Eine Abschätzung für das Infimum des Spektrums des Hillschen Differentialoperators

Von E. MÜLLER-PFEIFFER (Erfurt)

Über die Koeffizienten der quadratischen Form

$$A_0[y, y] = \int_{-\infty}^{+\infty} (p(x)|y'|^2 + q(x)|y|^2)\,dx, \quad y \in D[A_0] = C_0^\infty(-\infty, +\infty), \text{ [1]} \tag{1}$$

werden folgende Voraussetzungen gemacht:
1.) $p(x)$ und $q(x)$ sind auf der x-Achse reelle Funktionen, die die Periode ω besitzen.
2.) $p(x)$ ist stetig und nicht negativ. $q(x)$ ist nach unten beschränkt und auf $(0, \omega)$ summierbar [2]. $p^{-1}(x)$ ist auf $(0, \omega)$ ebenfalls summierbar.

Der durch die abschließbare Form $A_0[y, y]$ eindeutig definierte selbstadjungierte Operator wird mit A bezeichnet. Im folgenden wird das Infimum λ_0 des Spektrums des nach unten halbbeschränkten Operators A abgeschätzt. Was bekannte Abschätzungen dieser Art betrifft, so sei auf diejenige von T. KATO für $p(x) \equiv 1$ (vergl. [2], [1, S. 90])

$$\mu - \frac{1}{16}\Big(\int_0^\omega |q(x) - \mu|\,dx\Big)^2 \leqq \lambda_0 \leqq \mu, \quad \mu = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega q(x)\,dx, \tag{2}$$

und für variables $p(x)$ auf diejenige von EASTHAM [1, S. 90]

$$\mu - \frac{1}{16M}\Big(\int_0^\omega |q(x) - \mu|\,dx\Big)^2 \leqq \lambda_0 \leqq \mu, \quad M = \inf p(x), \tag{3}$$

hingewiesen. Diese Abschätzungen sind solchen Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ gut angepaßt, bei denen die Subtrahenden auf der linken Seite „klein" ausfallen. Es ist unser Anliegen, die Abschätzungen (2) und (3) durch eine Abschätzung zu ergänzen, die im gegenteiligen Falle (insbesondere für kleine M und $M=0$) vorteilhafter ist.

[1] $C_0^\infty(-\infty, +\infty)$ ist die Menge der auf der x-Achse beliebig oft differenzierbaren (komplexwertigen) Funktionen mit kompaktem Träger.

[2] In der Bemerkung 2 wird darauf hingewiesen, daß man auch Funktionen $q(x)$ betrachten kann, die nicht nach unten beschränkt sind.

Lemma. *Die Form* (1) *ist abschließbar.*

BEWEIS. Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_A$ die Normen des HILBERTraumes $L_2(-\infty, +\infty)$ bzw. des durch die Form (1) definierten HILBERTraumes H_A,

$$\|y\|_A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(p(x)|y'|^2+(q(x)-q_0+1)|y'|^2\right) dx, \quad q_0 = \inf q(x).$$

Im folgenden wird gezeigt, daß eine $\|\cdot\|_A$-Fundamentalfolge $\{y_\nu\}_{\nu=1,2,\dots}$, $y_\nu \in D[A_0]$, die $\|\cdot\|$-Nullfolge ist, sich auch als $\|\cdot\|_A$-Nullfolge erweist [3, S. 315]. Es gelte also $\|y_\nu - y_{\nu'}\|_A \to 0$ für $\nu, \nu' \to \infty$. Wenn dann für ein ε, $0<\varepsilon<1$,

$$G_\varepsilon = \{x | \varepsilon < p(x)\}$$

gesetzt wird[3]), folgt aus der Abschätzung

$$\|y\|_{A,(G_\varepsilon)}^2 = \int_{G_\varepsilon} \left(p(x)|y'|^2+(q(x)-q_0+1)|y|^2\right) dx \geqq \varepsilon \int_{G_\varepsilon} |y'|^2 dx,$$

