Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov, Szele und Kertész

Von REINER FRITZSCHE (Halle)

Dem Andenken an Herrn Professor Andor Kertész gewidmet

In der Arbeit [6] von L. J. KULIKOV wird ohne Beweis der Satz mitgeteilt, daß jeder abzählbar erzeugte torsionsfreie Z_p-Modul, der kein Element unendlicher Höhe enthält, als direkte Summe zyklischer Z_p-Moduln darstellbar ist. Dabei bezeichnet Z_p den Ring der ganzen p-adischen Zahlen mit einer festen Primzahl p. Ein Beweis für diesen Satz wurde von T. SZELE und A. KERTÉSZ [8] erbracht. Dieser Beweis läßt sich verbandstheoretisch interpretieren, so daß ein analoger Satz für eine spezielle Klasse algebraischer modularer Verbände, die die Klasse der Untermodulverbände der genannten Z_p-Moduln echt umfaßt, beweisbar wird. Zugleich wird damit ein Beitrag zu einer „elementfreien" Theorie der verallgemeinerten primären abelschen Gruppen geliefert, der auf eine Anregung zurückgeht, die der Verfasser vor mehreren Jahren von A. Kertész erhielt.

1. L sei ein algebraischer modularer Verband, 0 bezeichne das kleinste und 1 das größte Element von L, b/a denjenigen Unterverband von L, welcher aus allen Elementen $c \in L$ mit $a \leqq c \leqq b$ besteht, falls $a, b \in L$ mit $a \leqq b$ gilt. Ein Element $z \in b/a$ heiße genau dann ein *Zyklus* in b/a, wenn z/a eine Kette und z/x für jedes Element $x \in z/a$ mit $x > a$ eine endliche Kette ist. Die (endliche oder unendliche) Länge der Kette z/a heiße die *Ordnung* des Elements z *bezüglich* a und werde mit $O_a(z)$ bezeichnet. $Z(b/a)$ sei die Menge aller Zyklen in b/a. Jeder Zyklus ist ein kompaktes Element in L (siehe [7]). Für jeden Zyklus $z \in Z(b/a)$ mit $z > a$ bezeichne z'_a den unteren Nachbarn von z, und es sei $a'_a \overset{\text{def}}{=} a$. Für jedes beliebige Element $c \in b/a$ werde gesetzt

$$c'_a \overset{\text{def}}{=} \bigcup (z'_a \mid z \in Z(b/a), z \leqq c),$$

$$c_a^{(n)} \overset{\text{def}}{=} (c_a^{(n-1)})'_a \quad (n \geqq 1),$$

$$c_a^{(0)} \overset{\text{def}}{=} c.$$

(Ein Komma innerhalb einer Formel bedeute stets die Konjunktion.) Existiert zu dem Zyklus $z \in Z(b/a)$ eine größte nichtnegative ganze Zahl m, so daß die Gleichung $x_a^{(m)} = z$ mit $x \in Z(b/a)$ lösbar ist, so heiße m die *Höhe* des Elementes z

bezüglich b und werde mit $H_b(z)$ bezeichnet. Falls eine solche Zahl nicht existiert, werde $H_b(z)=\infty$ gesetzt. Zur Abkürzung sei $Z(L)=Z$, $O_0(z)=O(z)$, $H_1(z)=H(z)$, $c_0^{(n)}=c^{(n)}$. Die direkte Vereinigung von Elementen $a, b, a_\nu \in L$ werde mit $a \dot{\bigcup} b$ bzw. $\dot{\bigcup}_{\nu=1}^{n} a_\nu$ bzw. $\dot{\bigcup}(a|a\in A)$ bezeichnet, wobei dem jeweiligen Zusammenhang entsprechend n eine natürliche Zahl und A eine Untermenge von L ist. Gemäß [5] heiße eine Untermenge $M\subseteqq L$ mit $O\notin M$ genau dann *unabhängig*, wenn die direkte Vereinigung der Elemente von M existiert, und maximal unabhängig in der Untermenge $R\subseteqq L$, wenn $M\subseteqq R\subseteqq L$ und für jedes Element $c\in R$ $(c>0)$ $c\cap \dot{\bigcup}(d|d\in M)>0$ gilt.

