Kurosch—Amitsur-Radikale in der universalen Algebra

von RAINER MLITZ (Wien)*

In memoriam Andor Kertész

1. Einleitung

Die klassische Kurosch—Amitsur-Radikaltheorie für Ringe, Algebren, Multioperatorgruppen und Halbgruppen wurde von HOEHNKE in [7] auf universale Algebren erweitert. Allerdings bilden die Hoehnke—Radikale im allgemeinen eine umfassendere Klasse als die Kurosch—Amitsur-Radikale und haben obendrein den Nachteil, durch Angabe der Klasse aller radikalen Algebren nicht eindeutig bestimmt zu sein.

In der vorliegenden Arbeit wird nun eine allgemeine Radikaltheorie für universale Algebren eingeführt, die für Multioperatorgruppen mit der Kurosch—Amitsur-Theorie übereinstimmt (s. etwa DIVINSKY [3]); die hier definierten Radikale werden deshalb im Folgenden kurz *KA-Radikale* genannt. Da bei der allgemeinen Definition jedoch ein KA-Radikal einer Algebra nicht unbedingt alle radikalen idealartigen Unterstrukturen auf ein Element zusammenzieht, erscheint es zweckmäßig, in manchen Fällen die Definition etwas einzuschränken und nur „kontrahierende" KA-Radikale zu betrachten. In allen Varietäten von Multioperatorgruppen ist jedes KA-Radikal kontrahierend; dasselbe gilt für alle Varietäten, die den von F. A. SZÁSZ und R. WIEGANDT in [11] angegebenen Bedingungen genügen; die KA-Radikale stimmen dort mit den in [11] definierten überein. Für Halbgruppen mit Null ist ebenfalls jedes KA-Radikal kontrahierend; die KA-Radikale in dieser Varietät sind Spezialfälle der von CLIFFORD in [2] angeführten; sie sind den von F. A. SZÁSZ in [10], R. WIEGANDT in [12] bzw. EQBAL AHMED und WIEGANDT in [5] angegebenen Radikalen sehr ähnlich. In der Varietät aller Halbgruppen ähneln die KA-Radikale den von Hoehnke in [7], S. 368 definierten; sie stimmen jedoch nicht mit diesen überein, da die von Hoehnke verwendete Relation M nur eine Teilrelation der hier gebrauchten ist. Sowohl für die allgemeinen als auch für die kontrahierenden KA-Radikale werden die KA-halbeinfachen und die KA-radikalen Klassen charakterisiert (eine Algebra A heißt R-halbeinfach für ein Radikal R, wenn $R(A)=0$, d. h. die Nullrelation ist; A heißt R-radikal, wenn $R(A)=1$, d. h. die Allrelation ist.). Die Anwendung einer in Arbeiten von WIEGANDT [13] bzw. FRIED und WIEGANDT [6] angegebenen allgemeinen Dualitätstheorie ergibt

* Der Autor dankt Herrn RICHARD WIEGANDT für die Anregung zu dieser Arbeit, die dieser ihm während seines Aufenthaltes in Wien im Oktober 1974 gegeben hat.

eine Galoisverbindung zwischen den homomorph abgeschlossenen und den hereditären Teilklassen der betrachteten Varietät $\mathscr{V}$, bei der unter gewissen Einschränkungen über $\mathscr{V}$ die abgeschlossenen Klassen genau die radikalen bzw. halbeinfachen Klassen bezüglich der hereditären KA-Radikale auf $\mathscr{V}$ sind. Im letzten Abschnitt werden in Verallgemeinerung einer Arbeit von ANDRUNAKIEVIČ und RJABUCHIN [1] jene Modulklassen über universalen Algebren beschrieben, die KA-Radikale definieren.

2. Definition de KA-Radikale in beliebigen Varietäten

Im Folgenden bezeichne $\mathscr{V}$ eine Varietät universaler Algebren, $\mathscr{C}(A)$ den Kongruenzverband der Algebra A, A^2 das cartesische Produkt von A mit sich selbst.

2.1 *Definition.* Sei $\varrho\in\mathscr{C}(A)$; eine Teilalgebra T von A heiße *maximale ϱ-Algebra in A*, wenn T maximale, in einer ϱ-Kongruenzklasse enthaltene Teilalgebra von A ist (d. h. maximal bezüglich der Eigenschaft $T^2\subseteq\varrho$); T heiße *ausgezeichnet*, wenn es in $\mathscr{C}(A)$ ein ϱ gibt, für das T maximale ϱ-Algebra in A ist.