daß $\{y_\nu'\}_{\nu=1,2,\dots}$ in $L_2(G_\varepsilon)$ eine Fundamentalfolge ist. Da $\{y_\nu\}_{\nu=1,2,\dots}$ in $L_2(G_\varepsilon)$ eine Nullfolge ist, folgt aus

$$\int_{G_\varepsilon} \varphi \cdot y_\nu' \, dx = -\int_{G_\varepsilon} \varphi' y_\nu \, dx, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

wobei der Träger von $\varphi(x) \in C_0^\infty(-\infty, +\infty)$ in eine beliebige Komponente der offenen Menge G_ε gelegt wird, daß y_ν' für $\nu \to \infty$ in $L_2(G_\varepsilon)$ gegen das Nullelement strebt. Mit

$$G_\varepsilon' = \{x | \varepsilon < p(x) \text{ und } q(x)-q_0+1 < \varepsilon^{-1}\}$$

folgt dann, wenn $\sup p(x) < \varepsilon^{-1}$ gilt,

$$\|y_\nu\|_{A,(G_\varepsilon')}^2 \leqq \varepsilon^{-1} \Big[\int_{G_\varepsilon'} (|y_\nu'|^2 + |y_\nu|^2) \, dx \Big] \to 0, \quad \nu \to \infty. \tag{4}$$

Nimmt man im Sinne eines indirekten Beweises an, daß eine Teilfolge $\{y_{\nu_j}\}_{j=1,2,\dots}$ derart existiert, daß

$$\|y_{\nu_j}\|_A \geqq \delta > 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

gilt, so folgt wegen (4), wenn $\omega_\varepsilon = (-\infty, +\infty) \setminus G_\varepsilon'$ gesetzt wird,

$$\|y_{\nu_j}\|_{A,(\omega_\varepsilon)} \geqq \frac{\delta}{2}, \quad j \geqq j_1(\varepsilon), \tag{5}$$

für ein hinreichend großes $j_1(\varepsilon)$. In der Abschätzung

$$\|y_{\nu_j}\|_{A,(\omega_\varepsilon)} \geqq \|y_{\nu_i}\|_{A,(\omega_\varepsilon)} - \|y_{\nu_i} - y_{\nu_j}\|_{A,(\omega_\varepsilon)}, \tag{6}$$

ist der Subtrahend unabhängig von ε nicht größer als $\delta/4$, wenn $i, j \geqq j_2(\delta)$ gewählt

[3]) G_ε ist im Falle $\varepsilon < \sup p(x)$ Vereinigung von abzählbar vielen offenen Intervallen.

werden. Wird schließlich $i \geqq \max(j_1, j_2)$ gesetzt, so folgt aus (6) in Verbindung mit (5), daß unabhängig von ε die Abschätzung

$$\|y_{\nu_j}\|_{A,(\omega_\varepsilon)} \geqq \frac{\delta}{4}, \quad j \geqq j_2(\delta), \tag{7}$$

gilt. Die Abschätzung (7) führt mit einer festen Funktion y_{ν_j}, $j \geqq j_2(\delta)$, zum Widerspruch, wenn $\varepsilon \to 0$ strebt. So liegt der Träger der Funktion y_{ν_j} auf einem endlichen Intervall J, wo nach Voraussetzung $p^{-1}(x)$ und $q(x)$ summierbar sind, womit schließlich folgt, daß $\|y_{\nu_j}\|_{A,(\omega_\varepsilon)}$ mit $\varepsilon \to 0$ gegen Null strebt im Widerspruch zur Abschätzung (7).

Durch Abschließung von $A_0[y, y]$, $D[A_0]$, entstehe die Form $A[y, y]$, $D[A]$, welche den Hillschen Differentialoperator A, $D(A)$, definiert [3, S. 322]. Wir setzen zunächst voraus, daß

$$\inf_{0 \leqq x < \omega} q(x) = 0 \tag{8}$$

gilt. Das Infimum λ_0 des Spektrums von A ist dann nicht negativ. Es gilt nun folgender