Der (algebraische modulare) Verband L heiße nach G. Richter [7] genau dann *zyklisch erzeugter* modularer Verband, wenn jedes Element von L als Vereinigung von Zyklen darstellbar ist. In [7] wird bewiesen, daß in diesem Fall die Unabhängigkeit von Untermengen der Menge Z der Zyklen in L eine D-Unabhängigkeit im Sinne von Kertész ist, woraus die Gleichmächtigkeit je zweier maximaler unabhängiger Untermengen von Z folgt. Die Mächtigkeit jeder maximalen unabhängigen Untermenge von Z hängt daher nur von L ab und werde als *Rang* von L bezeichnet. Jede unabhängige Untermenge von Z kann durch Elemente aus Z zu einer maximalen unabhängigen Untermenge ergänzt werden (siehe [3] oder [4]).

In [7] wird bewiesen, daß jeder zyklisch erzeugte modulare Verband die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$y\in Z(b/a) \Leftrightarrow y = a\cup z, \quad z\in Z; \tag{1}$$

$$y = a\cup z\in Z(b/a), \quad z\in Z \Rightarrow y_a^{(n)} = a\cup z^{(n)} \quad \text{für jede natürliche Zahl } n; \tag{2}$$

$$z_1, z_2\in Z, \quad a\in L, \quad z_1 \leqq z_2\cup a, \quad z_1 \not\leqq z_2'\cup a \Rightarrow a\cup z_1 = a\cup z_2; \tag{3}$$

$$z\in Z, \quad z \leqq \bigcup(b|b\in B, B\subseteqq L) \Rightarrow z' \leqq \bigcup(b'|b\in B); \tag{4}$$

$$a = \bigcup(b|b\in B, B\subseteqq L) \Rightarrow a^{(n)} = \bigcup(b^{(n)}|b\in B) \quad \text{für jede natürliche Zahl } n. \tag{5}$$

Für den Fall, daß alle Zyklen von L endliche Ordung haben, sind die Beweise zum Teil auch in [1] bzw. [2] enthalten.

2. Zur Charakterisierung der zu betrachtenden Klasse von Verbänden sollen gewisse typische Eigenschaften der Untermodulverbände der Z_p-Moduln herangezogen werden, welche durch den folgenden Satz nahegelegt werden.

Satz 1. *Der Untermodulverband L jedes Z_p-Moduls M ist ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit folgenden Eigenschaften:*
(A) *Für alle Elemente $z\in Z$ und alle Elemente $b, c\in L$ folgt aus*

$$z^{(n)} \leqq b^{(n)}\cup c, \quad z^{(n-1)} \not\leqq b^{(n-1)}\cup c$$

die Existenz eines Elementes $z_0\in Z$ mit

$$z_0 \leqq b\cup z, \quad z_0^{(n)} \leqq c, \quad z_0^{(n-1)} \not\leqq b^{(n-1)}\cup c.$$

(B) *Für jede Folge von Elementen* $z_\nu \in Z$ $(\nu=1, 2, \dots)$ *und jedes Element* $x \in Z$ *folgt aus*

$$z_\nu \neq 0, \quad z_\nu \cap x = 0, \quad z_{\nu+1} \cup x^{(\nu)} = z_\nu \cup x^{(\nu)} \quad \text{für alle } \nu$$

die Existenz eines Elementes $z_0 \in Z$ *mit der Eigenschaft*

$$0 < z_0 \leqq z_\nu \cup x^{(\nu)} \quad \text{für alle } \nu.$$

BEWEIS. Daß L ein zyklisch erzeugter modularer Verband ist, ist evident. Die Zyklen sind genau die zyklischen Untermoduln von M, die entweder unendlich und isomorph zur additiven Gruppe von Z_p oder zyklische primäre abelsche Gruppen sind (siehe [6]). Bezeichnet (ζ) den vom Element $\zeta \in M$ erzeugten zyklischen Untermodul, so ist $(\zeta)'=(p\xi)$. Infolgedessen sind die Prämissen der Implikation (A) genau dann erfüllt, wenn $p^n\zeta=p^n\beta+\gamma$ mit geeigneten Elementen $\beta \in b$, $\gamma \in c$ sowie $p^{n-1}\zeta \neq p^{n-1}\beta'+\gamma'$ für alle Elemente $\beta' \in b, \gamma' \in c$ gilt. Das Element $\zeta_0 \overset{\text{def}}{=} \zeta-\beta$ hat dann die Eigenschaften

$$(\zeta_0) \leqq (\zeta) \cup b, \quad (\zeta_0)^{(n)} \leqq c, \quad (\zeta_0)^{(n-1)} \not\leqq b^{(n-1)} \cup c.$$