Wie leicht zu überprüfen ist, sind die ausgezeichneten Teilalgebren in einer beliebigen Varietät von Multioperatorgruppen bzw. von Halbgruppen mit Null genau die Ideale, in der Varietät der distributiven Verbände genau die konvexen Teilverbände. Die Frage nach der Existenz ausgezeichneter Teilalgebren in beliebigen Varietäten beantwortet das folgende Lemma.

2.2 **Lemma.** *Sei $\mathscr{V}$ eine beliebige Varietät universaler Algebren, A eine Algebra aus $\mathscr{V}$ und ϱ ein Element von $\mathscr{C}(A)$. Notwendig und hinreichend für die Existenz einer maximalen ϱ-Algebra in A ist, daß mindestens eine der ϱ-Kongruenzklassen von A eine Teilalgebra von A enthält.*

BEWEIS. Die Notwendigkeit der Bedingung ist trivial. Sei also $\bar{a}$ eine ϱ-Kongruenzklasse von A, die mindestens eine Teilalgebra von A enthält. Ist K eine bezüglich der Inklusion geordnete Kette von Teilalgebren B_i $(i\in I)$ von A mit $B_i\subseteq\bar{a}$ für alle $i\in I$ und ist B die von den B_i erzeugte Teilalgebra von A, so liegt auch B in $\bar{a}$, wie man leicht zeigen kann, wenn man berücksichtigt, daß jedes Element aus B ein Wort endlicher Länge mit Buchstaben aus den B_i ist. Das Lemma von Zorn liefert nun den Rest des Beweises.

2.3 Folgerung. 1. *Jede Algebra, die mindestens eine einelementige Teilalgebra enthält, besitzt zu jeder ihrer Kongruenzen ϱ mindestens eine maximale ϱ-Algebra.*

2. *Jede ϱ-Kongruenzklasse, die eine maximale ϱ-Algebra in A einer Algebra A enthält, muß mit dieser übereinstimmen.* In einer halbausgearteten Varietät mit mehreren nullstelligen Operationen gibt es also, wie etwa die Beispiele der Ringe mit Einselement und der Verbände mit 0 und 1 zeigen, im allgemeinen nicht zu jeder Kongruenz ϱ aus $\mathscr{C}(A)$ eine maximale ϱ-Algebra in A.

Es erscheint nun natürlich, eine Verallgemeinerung der KA-Radikale von Multioperatorgruppen auf universale Algebren dadurch zu versuchen, daß man anstelle der Ideale ausgezeichnete Teilalgebren und die zugehörigen Kongruenzen verwendet. Je nachdem, ob man dabei die Rolle der Ideale als Kerne der Kongruenzen oder als ausgezeichnete Teilalgebren hervorhebt, ergeben sich dabei verschiedene Definitionen. Die zunächst am natürlichsten erseheinende, sich aber bald als im allgemeinen zu stark erweisende Definition ist die folgende:

2.4 *Definition.* Sei R eine Abbildung, die jeder Algebra A der Varietät $\mathscr{V}$ eine Kongruenz $R(A)$ aus $\mathscr{C}(A)$ zuordnet. R heiße eine *starke* KA-*Radikaldefinition* auf $\mathscr{V}$ und $R(A)$ ein *starkes* KA-*Radikal* von A, wenn R die folgenden vier Bedingungen erfüllt:

1. $\varphi R(A) \subseteqq R(\varphi A)$ für jeden auf A definierten Homomorphismus φ (dabei sei φ auf A^2 komponentenweise definiert);
2. $R(A/R(A))=0$;
3. es existiert eine maximale $R(A)$-Algebra T in A mit $R(T)=1$;
4. gibt es zu $\varrho \in \mathscr{C}(A)$ eine maximale ϱ-Algebra T in A mit $R(T)=1$, so liegt ϱ in $R(A)$.

(Die Bedingungen 1. und 2. sind dabei genau Hoehnkes Radikaldefinition aus [7].)

Wie sich herausstellt, haben jedoch die starken KA-Radikale den Nachteil, daß jede bezüglich eines solchen Radikals halbeinfache Algebra mindestens eine einelementige Teilalgebra besitzen muß, woraus wiederum folgt, daß es für beliebige Algebren der betrachteten Varietät mindestens eine $R(A)$-Kongruenzklasse geben muß, die Teilalgebra von A ist; es wären also etwa alle einfachen Algebren ohne einelementige Teilalgebra radikal. Daher erscheint es günstiger, die Verallgemeinerung auf dem Weg über die von Hoehnke definierten M-Radikale zu suchen.