Satz 1. *Mit den Bezeichnungen*

$$\mu = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega q(x)\,dx, \quad \eta = \inf_{0 \leqq \xi < \omega} \max\left(\int_\xi^{\xi+\omega} \frac{x-\xi}{p(x)}\,dx, \int_\xi^{\xi+\omega} \frac{\xi+\omega-x}{p(x)}\,dx\right) \tag{9}$$

und unter der Voraussetzung (8) *gilt für das Infimum λ_0 des Spektrums des Hillschen Operators die Abschätzung*

$$\frac{\mu}{1+\eta\mu} \leqq \lambda_0 \leqq \mu. \tag{10}$$

Beweis. Besitzt die reelle Funktion $\varphi(x) \in C_0^\infty(-\infty, +\infty)$ bei $x_0 \in [\xi, \xi+\omega]$ eine Nullstelle, so folgt mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\varphi^2(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\,dt\Big)^2 \leqq \left|\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{p(t)}\right| \cdot \int_\xi^{\xi+\omega} p(t)[\varphi'(t)]^2\,dt, \quad x \in [\xi, \xi+\omega]. \tag{11}$$

Mit

$$\int_\xi^{\xi+\omega} \left|\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{p(t)}\right| dx = \int_\xi^{x_0} \frac{x-\xi}{p(x)}\,dx + \int_{x_0}^{\xi+\omega} \frac{\xi+\omega-x}{p(x)}\,dx \leqq$$
$$\leqq \max\left(\int_\xi^{\xi+\omega} \frac{x-\xi}{p(x)}\,dx, \int_\xi^{\xi+\omega} \frac{\xi+\omega-x}{p(x)}\,dx\right) = \eta_\xi$$

folgt aus (11)

$$\int_\xi^{\xi+\omega} \varphi^2(x)\,dx \leqq \eta_\xi \int_\xi^{\xi+\omega} p(x)[\varphi'(x)]^2\,dx.$$

Ist $\xi \in [0, \omega)$ diejenige Stelle, wo η_ξ minimal ist, so gilt

$$\int_\xi^{\xi+\omega} \varphi^2(x)\,dx \leqq \eta \int_\xi^{\xi+\omega} p(x)[\varphi'(x)]^2\,dx.$$

Bezeichnet nun y_0 denjenigen Wert der komplexwertigen Funktion $y(x)=\varphi(x)+ +i\psi(x)\in C_0^\infty(-\infty, +\infty)$, für welchen $|y_0|\leqq|y(x)|$ auf $[\xi, \xi+\omega]$ gilt, so folgt mit

$$\int_\xi^{\xi+\omega} |y(x)-y_0|^2\,dx \leqq \eta \int_\xi^{\xi+\omega} p(x)\,|y'(x)|^2\,dx$$

und $\delta^2>0$ die Abschätzung

$$\int_\xi^{\xi+\omega} \left(p(x)\,|y'|^2+q(x)\,|y|^2\right)dx \geqq \frac{1}{\eta}\,\|y-y_0\|^2_{(\xi,\xi+\omega)}+\mu\,\|y_0\|^2_{(\xi,\xi+\omega)} =$$

$$= \frac{\mu}{1+\delta^2}\left[\frac{\delta^2}{\eta\mu}(1+\delta^{-2})\,\|y-y_0\|^2_{(\xi,\xi+\omega)}+(1+\delta^2)\,\|y_0\|^2_{(\xi,\xi+\omega)}\right].$$

Setzt man $\delta^2=\eta\mu$ und benutzt die Ungleichung

$$(1+\delta^{-2})\,\|y-y_0\|^2_{(\xi,\xi+\omega)}+(1+\delta^2)\,\|y_0\|^2_{(\xi,\xi+\omega)} \geqq \|y\|^2_{(\xi,\xi+\omega)},$$

so ergibt sich

$$\frac{\mu}{1+\eta\mu}\,\|y\|^2_{(\xi,\xi+\omega)} \leqq \int_\xi^{\xi+\omega} \left(p\,|y'|^2+q\,|y|^2\right)dx. \tag{12}$$

Wird schließlich $(-\infty, +\infty)$ als Vereinigung von Intervallen dargestellt, die aus dem Intervall $[\xi, \xi+\omega)$ durch Translation entstehen und die paarweise disjunkt sind, so folgt aus (12) durch Summation

$$\frac{\mu}{1+\eta\mu}\,\|y\|^2_{(-\infty,+\infty)} \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(p\,|y'|^2+q\,|y|^2\right)dx, \quad y\in C_0^\infty(-\infty, +\infty). \tag{13}$$