Die Prämissen zu (B) sind nur dann erfüllt, wenn mit $z_\nu=(\gamma_\nu)$ $(\nu=1, 2, \dots)$, $x=(\alpha)$ aus $\pi_\nu\gamma_\nu=\pi'_\nu\alpha$ mit $\pi_\nu, \pi'_\nu \in Z_p$ für jedes ν $p|\pi_\nu, p|\pi'_\nu$ folgt und wenn für jedes ν

$$\gamma_\nu = \varrho_{\nu+1}\gamma_{\nu+1}+p^\nu\varrho'_\nu\alpha \quad (\varrho_{\nu+1}, \varrho'_\nu \in Z_p)$$

gilt, wobei $\varrho_{\nu+1}$ p-adische Einheit ist. Mit $\varrho_1 \overset{\text{def}}{=} 1$ gilt für jedes ν

$$\begin{aligned} \varrho_1 \cdots \varrho_{\nu+1}\gamma_{\nu+1}+\varrho_1 \cdots \varrho_\nu\gamma_\nu &= \varrho_1 \cdots \varrho_\nu(\varrho_{\nu+1}\gamma_{\nu+1}-\gamma_\nu) = \\ &= -p^\nu\varrho_1 \cdots \varrho_\nu\varrho'_\nu\alpha. \end{aligned}$$

Demnach konvergiert die Folge der Elemente

$$\varrho_1 \cdots \varrho_{\nu+1}\gamma_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

gegen

$$\begin{aligned} \gamma_0 \overset{\text{def}}{=} \varrho_1\gamma_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\varrho_1 \cdots \varrho_{\nu+1}\gamma_{\nu+1}-\varrho_1 \cdots \varrho_\nu\gamma_\nu) &= \\ = \varrho_1 \cdots \varrho_\nu\gamma_\nu+p^\nu\tau_\nu\alpha \quad \text{für jedes } \nu \quad (\tau_\nu \in Z_z), \end{aligned}$$

so daß

$$0 < (\gamma_0) \leqq (\gamma_\nu) \cup (\alpha)^{(\nu)}$$

für jedes ν gilt.

Folgerung. Jedes Intervall b/a des Untermodulverbandes L jedes Z_p-Moduls M ist ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit den Eigenschaften (A) und (B), denn b/a ist Untermodulverband eines Faktormoduls eines Untermoduls von M, welcher ebenfalls Z_p-Modul ist.

Für jeden zyklische erzeugten modularen Verband, dessen Zyklen sämtlich endliche Ordnung haben, ist die Implikation (B) trivialerweise erfüllt, denn für jede hinreichend große natürliche Zahl n gilt $x^{(n)}=0$, also $z_{\nu+1}=z_\nu$ für alle $\nu \geqq n$, so daß mit $z_0 \overset{\text{def}}{=} z_n$ $0<z_0 \leqq z_\nu \cup x^{(\nu)}$ für alle ν gilt. Andererseits besitzen die Untermodulverbände torsionsfreier K_p-Moduln (wobei K_p den Ring aller rationalen

Zahlen mit zur Primzahl p teilerfremdem Nenner bezeichnet) die Eigenschaft (B) im allgemeinen nicht, obwohl die K_p-Moduln zusammen mit den Z_p-Moduln auf Grund gemeinsamer Eigenschaften die Klasse der verallgeneinerten primären abelschen Gruppen bilden (siehe [6]).

In Abschnitt 4 wird die Klasse $\mathfrak{K}$ derjenigen zyklisch erzeugten modularen Verbände, die nur Zyklen unendlicher Ordnung enthalten und deren Intervalle sämtlich die Eigenschaften (A) und (B) besitzen, betrachtet. Hinsichtlich der Eigenschaft (A) könnte man sich allerdings darauf beschränken, diese für jeden (vollen) Verband der Klasse zu fordern, weil sich dann bereits beweisen läßt, daß auch jedes Intervall diese Eigenschaft besitzt (siehe [7]). Daß $\mathfrak{K}$ die Klasse der Untermodulverbände der torsionsfreien Z_p-Moduln als echte Teilklasse enthält, ergibt sich als Folgerung aus Satz 2.