2.5 *Definition.* (Siehe [7], S. 365) Sei M eine auf der Varietät $\mathscr{V}$ erklärte binäre Relation; für jede Teilklasse $\mathscr{S}$ von $\mathscr{V}$ bezeichne $\mathscr{S}^r$ die Klasse jener Algebren aus $\mathscr{V}$, die kein nichteinelementiges homomorphes Bild in $\mathscr{S}$ besitzen. Eine Teilklasse $\mathscr{M}$ von $\mathscr{V}$ heißt *M-Klasse*, wenn gilt:
$A \in \mathscr{M}$ genau dann, wenn $B \notin \mathscr{M}^r$ für alle $B \in \mathscr{V}$ mit $(A, B) \in M$.

Ein Radikal R auf $\mathscr{V}$ heißt ein *M-Radikal*, wenn die Klasse $\mathscr{F}(R)$ aller R-halbeinfachen Algebren aus $\mathscr{V}$ eine M-Klasse ist (dabei bedeutet „Radikal" ein Radikal im Sinn Hoehnkes).

Im Folgenden sei M auf $\mathscr{V}$ so definiert: $(A, B) \in M$ genau dann, wenn B eine nicht einelementige ausgezeichnete Teilalgebra von A ist.

2.6 *Definition.* Ein Radikal R im Sinn Hoehnkes auf $\mathscr{V}$ heiße ein KA-*Radikal*, wenn R ein M-Radikal bezüglich der oben angegebenen Relation M ist.

Als M-Radikal ist nach [7], Satz 28 jedes KA-Radikal nicht nur durch Angabe der Klasse aller R-halbeinfachen Algebren in $\mathscr{V}$, sondern auch schon durch Angabe der Klasse aller R-radikalen Algebren eindeutig bestimmt.

2.7 **Satz.** I. *Eine Abbildung R, die jeder Algebra A der Vorietät $\mathscr{V}$ eine Kongruenz $R(A)$ aus $\mathscr{C}(A)$ zuordnet, definiert genau dann ein* KA-*Radikal auf $\mathscr{V}$, wenn gilt:*

1. $\varphi R(A) \subseteqq R(\varphi A)$ *für jeden auf A definierten Homomorphismus φ;*
2. $R(A/R(A))=0$;
3. $R(A)=0$ *genau dann, wenn es in A keine nicht einelementige ausgezeichnete Teilalgebra B gibt mit $R(B)=1$.*

II. *Eine Teilklasse* $\mathscr{F}$ *von* $\mathscr{V}$ *ist genau dann die Klasse aller R-halbeinfachen Algebren aus* $\mathscr{V}$ *für ein* KA-*Radikal* R, *wenn gilt:*

a. $\mathscr{F}$ *ist abgeschlossen gegenüber subdirekten Produkten;*
b. $\mathscr{F}$ *ist eine* M-*Klasse.*

III. *Eine Teilklasse* $\mathscr{T}$ *von* $\mathscr{V}$ *ist genau dann die Klasse aller* R-*radikalen Algebren aus* $\mathscr{V}$ *für ein* KA-*Radikal* R, *wenn gilt:*

A. $\mathscr{T}$ *ist homomorph abgeschlossen;*
B. *gibt es zu jedem nicht einelementigen homomorphen Bild* φA *von* A *ein* B *aus* $\mathscr{T}$ *mit* $(\varphi A, B) \in M$, *so folgt* $A \in \mathscr{T}$
C. *die Klasse* $\mathscr{T}^f = \{A \in \mathscr{V} / (A, B) \in M \Rightarrow B \notin \mathscr{T}\}$ *ist abgeschlossen gegenüber subdirekten Produkten.*

Beweis. II. und III. folgen aus den allgemeinen Sätzen über M-Radikale aus [7], S. 366 unter Berücksichtigung der Reflexivität von M; die Äquivalenz von 1. und 2. mit a. gilt allgemein für Hoehnke-Radikale, die von 3. mit b. ist leicht zu überprüfen.

Wie aus der Konstruktion ersichtlich ist, werden im Gegensatz zu [7] wie bei der klassischen Radikaltheorie für Multioperatorgruppen die einelementigen Algebren sowohl zu den halbeinfachen als auch zu den radikalen Klassen gezählt. Im klassischen Fall der Multioperatorgruppengilt $(A, B) \in M$ genau dann, wenn B ein vom Nullideal verschiedenes Ideal von A ist; man überprüft leicht, daß in diesem Fall die hier definierten KA-Radikale mit den klassischen Kurosch—Amitsur-Radikalen übereinstimmen, deren Definition man etwa im Buch von Divinsky [3] findet.