Die Abschätzung (13) gilt auch für Funktionen aus H_A. Aus

$$\frac{\mu}{1+\eta\mu}\,\|y\|^2 \leqq A[y, y]=(Ay, y), \quad y\in D(A),$$

folgt dann der eine Teil der Behauptung (10). Der andere Teil $\lambda_0\leqq\mu$ folgt aus

$$\lambda_0=\inf_{\|y\|>0}\frac{A[y, y]}{\|y\|^2},$$

wenn man Funktionen $y_N(x)$ verwendet, die aus den Funktionen

$$Y_N(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqq N\\ 0, & |x|>N\end{cases}$$

durch Mittelung mit einem festen Mittelungsradius ϱ entstehen [5], und den Grenzübergang $N\to\infty$ ausführt. Der Satz ist bewiesen.

Durch Zerlegung der Periodenintervalle in Teilintervalle besteht die Möglichkeit, die untere Schranke für λ_0 in (10) zu vergrößern. Mit

$$\eta_\nu = \max\left(\int\limits_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{x-\xi_\nu}{p(x)}\,dx,\ \int\limits_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{\xi_{\nu+1}-x}{p(x)}\,dx\right),\quad \xi=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_n=\xi+\omega,$$

$$\mu_\nu = \frac{1}{\xi_{\nu+1}-\xi_\nu}\int\limits_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} q(x)\,dx,\quad \sigma_\nu=\frac{\mu_\nu}{1+\eta_\nu\mu_\nu},\quad \nu=0,1,\ldots,n-1,$$

$$s(\xi,\mathfrak{z}_n)=\min_{0\leqq\nu\leqq n-1}\sigma_\nu,\quad S=\sup_{(\xi,\mathfrak{z}_n)} s(\xi,\mathfrak{z}_n),$$

wobei $\mathfrak{z}_n$ die Zerlegung $\mathfrak{z}_n=\{\xi=\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n=\xi+\omega\}$ bezeichnet, gilt offenbar auch $S\leqq\lambda_0$. Beispiel: Da $q(x)$ die Periode ω besitzt, gibt es Teilpunkte $\xi=\xi_0$, $\xi_1=\xi+\omega/2$ und $\xi_2=\xi+\omega$, so daß $\mu_0=\mu_1=\mu$ gilt. Mit

$$\tilde\eta=\max\left(\int\limits_{\xi}^{\xi+\frac{\omega}{2}}\frac{x-\xi}{p(x)}\,dx,\ \int\limits_{\xi}^{\xi+\frac{\omega}{2}}\frac{\xi+\frac{\omega}{2}-x}{p(x)}\,dx,\ \int\limits_{\xi+\frac{\omega}{2}}^{\xi+\omega}\frac{x-\xi-\frac{\omega}{2}}{p(x)}\,dx,\ \int\limits_{\xi+\frac{\omega}{2}}^{\xi+\omega}\frac{\xi+\omega-x}{p(x)}\,dx\right)$$

gilt dann

$$\frac{\mu}{1+\tilde\eta\mu}\leqq\lambda_0. \tag{14}$$

In dem Spezialfall $p(x)\equiv 1$ ist $\tilde\eta=\frac{\omega^2}{8}$. Ein besseres η ist $\frac{\omega^2}{\pi^2}$, welches die Abschätzung

$$\frac{\omega^2}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}|y'|^2\,dx\geqq\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}|y|^2\,dx,\quad y(0)=0,$$

liefert. Damit erhält man den

Satz 2. *Im Falle* $p(x)\equiv 1$ *und unter der Voraussetzung* (8) *gilt die Abschätzung*

$$\frac{\pi^2\mu}{\pi^2+\omega^2\mu}\leqq\lambda_0\leqq\mu. \tag{15}$$

Bemerkung 1: Ist $p(x)\equiv 1$, $q(x)$ stetig und $\mu=0$ und ersetzt man $q(x)$ durch $\varkappa q(x)$, wobei $\varkappa$ ein positiver Parameter ist, so strebt die untere Schranke in (2) für $\varkappa\to\infty$ mit dem Quadrat von $\varkappa$ gegen $-\infty$, dagegen verhält sich die Schranke, die sich aus der Formel (15) ergibt, asymptotisch nur wie $\varkappa q_0+\frac{\pi^2}{\omega^2}$.