Satz 2. *Jeder zum direkten Produkt $L_1 \times L_2$ zweier Ketten $L_1 = e_1/0_1$ und $L_2 = e_2/0_2$, wobei e_1 und e_2 Zyklen unendlicher Ordnung sind, isomorphe Verband L ist ein zyklisch erzeugter modularer Verband, dessen Intervalle b/a sämtlich die Eigenschaften* (A) *und* (B) *besitzen.*

Beweis. Daß L zyklisch erzeugter modularer (sogar distributiver) Verband ist, ist evident. Die Eigenschaft (A), die jeder der Verbände L_1 und L_2 trivialerweise besitzt, überträgt sich ebenfalls ohne weiteres auf das direkte Produkt. Für $i=1, 2$ sei $x_i \in L$ der dem Element $e_i \in L_i$ entsprechende maximale Zyklus von L, und es sei $b = x_1^{(k_1)} \cup x_2^{(k_2)}$ mit ganzen Zahlen $k_1, k_2 \geqq 0$. Die Prämissen zu (B) sind nur dann erfüllt, wenn für alle ν $z_\nu = z_{\nu+1} = a \cup x_j^{(k_j+l_j)} > a$ mit $l_j \geqq 0$ ($j=1$ oder 2) gilt. Dann besitzt das Element $z_0 \overset{\text{def}}{=} a \cup x_j^{(k_j+l_j)}$ die geforderten Eigenschaften.

Folgerung. Die Klasse $\mathfrak{K}$ enthält Verbände, die nicht zu Untermodulverbänden von Z_p-Moduln isomorph sind, denn der Untermodulverband jedes torsionsfreien nicht zyklischen Z_p-Moduls enthält unendlich viele paarweise unvergleichbare Zyklen, so daß L zwar zu $\mathfrak{K}$ gehört, aber nicht zum Untermodulverband eines Z_p-Moduls isomorph ist.

3. L sei ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit den Eigenschaften (A) (siehe oben) und $O(z) = \infty$ für alle $z \in Z$ mit $z > 0$. Dann gelten die folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Für je zwei Zyklen $z_1, z_2 \in Z$ gilt $z_1 \| z_2 \Rightarrow z_1 \cap z_2 = 0$.*

Beweis. Falls $z_1 \cap z_2 > 0$ gilt, sind die Intervalle $z_i/z_1 \cap z_2$ endliche Ketten der Länge k_i ($i=1, 2$). Ist o. E. d. A. $k_1 \geqq k_2$, so gilt

$$(z_1^{(k_1-k_2)})^{(k_2)} \leqq z_2^{(k_2)}, \quad (z_1^{(k_1-k_2)})^{(k_2-1)} \not\leqq z_2^{(k_2-1)},$$

woraus nach (A) die Existenz eines Zyklus $z_0 > 0$ mit $O(z_0) = k_2 < \infty$ folgt, was der Voraussetzung über die Ordnung widerspricht.

Hilfssatz 2. *Besitzt L den Rang n und ist $z_0 \in Z$ ein Zyklus mit $H(z_0) = 0$, so besitzt das Intervall $1/z_0$ den Rand $n-1$.*

BEWEIS. $y_i = z_0 \cup z_i \in Z(1/z_0)$ $(i=1, \ldots, m)$ seien in $1/z_0$ unabhängige Zyklen. Dann gilt für $j=1, \ldots, m$

$$z_j \cap \bigcup_{i \neq j} (z_0 \cup z_i) \leqq (z_0 \cup z_j) \cap \bigcup_{i \neq j} (z_0 \cup z_i) \leqq z_0,$$

also

$$z_j \cap \bigcup_{i \neq j} (z_0 \cup z_i) \leqq z_0 \cap z_j = 0.$$

Letzteres folgt aus Hilfssatz 1, da $z_j \leqq z_0$ wegen der Unabhängigkeit der Zyklen y_i und $z_j > z_0$ wegen $H(z_0)=0$ nicht möglich ist. Hieraus ergibt sich für $j=1, \ldots, m$

$$z_j \cap \bigcup_{\nu=0}^{j-1} z_\nu \leqq z_j \cap \bigcup_{i \neq j} (z_0 \cup z_i) = 0.$$