3. Kontrahierende KA-Radikale

Für jedes Kurosch—Amitsur-Radikal R über einer Varietät $\mathscr{V}$ von Multioperatorgruppen gilt, daß bei Faktorisierung einer Multioperatorgruppe G aus $\mathscr{V}$ nach $R(G)$ alle R-radikalen Ideale von G auf das Nullideal abgebildet werden. Da jedoch in beliebigen Varietäten universaler Algebren nicht jeder auf einer Algebra A definierte Homomorphismus φ jede ausgezeichnete Teilalgebra von A in eine ausgezeichnete Teilalgebra von φA überführt, wird im allgemeinen nicht jede R-radikale ausgezeichnete Teilalgebra von A bei Faktorisierung nach $R(A)$ auf ein Element zusammengezogen.

3.1 *Definition.* Ein KA-Radikal R auf einer Varietät $\mathscr{V}$ heißt *kontrahierend*, wenn für alle A aus $\mathscr{V}$ bei Faktorisierung nach $R(A)$ jede R-radikale ausgezeichnete Teilalgebra auf eine (trivialerweise ausgezeichnete) einelementige Teilalgebra von $A/R(A)$ abgebildet wird.

3.2 **Satz.** I. *Eine Abbildung, die jeder Algebra* A *einer Varietät* $\mathscr{V}$ *eine Kongruez* $R(A)$ *aus* $\mathscr{C}(A)$ *zuordnet, definiert genau dann ein kontrahierendes* KA-*Radikal auf* $\mathscr{V}$, *wenn gilt:*

1. $\varphi R(A) \subseteq R(\varphi A)$ *für jeden auf* A *definierten Homomorphismus* φ;
2. $R(A/R(A)) = 0$;

3. *gibt es keine nicht einelementige ausgezeichnete Teilalgebra B in A mit $R(B)=1$, so gilt $R(A)=0$;*
4. *ist B eine ausgezeichnete Teilalgebra von A mit $R(B)=1$, so liegt B^2 in $R(A)$.*

II. *Eine Teilklasse $\mathscr{F}$ von $\mathscr{V}$ ist genau dann die Klasse aller* R-*halbeinfachen Algebren aus $\mathscr{V}$ für ein kontrahierendes* KA-*Radikal R, wenn gilt:*

a. *$\mathscr{F}$ ist abgeschlossen gegenüber subdirekten Produkten;*
b. *liegt keine ausgezeichnete Teilalgebra von A in $\mathscr{F}^r$, so liegt A in $\mathscr{F}$:*
c. *ist $B\in\mathscr{F}^r$ eine ausgezeichnete Teilalbegra von A, so ist φB einelementig für jeden Homomorphismus φ, der A auf eine Algebra φA aus $\mathscr{F}$ abbildet.*

III. *Eine Teilklasse $\mathscr{T}$ von $\mathscr{V}$ ist genau dann die Klasse aller* R-*radikalen Algebren aus $\mathscr{V}$ für ein kontrahierendes* KA-*Radikal* R, *wenn gilt:*

A. *$\mathscr{T}$ ist homomorph abgeschlossen;*
B. *gibt es zu jedem nicht einelementigen homomorphen Bild φA von A ein B aus $\mathscr{T}$ mit $(A, B)\in M$, so folgt $A\in\mathscr{T}$;*
C. *ist $B\in\mathscr{T}$ eine ausgezeichnete Teilalgebra von A, so folgt, daß φB einelementig ist, für jeden Homomorphismus φ, der A auf ein Element von $\mathscr{T}^f$ abbildet.*

