [2]) dans le seul cas de l'axe réel, à savoir l'équation $F(f(x, F(x)))= =F(x)$ où $f(x, y)$ est une fonction donnée, continue et strictement monotone par rapport à chaque variable. En particulier, les solutions obtenues permettent de résoudre l'équation d'itération

$$g(g(x)) = H(g(x), h(x, g(x)))$$

où H et h sont données de sorte que $H(x, h(x, z))=z$ et H possède les mêmes propriétés que f.

Même dans le cas de l'axe réel, la méthode que nous avons donnée semble plus économique et permet de récupérer l'essentiel des résultats de Brydak.

2. Après avoir terminé cette étude, j'ai pris connaissance d'un papier à paraître de S. Nabeya ([1]) dans lequel cet auteur étudie, sur l'axe réel, une équation fonctionnelle plus générale que (1), à savoir l'équation générale d'itération linéaire d'ordre deux:

$$g(g(x)) = \alpha g(x)+\beta x+\gamma$$

La nature des solutions dépend essentiellement des racines de l'équation $\varrho^2=\alpha\varrho+\beta$.

3. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux couples de points de G. On peut chercher à savoir s'il existe une solution g de (1), éventuellement unique, telle que $g(x_1)=y_1$ et $g(x_2)=y_2$. Dans le cas de l'axe réel, pour $\alpha>1$, il y a existence et unicité d'une telle solution si et seulement si $(\alpha-1)\,(x_2-x_1)\geqq y_2-y_1$; $y_1\neq x_1$; $y_2\neq x_2$ et $x_2\neq x_1$.

Bibliographie

J. Aczél, [1] Lectures on functional equations and their applications *New York*. 1966.

D. Brydak, [1] Sur une équation fonctionnelle (I) *Ann. Pol. Math.* **15** (1964), 237—251.

[2] Sur une équation fonctionnelle (II) *Ann. Pol. Math.* **21** (1968), 1—13.

J. G. Dhombres, [1] Functional equation on semi-groups arising from the theory of means *Nanta Mathematica* **5** (1972), 48—66.

[2] Solution générale sur un groupe abélien de l'équation fonctionnelle $f(x*f(y))=$ $=f(f(x)*y)$ *Aequ. Math.* **15** (1977), 173—193.

[3] Interpolation linéaire et équations fonctionnelles, *Ann. Pol. Math.* **32** (1976), 287—302.

L. Euler, [1] Opera Omnia, Series prima, Opera Mathematica Vol. 27, Commentationes geometricae, Vol. 2, *Lausanne*, 1954.

M. Kuczma, [1] Functional equations in a single variable (Monografie matematyczne), Tom 46, Warszawa, 1968.

K. Kuratowski, [1] Sur une équation fonctionnelle, Sprawozdania z posiedzén *Tow. Nauk, Warsjawskiego* **22** (1929), 160—161.

W. Lüssy, [1] Lösung der Aufgabe 173 *Elem. Math.* **9** (1954), 60—61.

S. Nabeya, [1] On the functional equation $f(p+qx+rf(x))=a+bx+cf(x)$ à *paraitre* Aeq. Math. (1974)

R. Wagner, [1] Eindeutige Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+f(x))=f(x)$ *Elem. Math.* **16** (1959), 73—78.

J. G. DHOMBRES
WATERLOO, ONTARIO
CANADA

(Reçu le 2 janvier 1975.)