Die Zyklen $z_0, z_1, \ldots, z_m$ sind also unabhängig, so daß $m \leqq n-1$ gelten muß und der Rang von $1/z_0$ demnach höchstens $n-1$ ist. Nunmehr werde $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} z_0$ zu einer maximalen unabhängigen Untermenge $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ von Z durch Elemente $x_i \in Z$ $(i=1, \ldots, n-1)$ ergänzt, und es sei $w_i \stackrel{\text{def}}{=} z_0 \cup x_i \in Z(1/z_0)$ $(i=1, \ldots, n-1)$. Wenn die Elemente w_i in $1/z_0$ nicht unabhängig sind, gibt es einen Index j $(1 \leqq j \leqq n-1)$ mit der Eigenschaft

$$w_j \cap \bigcup (w_i \mid i = 1, \ldots, n-1, i \neq j) = w_j^{(k)} > z_0$$

für eine geeignete ganze Zahl $k \geqq 0$, so daß also unter Berücksichtigung von (2)

$$0 < x_j^{(k)} \leqq x_0 \cup x_j^{(k)} \leqq \bigcup (x_i \mid i = 0, 1, \ldots, n-1, i \neq j)$$

gilt im Widerspruch zur Unabhängigkeit der Elemente $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Infolgedessen sind die Elemente $w_1, \ldots, w_{n-1}$ in $1/z_0$ unabhängig, so daß der Verband $1/z_0$ den Rang $n-1$ besitzt.

Hilfssatz 3. *Gilt* $0 < z \leqq z_1^{(k)} \cup z_2^{(k)}$ $(z, z_1, z_2 \in Z)$, *so existiert ein Zyklus* $z_0 \in Z$ *mit der Eigenschaft* $z_0^{(k)} = z$ $(k \geqq 1)$.

BEWEIS. Ist $z \leqq z^{(k)} \cup z_2^{(r)}$ für alle natürlichen Zahlen $r \geqq k$, so gilt in $1/z_1^{(k)}$ nach (1) und (2) für alle r

$$z_1^{(k)} \cup z \leqq (z_1^{(k)} \cup z_2)^{(r)}_{z_1^{(k)}},$$

woraus auf Grund der Definition des Begriffes Zyklus $z \leqq z_1^{(k)}$, also bei geeigneter Wahl von $t \geqq 0$ $z = (z_1^{(t)})^{(k)}$ folgt. Es kann daher die Existenz einer natürlichen Zahl $s \geqq 1$ angenommen werden, so daß mit

$$z_1 \stackrel{\text{def}}{=} z, \quad y_{1l} \stackrel{\text{def}}{=} z_1^{(k-l)}, \quad y_{21} \stackrel{\text{def}}{=} z_2^{(k+s-l)} \quad (1 \leqq l \leqq k)$$

die Relationen

$$z_l \leqq y'_{1l} \cup y'_{2l}, \quad x_l \not\leqq y'_{1l} \cup y''_{2l} \tag{6}$$

für $1=1$ erfüllt sind.

Aus (6) folgt

$$y_{2l} \not\leqq x_l \cup y_{1l},$$

da sich sonst wegen $x_l \cup y_{1l} \leqq y_{1l} \cup y'_{2l}$ mit (4) ein Widerspruch ergibt, sowie nach (3)

$$y'_{2l} \leqq x_l \cup y'_{1l}.$$

Nach Voraussetzung (A) existiert daher ein Zyklus $x_{l+1} \in Z$ mit den Eigenschaften

$$x_{l+1} \leqq y_{1l} \cup y_{2l}, \quad x_{l+1} \not\leqq x_l \cup y_{1l}, \quad x'_{l+1} \leqq x_l.$$

Nach Hilfssatz 1 muß dann $x'_{l+1} = x_l$ gelten. Wäre

$$x_{l+1} \leqq y_{1l} \cup y'_{2l},$$

so ergäbe sich hieraus mit (4) abermals ein Widerspruch zu (6), so daß für jede natürliche Zahl l mit $1 \leqq l \leqq k$ aus der Gültigkeit der Relationen (6) auch deren Gültigkeit für $l+1$ folgt, wenn man $y_{1l} = y'_{1\,(l+1)}$, $y_{2l} = y'_{2\,(l+1)}$, $y'_{2l} = y''_{2\,(l+1)}$ berücksichtigt. Für $l=k$ gilt dann $x_{k+1}^{(k)} = x$, das heißt $z_0^{(k)} = z$ mit $z_0 \overset{\text{def}}{=} x_{k+1} \in Z$.