Beweis. I. ist direkt aus der Definition der kontrahierenden KA-Radikale abzuleiten; 1. und 2. ist wie in 2.7 zu a. äquivalent, die Äquivalenz von 3. mit b. und 4. mit c. ist klar. Es bleibt somit nur mehr III. zu zeigen. Sei $\mathscr{T}$ eine beliebige Klasse in $\mathscr{V}$, die A., B. und C. genügt; ferner sei P subdirektes Produkt der Algebren P_i aus $\mathscr{T}^f$ und Q eine ausgezeichnete Teilalgebra von P mit $Q\in\mathscr{T}$. Unter diesen Voraussetzungen folgt laut C., daß alle Projektionen von Q einelementig sind und daher Q selbst einelementig sein muß. P liegt daher in $\mathscr{T}^f$ und $\mathscr{T}^f$ ist subdirekt abgeschlossen; wegen A. und B. definiert also jede solche Klasse $\mathscr{T}$ als Klasse aller R-radikalen Algebren aus $\mathscr{V}$ ein KA-Radikal auf $\mathscr{V}$ und es bleibt nur zu zeigen, daß die gegenüber 2.7 verschärften Bedingungen c. und C. einander entsprechen, was leicht einzusehen ist, wenn man berücksichtigt, daß für die radikale Klasse $\mathscr{T}$ und die halbeinfache Klasse $\mathscr{F}$ eines jeden M-Radikals gilt: $\mathscr{T}=\mathscr{F}^r$ und $\mathscr{F}=\mathscr{T}^f$ (siehe [7]).

Natürlich ist jedes starke KA-Radikal kontrahierend; die Bedingungen für kontrahierende KA-Radikale sind im allgemeinen jedoch wesentlich schwächer als die für die starken KA-Radikale, was man zum Beispiel daran erkennt, daß eine einfache Algebra ohne einelementige Teilalgebren bezüglich eines kontrahierenden KA-Radikals auch halbeinfach sein kann. Andererseits sind die Bedingungen für kontrahierende KA-Radikale noch stark genug, um gewisse Erweiterungseigenschaften nach sich zu ziehen:

3.3 *Definition.* Sei B eine ausgezeichnete Teilalgebra von A und sei ϱ der Durchscnitt aller Kongruenzen τ von A, für die B eine maximale τ-Algebra in A ist. Gilt dann $A/\varrho=C$, so heißt A die minimale Erweiterung von C durch B.

3.4 **Satz.** *Die radikalen Klassen bezüglich der kontrahierenden* KA-*Radikale sind abgeschlossen gegenüber minimalen Erweiterungen;* d. h.: *ist A minimale Erweiterung von C durch B und liegen B und C in der radikalen Klasse bezüglich eines kontrahierenden* KA-*Radikals, so ist auch A radikal bezüglich dieses Radikals.*

BEWEIS. Sei $\mathscr{T}$ eine radikale Klasse bezüglich eines kontrahierenden KA-Radikals, seien B und C aus $\mathscr{T}$ und A minimale Erweiterung von C durch B, $C=A/\varrho$. Wegen $B\in\mathscr{T}$ ist φB einelementig für alle Homomorphismen φ, die A auf eine radikalfreie Algebra abbilden; B liegt also für jedes solche φ in einer Kongruenzklasse bezüglich der zugehörigen Kongruenz Θ_φ, woraus folgt, daß B maximal in einer $(\Theta_\varphi\cap\varrho)$-Klasse liegt. Daher ist ϱ in Θ_φ enthalten und es gilt nach dem Isomorphiesatz daß $(A/\varrho)/(\Theta_\varphi/\varrho)$ isomorph zu A/Θ_φ ist. Wegen $A/\varrho=C\in\mathscr{T}$ und der homomorphen Abgeschlossenheit von $\mathscr{T}$ folgt daraus, daß φA in $\mathscr{T}$ liegt, was nur für $\Theta_\varphi=A^2$ möglich ist, da φA laut Voraussetzung in $\mathscr{T}^f$ liegen sollte. A ist daher Element von $\mathscr{T}=\mathscr{T}^{fr}$.

In der Varietät der Halbgruppen bedeutet der eben gezeigte Satz, daß die radikalen Klassen bezüglich der kontrahierenden KA-Radikale abgeschlossen gegenüber Rees—Erweiterungen sind.

4. Die Anwendung einer Galoisverbindung aus der allgemeinen Radikaltheorie

4.1 Die folgende, in den Arbeiten [6] und [13] dargestellte allgemeine Theorie gestattet uns die Konstruktion einer Galoisverbindung zwischen den homomorph abgeschlossenen und gewissen, den M-Klassen ähnlichen Teilklassen von $\mathscr{V}$: Sei $\mathscr{A}$ eine Klasse von Objekten mit den Halbordnungen $\rightarrow$ und $\prec$; dann heiße eine Teilklasse $\mathscr{B}$ von $\mathscr{A}$

1. eine C-Klasse wenn gilt: $A\in\mathscr{B}$ genau dann, wenn es zu jedem $B\in\mathscr{A}$ mit $A\rightarrow B$ ein $C\in\mathscr{B}$ gibt mit $C\prec B$;
2. eine D-Klasse wenn die dazu duale Bedingung gilt: $A\in\mathscr{B}$ genau dann, wenn es zu jedem $B\in\mathscr{A}$ mit $B\prec A$ ein $C\in\mathscr{B}$ gibt mit $B\rightarrow C$;
3. *hereditär*, wenn aus $A\in\mathscr{B}$ und $B\prec A$ folgt: $B\in\mathscr{B}$;
4. *koheredität*, wenn aus $A\in\mathscr{B}$ und $A\rightarrow B$ folgt: $B\in\mathscr{B}$.