Bemerkung 2: Eine andere Möglichkeit der Verbesserung der unteren Schranke von λ_0 ergibt sich, wenn man die Voraussetzung (8) fallen läßt und $q(x)$ gemäß

$$q(x)=q_+(x)+q_-(x),\quad q_+=\max(q(x),0),\quad q_-(x)=\min(q(x),0)$$

zerlegt, entsprechend wird

$$\mu_+ = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega q_+(x)\,dx, \quad \mu_- = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega q_-(x)\,dx$$

gesetzt. Die Zerlegung

$$A[y,y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{p(x)}{a}|y'|^2 + q_+(x)|y|^2\right)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{p(x)}{b}|y'|^2 + q_-(x)|y|^2\right)dx,$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1, \quad a,b>0,$$

der Form führt in entsprechender Weise zu der Abschätzung (vergl. [4])

$$\frac{\mu_+}{1+a\eta\mu_+} + \frac{\mu_-}{1+b\eta\mu_-} \leqq \lambda_0 \leqq \mu, \quad b < |\mu_-|^{-1}\eta^{-1}.$$

Die optimale Wahl der Parameter a und b ergibt als untere Schranke den Wert

$$\frac{\mu - 4\eta\mu_+|\mu_-|}{1+\eta\mu}, \quad |\mu_-| \leqq \min\left(\mu_+, \frac{1}{2\eta}\right), \tag{16}$$

der für $\inf q(x)=0$, d. h. für $|\mu_-|=0$ mit der unteren Schranke in (10) zusammenfällt. Im Falle $p(x)\equiv 1$ wählen wir wieder $\lambda=\omega^2/\pi^2$, so daß dann die Abschätzung

$$\frac{\pi^2\mu - 4\omega^2\mu_+|\mu_-|}{\pi^2+\omega^2\mu} \leqq \lambda_0 \leqq \mu, \quad |\mu_-| \leqq \min\left(\mu_+, \frac{\pi^2}{2\omega^2}\right), \tag{17}$$

gilt.

Die zuletzt angegebene Methode gestattet es, auch Funktionen zu berücksichtigen, die nicht nach unten beschränkt sind.

Zum Schluß bringen wir ein Beispiel: Wir wählen $p(x)\equiv 1$, $q(x)=\sin x$, $\omega=2\pi$. Die Formel (2) liefert für die untere Schranke den Wert -1. Um die Formel (15) anwenden zu können, wählt man zunächst $\tilde{q}(x)=\sin x+1$ und berechnet für diese Funktion die untere Schranke zu 0,2. Für die Funktion $q(x)=\sin x$ erhält man dann $-0{,}8$ als untere Schranke von λ_0. Ein besseres Resultat liefert die Formel (17), wenn man, um sie sinnvoll anzuwenden, z. B. $\tilde{q}(x)=\sin x+1/2$ wählt. Für die ursprüngliche Funktion $q(x)=\sin x$ erhält man so eine untere Schranke für λ_0, die bei $-0{,}69$ liegt. Das Infimum λ_0 liegt erst bei $-0{,}36$.

Literatur

[1] M. S. P. Eastham, The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, *Edinburgh and London* 1973.

[2] T. Kato, Note on the least eigenvalue of the Hill equation, *Quart. Appl. Math.*, **10** (1952), 292—294.

[3] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, *Berlin—Heidelberg—New York* 1966.

[4] E. Müller-Pfeiffer, Spektraleigenschaften eindimensionaler Differentialoperatoren höherer Ordnung, *Studia Math.* **34** (1970), 183—196.

[5] S. L. Sobolev, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, *Berlin* 1964.

(Eingegangen am 7. April 1975.)