4. L sei ein zyklisch erzeugter modularer Verband, dessen Intervalle b/a sämtlich die Eigenschaften (A) und (B) (siehe oben) besitzen, und es sei $O(z) = \infty$ für alle $z \in Z$ mit $z > 0$. Dann gelten die folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 4. *Ist* $H(z) < \infty$ *für alle* $z \in Z$ *mit* $z > 0$ *und ist* $x \in Z$ *ein Zyklus mit der Eigenschaft* $O_x(u) = \infty$ *für alle* $u \in Z(1/x)$, *so gilt* $H(u) < \infty$ *für alle* $u \in Z(1/x)$ *mit* $u > x$.

Beweis. Für $x = 0$ ist die Behauptung trivialerweise richtig, so daß $x > 0$ angenommen werden kann. Ist $v^{(m)} = w^{(n)} = u > x$ $(u, v, w \in Z(1/x), m \leqq n)$, so gilt nach Hilfssatz 1, angewandt auf $1/x$, $v \leqq w$. Aus der Annahme, daß $u \in Z(1/x)$ ein von x verschiedener Zyklus mit $H(u) = \infty$ ist, folgt daher die Existenz einer unendlichen Folge von Zyklen $u_\nu \in Z(1/x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mit den Eigenschaften

$$(u_{\nu+1})'_x = u_\nu \geqq u_1 \overset{\text{def}}{=} u \quad \textit{für jedes } \nu.$$

Nach (1), (2) und (5) gilt dabei für jeden Index ν $u_\nu = x \cup y_\nu$, $(u_\nu)'_x = x \cup y'_\nu$ mit $y_\nu \in Z$ sowie

$$x^{(\nu)} \cup y_{\nu+1}^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} \cup y_\nu^{(\nu)}.$$

Die Relation $x < y_\nu$ hätte $y_\nu \in Z(1/x)$ und damit $O_x(y_\nu) = \infty$ zur Folge, was wegen $y_\nu \in Z$ nicht möglich ist. $y_\nu \leqq x$ widerspricht der Annahme $u > x$, so daß $y_\nu \| x$ (insbesondere also $y_\nu \neq 0$ und damit $y_\nu^{(\nu)} \neq 0$) und nach Hilfssatz 1 $y_\nu \cap x = 0$, also auch $y_\nu^{(\nu)} \cap x = 0$ für alle ν gelten muß. Die Folge $y_\nu^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ erfüllt demnach zusammen mit x die Prämissen zu (B), so daß ein Element $y_0 \in Z$ mit der Eigenschaft

$$0 < y_0 \leqq y_\nu^{(\nu)} \cup x^{(\nu)} \quad \text{für alle } \nu$$

existiert. Nach Hilfssatz 3 folgt für jedes ν hieraus die Existenz eines Zyklus $z_\nu \in Z$ mit der Eigenschaft $z_\nu^{(\nu)} = y_0$; also ist $H(y_0) = \infty$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher kann ein Zyklus $u \in Z(1/x)$ mit $H(u) = \infty$ nicht existieren.

Folgerung. Ist $H(z) < \infty$ für alle $z \in Z$ mit $z > 0$ und gilt mit $a_n = \dot{\bigcup}_{\nu=1}^{n} x_\nu$, $x_\nu \in Z$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ $O_{a_n}(u) = \infty$ für alle $u \in Z(1/a_n)$ mit $u > a_n$, so ist $H(u) < \infty$ für alle $u \in Z(1/a_n)$ mit $u > a_n$.