Für jede hereditäre Klasse $\mathscr{H}$ sei $\mathscr{C}\mathscr{H}=\{A\in\mathscr{A}/A\rightarrow B\Rightarrow B\notin\mathscr{H}\}$; für jede koherediäre Klasse $\mathscr{K}$ sei $\mathscr{D}\mathscr{K}=\{A\in\mathscr{A}/B\prec A\Rightarrow B\notin\mathscr{K}\}$.

Unter diesen Definitionen gilt: die Abbildungen $\mathscr{H}\rightarrow\mathscr{C}\mathscr{H}$ und $\mathscr{K}\rightarrow\mathscr{D}\mathscr{K}$ bilden eine Galoisverbindung zwischen den hereditären und den kohereditären Klassen in $\mathscr{A}$ bei der die abgeschlossenen Elemente genau die C- bzw. D-Klassen sind.

Da im allgemeinen nicht jedes KA-Radikal hereditär in dem Sinne ist, daß die zugehörige halbeinfache Klasse mit einer Algebra A auch alle ausgezeichneten Teilalgebren von A enthält, wie etwa das Beispiel der nicht notwendigerweise assoziativen Ringe zeigt (siehe LEAVITT—ARMENDARIZ [8]), darf im allgemeinen nicht erwartet werden, daß bei dieser Galoisverbindung alle KA-halbeinfachen und alle KA-radikalen Klassen abgeschlossen sind, wie dies etwa bei den assoziativen Ringen der Fall ist (siehe [4]).

4.2 *Definition.* Eine Klasse $\mathscr{S}$ von Algebren aus $\mathscr{V}$ heiße *hereditär*, wenn aus $A\in\mathscr{S}$ und $(A, B)\in M$ folgt: $B\in\mathscr{S}$; ein KA-Radikal heiße *hereditär*, wenn die zugehörige halbeinfache Klasse hereditär ist. Die Relation M^* sei auf $\mathscr{V}$ folgendermaßen definiert: $(A, B)\in M^*$ genau dann wenn es eine endliche Kette $A=U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n=B$ mit $(U_i, U_{i+1})\in M$ für $i=0, \ldots, n-1$ gibt.

4.3 Ersetzt man nun in der bereits angeführten Konstruktion aus [6] bzw. [13] „$A \to B$" durch „B ist ein nicht einelementiges homomorphes Bild von A" und „$B \prec A$" durch „$(A\ B) \in M^*$", so ist für „hereditär" die in 4.2 angegebene Definition zu nehmen und „kohereditär" durch „homomorph abgeschlossen" zu ersetzen und es ergibt sich eine Galoisverbindung $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ zwischen den hereditären und den homomorph abgeschlossenen Teilklassen von $\mathscr{V}$, für die gilt:

1. *eine Teiklasse $\mathscr{C}$ von $\mathscr{V}$ ist genau dann* C-*Klasse, also eine abgeschlossene homomorph abgeschlossene Klasse, wenn gilt: $A \in \mathscr{C}$ genau dann, wenn es zu jedem nicht einelementigen homomorphen Bild φA von A eine Algebra B aus $\mathscr{C}$ gibt mit $(\varphi A, B) \in M^*$;*
2. *eine Teilklasse $\mathscr{D}$ von $\mathscr{V}$ ist genau dann* D-*Klasse, also eine abgeschlossene hereditäre Klasse, wenn gilt: $A \in \mathscr{D}$ genau dann, wenn für jede Algebra B mit $(A, B) \in M^*$ gilt: $B \in \mathscr{D}$.* Wie man leicht überprüft, sind also die D-Klassen genau die hereditären M-Klassen.