Beweis. Für $n=1$ ist die Behauptung nach Hilfssazt 4 richtig. Nimmt man unter den gemachten Voraussetzungen an, daß für $u_0=a_{n-1}\cup z_0\in Z(1/a_{n-1})$ $O_{a_{n-1}}(u_0)=k\geqq 0$ gilt, daß also $(a_{n-1}\cup z_0)/a_{n-1}$ Kette der Länge k, also $z_0^{(k)}\leqq\leqq a_{n-1}\leqq a_n$ ist, so muß $z_0\leqq a_n$, also auch $a_{n-1}\leqq z_0\cup a_{n-1}\leqq a_n$ gelten (denn sonst hätte $a_n\cup z_0>a_n$ in $1/a_n$ endliche Ordnung). Ferner gilt $a_n/a_{n-1}\cong z_n/0$, insbesondere also $(a_{n-1}\cup z_0)/a_{n-1}\cong(a_{n-1}\cup z_0)\cap z_n/0$. Wegen $O(z_\nu)=\infty$ kann die rechte Seite nur dann endliche Kette sein, wenn diese die Länge 0 hat. Demnach gilt auch $a_{n-1}\cup z_0=a_{n-1}$, das heißt $u_0=a_{n-1}$ oder $k=0$, so daß für alle $u\in Z(1/a_{n-1})$ mit $u>a_{n-1}$ ebenfalls $O_{a_{n-1}}(u)=\infty$ ist. Damit sind die Voraussetzungen der Folgerung auch für $n-1$ an Stelle von n erfüllt. Nimmt man an, daß sie für diesen Fall richtig ist, so sind für den Verband $1/a_{n-1}$ und das Element z_n die Voraussetzungen des Hilfssatzes 4 erfüllt, welcher dann die in der Folgerung ausgesprochene Behauptung liefert.

Hilfssatz 5. *Ist $H(z)<\infty$ für alle $z\in Z$ mit $z>0$ und besitzt L den Rang n, so gilt $1=\dot{\bigcup}_{\nu=1}^{n} z_\nu$ mit $z_\nu\in Z$ $(\nu=1, \dots, n)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein Zyklus $z\in Z$ mit $H(z)=0$. Im Fall $n=1$ folgt aus der Annahme $z<1$ die Existenz eines weiteren Zyklus $y\not\equiv z$, der nach Hilfssatz 1 die Eigenschaft $y\cap z=0$ besitzt, was $n>1$ bedeuten würde. Folglich gilt $z=1$. Ist $n>1$, so besitzt das Intervall $1/z$ nach Hilfssatz 2 den Rang $n-1$. Ferner gilt für jeden Zyklus $u\in Z(1/z)$ mit $u>z$ $O(u)=\infty$ wegen $H(z)=0$, also $H(u)<\infty$ nach Hilfssatz 4. Unter der Annahme, daß Hilfssatz 5 für $n-1$ richtig ist, kann dieser daher auf $1/z$ angewandt werden. Es sei demnach in $1/z$

$$1=\dot{\bigcup_{\nu=1}^{n-1}} y_\nu,\quad y_\nu\in Z(1/z)\quad(\nu=1,\dots,n-1)$$

mit $y_\nu=z\cup z_\nu, z_\nu\in Z$ $(\nu=1, \dots, n-1)$ gemäß (1). Gilt für einen Index ν $z<z_\nu$, so folgt $H(z)>0$ im Widerspruch zur Voraussetzung, und $z\geqq z_\nu$ widerspricht der Unabhängigkeit der Elemente y_ν $(\nu=1, \dots, n-1)$ in $1/z$. Nach Hilfssatz 1 gilt daher $z\cap z_\nu=0$ für alle ν. Infolgedessen ist

$$1=\dot{\bigcup_{\nu=1}^{n-1}}(z\,\dot{\cup}\,z_\nu)=\dot{\bigcup_{\nu=1}^{n}} z_\nu,$$

wenn $z_n\overset{\mathrm{def}}{=}z$ gesetzt wird.

5. Nach diesen Vorbereitungen kann ein Beweis für das angekündigte verbandstheoretische Analogon zu dem eingangs zitierten Satz erbracht werden.

Satz 3. *L sei zyklisch erzeugter modularer Verband, dessen Intervalle sämtlich die Eigenschaften* (A) *und* (B) *(siehe oben) besitzen, und es sei $O(z)=\infty$ und $H(z)<\infty$ für alle $z\in Z$ mit $z>0$ sowie*

$$1=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} x_\nu,\quad x_\nu\in Z\quad(\nu=1,2,\dots).$$