4.4 **Lemma.** *Für jede Varietät universaler Algebren gilt: jede bezüglich eines hereditären* KA-*Radikals halbeinfache Klasse in $\mathscr{V}$ ist eine* D-*Klasse, jede bezüglich eines solchen Radikals radikale Klasse in $\mathscr{V}$ eine* C-*Klasse.*

Beweis. Die Behauptung für die halbeinfachen Klassen folgt daraus, daß diese hereditäre M-Klassen sind. Ist $\mathscr{T}$ die radikale Klasse bezüglich eines hereditären KA-Radikals, so gilt $\mathscr{T} = \mathscr{F}^r$ für die entsprechende halbeinfache Klasse $\mathscr{F}$, d. h. $\mathscr{T} = \mathscr{C}\mathscr{F}$ für die D-Klasse $\mathscr{F}$, wobei $\mathscr{C}$ die eine Abbildung der Galoisverbindung $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ bezeichnet; $\mathscr{T}$ ist daher abgeschlossen.

4.5 **Satz.** *Genau dann stimmen in einer Varietät $\mathscr{V}$ die* C-*Klassen mit den radikalen und die* D-*Klassen mit den halbeinfachen Klassen bezüglich der hereditären* KA-*Radikale auf $\mathscr{V}$ überein, wenn in $\mathscr{V}$ jede hereditäre* M-*Klasse abgeschlossen gegenüber subdirekten Produkten ist.*

Beweis. Unter den angegebenen Bedingungen ist klarerweise jede D-Klasse eine hereditäre KA-halbeinfache Klasse; gibt es jedoch in $\mathscr{V}$ eine hereditäre M-Klasse $\mathscr{H}$, die nicht subdirekt abgeschlossen ist, so ist diese wohl eine D-Klasse, jedoch keine KA-halbeinfache Klasse. Der Beweis für die radikalen Klassen ergibt sich wieder aus der Beziehung $\mathscr{C}\mathscr{H} = \mathscr{H}^r$ für jede hereditäre und $\mathscr{T} = \mathscr{F}^r$ für jede radikale Klasse.

4.6 *Spezialfälle.* Führt in einer Varietät $\mathscr{V}$ jeder auf einer beliebigen Algebra A aus $\mathscr{V}$ definierte Homomorphismus φ jede ausgezeichnete Teilalgebra von A in eine ausgezeichnete Teilalgebra von φA über, so zeigt man leicht, daß jede M-Klasse in $\mathscr{V}$ subdirekt abgeschlossen ist. Die angegebene Galoisverbindung liefert daher genau die halbeinfachen und die radikalen Klassen bezüglich der hereditären KA-Radikale auf $\mathscr{V}$. Das gilt also speziell in allen Varietäten von Multioperatorgruppen, von Halbgruppen mit Null oder von distributiven Verbänden.

5. Moduldarstellungen von KA-Radikalen

Legt man die folgenden, aus [9] entnommenen Definitionen zugrunde, so erhält man für KA-Radikale universaler Algebren eine Moduldarstellung, die jener von Andrunakievič und Rjabuchin für Ringe entspricht (siehe [1]).

5.1 *Definition.* 1. Sei A eine universale Algebra der Varietät $\mathscr{V}'=\mathscr{V}(\Omega', \Lambda')$ mit einem nicht nur aus null- und einstelligen Operationen bestehenden System Ω'; π sei eine beliebige $(\mu+1)$-stellige Operation aus Ω' mit $\mu>0$ $\Omega=\Omega'\setminus\{\pi\}$, Λ die Menge jener Gesetze aus Λ', in denen π nicht auftritt. Eine Algebra M aus $\mathscr{V}=\mathscr{V}(\Omega, \Lambda)$ heißt ein A-*Linksmodul*, wenn eine Operation $\pi: A\times M^{\mu}\to M$ definiert ist, die alle Gesetze (v, w) aus $\Lambda'\setminus\Lambda$ erfüllt, wenn man die Buchstaben von v und w in sinnvoller Weise durch Elemente aus A und M ersetzt.

2. Die Kongruenz $\mathrm{Ann}_A M$, die aus allen jenen Paaren $(a, b)\in A^2$ besteht, für die gilt:

$$\pi(w(a, a_1, \ldots, a_s), m_1, \ldots, m_\mu) = \pi(w(b, a_1, \ldots, a_s), m_1, \ldots, m_\mu)$$

für alle $m_1, \ldots, m_\mu\in M$, alle $a_1, \ldots, a_s\in A$ und alle Wörter w, heißt der A-*Annulator des* A-*Linksmoduls* M.