Dann gilt

$$1=\dot{\bigcup_{\nu=1}^{\infty}} z_\nu,\quad z_\nu\in Z\quad(\nu=1,2,\dots).$$

Beweis. Sezt man $a_\nu \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\nu=1}^{0} x_\nu$, so ist für jede natürliche Zahl n der Rang des Intervalls $a_{\nu+1}/0$ nach Definition des Ranges höchstens um 1 größer als der Rang von $a_n/0$. Infolgedessen können unter den Elementen a_ν $(\nu=1, \dots)$ Elemente b_ν $(\nu=1, \dots)$ mit $b_1 < b_2 < \dots$ so ausgewählt werden, daß für jede natürliche Zahl n der Verband $b_n/0$ den Rang n besitzt. Setzt man ferner

$$c_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup(x| \quad x \in Z,\ x^{(k)} \leqq b_n (k \geqq 0)),$$

so folgt aus

$$z \leqq c_n, \quad z \in Z, \quad z > 0$$

zunächst (weil z kompakt ist)

$$z \leqq \bigcup_{i=1}^{m} x_i, \quad x_i \in Z, \quad x_i^{(k_i)} \leqq b_n, \quad k_i \geqq 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

also wegen (4)

$$0 < z^{(k)} \leqq b_n,$$

wenn k das Maximum der ganzen Zahlen k_i $(i=1, \dots, m)$ bezeichnet, so daß z zu den Komponenten, aus denen c_n gebildet wurde, gehört. Für jede natürliche Zahl n folgt daraus erstens, daß $c_n/0$ ebenfalls den Rang n besitzt, weil sonst wenigstens ein Zyklus $z \leqq c_n$ mit $z > 0$ und $z \cap b_n = 0$ existieren müßte. Zweitens gilt für jeden Zyklus $u = c_n \cup z \in Z(1/c_\nu)$ mit $u > c_n$ $O_{c_n}(u) = \infty$, denn aus

$$u_{c_n}^{(k)} = c_n \cup z^{(k)} \leqq c_n \quad (k \geqq 1)$$

folgt $z^{(k)} \leqq c_n$, also $z^{(k+l)} \leqq b_n$ mit einer geeigneten ganzen Zahl $l \geqq 0$, woraus sich nach Definition von c_n $z \leqq c_n$ und damit $u = c_n$ ergibt. Insbesondere ist $O_{c_n}(u) = \infty$ für alle $u \in Z(c_{n+1}/c_n)$ mit $u > c_n$.

Auf den Verband $c_n/0$ mit festem n kann unmittelbar Hilfssatz 5 angewandt werden. Es gilt demnach

$$c_n = \dot{\bigcup_{\nu=1}^{n}} z_\nu, \quad z_\nu \in Z \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Auf Grund der Folgerung aus Hilfssatz 4 gilt $H(u) < \infty$ für alle $u \in Z(1/c_n)$ mit $u > c_n$, also insbesondere für alle $u \in Z(c_{n+1}/c_n)$ mit $u > c_n$, so daß Hilfssatz 5 auch auf den Verband c_{n+1}/c_n anwendbar ist. Danach existiert ein Zyklus $u_{n+1} = c_n \cup z_{n+1} \in Z(c_{n+1}/c_n)$ $(z_{n+1} \in Z)$ mit $u > c_n$, also $z_{n+1} \cap c_n = 0$, und

$$c_{n+1} = c_n \dot{\bigcup} z_{n+1} = \dot{\bigcup_{\nu=1}^{n+1}} z_\nu.$$

Da nach Konstruktion der Elemente c_ν $(\nu=1, \dots)$ $1 = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} c_\nu$ gilt, folgt

$$1 = \dot{\bigcup_{\nu=1}^{\infty}} z_\nu, \quad z_\nu \in Z \quad (\nu = 1, \dots).$$

Literatur

[1] . Fritzsche, Verallgemeinerung eines Satzes von Prüfer und Baer, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* **1** (1971), 155—161.

[2] R. Fritzsche und G. Richter, Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov II, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* **3** (1974), 161—165.

[3] A. Kertész, On independent sets of elements in algebra, *Acta Sci. Math. Szeged* **21** (1960), 260—269.

[4] A. Kertész, Vorlesungen über Artinsche Ringe, *Budapest*, 1968.

[5] A. Kertész, Zur Theorie der kompakt erzeugten modularen Verbände, *Publ. Math.* (Debrecen) **15** (1968), 1—11.

[6] Л. Я. Кулнков, Обобшенные примарные группы I, *Труды Моск. Мат. Общ.* **1** (1952), 247—326.

[7] G. Richter, Zur Theorie der zyklisch erzeugten modularen Verbände, *Diss. Halle* 1975.

[8] T. Szele—A. Kertész, Az általánosított p-csoportok elméletéhez, *Acta Univ. Debrecen* **2** (1955), 1—5.

(Eingegangen am 9. Juli 1975.)