3. Jeder Algebra $A\in\mathscr{V}'$ sei eine Klasse $K(A)$ von nicht einelementigen A-Linksmoduln zugeordnet; eine solche Auswahl $\mathscr{K}$ von Linksmoduln heißt eine *allgemeine Modulklasse*, wenn unter der Festsetzung $\pi(a, m_1, \ldots, m_\mu)=\pi(\varphi\alpha, m_1, \ldots \ldots, m_\mu)$

a. jeder Linksmodul aus $K(\varphi A)$ zu $\mathrm{K}(A)$ gehört für jeden auf A definierten Homomorphismus φ und

b. jeder Linksmodul M aus $K(A)$ zu $K(\varphi A)$ gehört für jeden auf A definierten Homomorphismus φ, dessen zugehörige Kongruenz in $\mathrm{Ann}_A M$ liegt.

In [9], Satz 2.3 wurde gezeigt, daß für jede allgemeine Modulklasse $\mathscr{K}$ über einer Varietät $\mathscr{V}'$ durch $R_{\mathscr{K}}(A)=\bigcap_{K(A)} \mathrm{Ann}_A M$ ein Hoehnke-Radikal auf $\mathscr{V}'$ definiert wird. Die KA-Radikale unter diesen durch Moduln definierten Radikalen können wie folgt charakterisiert werden:

5.2 **Satz.** *Ein durch eine allgemeine Modulklasse $\mathscr{K}$ definiertes Hoehnke-Radikal $R_{\mathscr{K}}$ auf der Varietät $\mathscr{V}'$ ist genau dann ein* KA-*Radikal, wenn es die folgende Bedingung erfüllt: $R_{\mathscr{K}}(A)=0$ genau dann, wenn es zu jeder nicht einelementigen ausgezeichneten Teilalgebra B von A einen B-Linksmodul P in $K(B)$ gibt mit* $\mathrm{Ann}_B P\neq 1$.

Der Beweis ergibt sich leicht aus 2.7.I.3.

5.3 Folgerung. Da, wie in [9].5.11 gezeigt wurde, alle Hoehnke-Radikale für — nicht notwendigerweise assoziative — Ringe durch allgemeine Modulklassen definiert werden können, erhält man durch die allgemeinen Modulklassen über der Varietät aller Ringe auch alle KA-Radikale über dieser Varietät; die Resultate von Andrunakievič und Rjabuchin aus [1] bleiben also auch für nichtassoziative Ringe gültig. Sie gelten darüber hinaus sogar für alle Halbgruppen und alle Verbände, wie sich ebenfalls aus Satz 5.2 und [9].5.11 ergibt.

Literatur

[1] В. А. Андрунакиевич—Ю. М. Рябухин, Модули и радикалы, Докл. АН СССР, серия матем. **156** (1964), 991—994. Engl. Übersetzung: *Soviet Math. Dokl.* **5** (1964), 728—732.

[2] A. H. Clifford, Radicals in semigroups; *Semigroup Forum* **1** (1970), 103—127.

[3] N. J. Divinsky, Rings and radicals; *Toronto*, 1965.

[4] N. J. Divinsky, Duality between radical and semisimple classes of associative rings; *Scripta Math.* **29** (1973), 409—416.

[5] Eqbal Ahmed—R. Wiegandt, On low erradicals of semigroups; *Math. Nachr.* **57** (1973), 163—167.

[6] E. Fried—R. Wiegandt, Connectednesses and disconnectednesses of graphs; *Algebra Universalis, im Druck*.

[7] H.-J. Hoehnke, Radikale in allgemeinen Algebren; *Math. Nachr.* **32** (1966), 347—383.

[8] W. G. Leavitt—E. P. Armendariz, Nonhereditary semisimple classes; *Proc. A. M. S.* **18** (1967), 1114—1117.

[9] Р. Млитц, Модули и радикалы универсальных алгебр; *Извесуик Вузов, серия математическая*, 1977, № 3.

[10] F. A. Szász, On radicals of semigroups with zero I; *Proc. Japan. Acad.* **46** (1970), 595—598.

[11] F. A. Szász—R. Wiegandt, On the duality of radical and semisimple objects in categories; *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **21** (1970), 175—182.

[12] R. Wiegandt, On the structure of lower radical semigroups; *Czechosl. Math. J.* **22** (97) (1972), 1—6.

[13] R. Wiegandt, A condition in general radical theory and its meaning for rings, topological spaces and graphs; *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **26** (1975), 233—240.

DR. RAINER MLITZ
INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT
A-1040 WIEN
GUßHAUSSTRAßE 27—29.

(Eingegangen am 9. Juli 1975.)