Bemerkungen zu einem Teilerproblem

Von A. SCHIERWAGEN (Jena)

1. Ausgehend von den bekannten Teilerfunktionen wurden in [3] die für natürliche Zahlen a, b und reelle Zahlen ν, μ erklärten Funktionen

$$d_{\nu,\mu}(a, b; k) = \sum_{n^a m^b = k} n^{a\nu} m^{b\mu} \quad (n, m \in N^*)$$

und ihre summatorischen Funktionen

$$D_{\nu,\mu}(a, b; x) = \sum_{1 \leq k \leq x} d_{\nu,\mu}(a, b; k)$$

eingeführt. Hier soll speziell die Funktion $d(a, b; k) = d_{0,0}(a, b; k)$ hinsichtlich ihrer durchschnittlichen Größenordnung untersucht werden.

Zur Abschätzung von

$$D(a, b; x) = \sum_{1 \leq k \leq x} d(a, b; k)$$

ist folgendes zu bemerken: Für große x gilt

$$D(a, b; x) = h(a, b; x) + O(x^{\vartheta(a,b)})$$

mit

$$h(a, b; x) = \begin{cases} \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{\frac{1}{a}} + \zeta\left(\frac{a}{b}\right) x^{\frac{1}{b}} & \text{für} \quad a \neq b \\ x \log x + (2C-1)x & \text{für} \quad a = b = 1.\ ^{1)} \end{cases}$$

Auf elementarem Wege ergibt sich $\vartheta(a, b) \leq \dfrac{1}{a+b}$:
Für $a \neq b$ und mit $\dfrac{1}{a+b} = A$ ist

$$D(a, b; x) = \sum_{1 \leq n^a m^b \leq x} 1 = \sum_{\substack{1 \leq n^a m^b \leq x \\ m \leq x^A}} 1 + \sum_{\substack{1 \leq n^a m^b \leq x \\ m > x^A}} 1 =$$

$$= \sum_{m \leq x^A} \left[\left(\frac{x}{m^b}\right)^{\frac{1}{a}}\right] + \sum_{n \leq x^A} \quad \sum_{x^A < m \leq \left(\frac{x}{n^a}\right)^{\frac{1}{b}}} 1 =$$

[1]) $a = b \neq 1$ liefert gegenüber $a = b = 1$ nichts Neues. C sei die Eulersche Konstante.

$$= \sum_{n \leqq x^A} \left\{ \left[\left(\frac{x}{n^b} \right)^{\frac{1}{a}} \right] + \left[\left(\frac{x}{n^a} \right)^{\frac{1}{b}} \right] \right\} - [x^{\frac{1}{a+b}}]^2 =$$

$$= \sum_{n \leqq x^A} \left\{ \left(\frac{x}{n^b} \right)^{\frac{1}{a}} + \left(\frac{x}{n^a} \right)^{\frac{1}{b}} \right\} - x^{2A} + O(x^A) =$$

$$= \frac{a}{a-b} x^{2A} + \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{\frac{1}{a}} + \frac{b}{b-a} x^{2A} + \zeta\left(\frac{a}{b}\right) x^{\frac{1}{b}} - x^{2A} + O(x^A) =$$

$$= \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{\frac{1}{a}} + \zeta\left(\frac{a}{b}\right) x^{\frac{1}{b}} + O(x^{\frac{1}{a+b}}).$$

Entsprechendes gilt im Fall $a=b=1$. Die Bestimmung des Exponenten $\vartheta(1, 1)$ ist als Dirichletsches Teilerproblem bekannt, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll. Von RICHERT [6] wurde für $a<b$

$$\vartheta(a, b) \leqq \begin{cases} \dfrac{2}{3(a+b)} & \text{für} \quad b \leqq 2a \\ \dfrac{2}{5a+2b} & \text{für} \quad b \geqq 2a \end{cases}$$

bewiesen, wobei für $b=2a$ im Restglied der Faktor $\log x$ angebracht werden muß. Für den Spezialfall $a=1$, $b=2$, der für die Bestimmung der mittleren Anzahl der nichtisomorphen abelschen Gruppen gegebener Ordnung von Bedeutung ist, sind schon Verbesserungen des Richertschen Ergebnisses bekannt [2]).

Setzen wir für $a \neq b$

$$D(a, b; x) = \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{\frac{1}{a}} + \zeta\left(\frac{a}{b}\right) x^{\frac{1}{b}} + \Delta(a, b; x),$$

so zeigte KRÄTZEL hinsichtlich der Abschätzung von $\vartheta(a, b)$ nach unten in [3]

$$\Delta(a, b; x) \neq o\left(x^{\frac{1}{2(a+b)}}\right), \tag{1}$$

also $\vartheta(a, b) \geqq \dfrac{1}{2(a+b)}$, was für $a=b=1$ schon lange bekannt ist ([5]). Unter Verwendung einer auf SCHMIDT [9], LANDAU [4] und HARDY [1] zurückgehenden Methode habe ich (1) in der Arbeit [7] durch

$$\Delta(a, b; x) = \Omega \pm \left(x^{\frac{1}{2(a+b)}}\right) \tag{2}$$

verschärfen können. In [8] wurde das Resultat (2) mit einer von SKEWES [10] bzw. INGHAM [2] herrührenden Methode durch

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\Delta(a, b; x)}{x^{1/2(a+b)}} = \infty, \quad \liminf_{x \to \infty} \frac{\Delta(a, b; x)}{x^{1/2(a+b)}} = -\infty \tag{3}$$

[2]) Siehe z. B. KRÄTZEL [3], wo einige Arbeiten über diesen Spezialfall zitiert sind.

präzisiert. Mehr noch, in [8] wurde gezeigt, daß sich die erste Abschätzung in (3) durch

$$\Delta(a, b; x) = \Omega_+\left((x \log x)^{1/2(a+b)} \log\log x\right) \tag{4}$$

ersetzen läßt, allerdings unter der unangenehmen Einschränkung $\frac{2}{3} < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$. Demgegenüber gelten (1), (2), (3) für beliebige natürliche Zahlen a, b.

Der Beweis von (4) erfolgte in [8] wesentlich unter Verwendung einer modifizierten Form eines bekannten Satzes von Phragmén—Lindelöf. Der Gegenstand dieser Note ist nun, einen Beweis von (4) anzugeben, der ohne die erwähnte Modifikation des Satzes von Phragmén—Lindelöf auskommt. An ihre Stelle tritt ein Argument, das den Fejér—Kern enthält, in der Form, wie es schon beim Beweis von (3) verwendet wurde. Damit wird es gleichzeitig möglich, die oben angeführte Einschränkung für die Parameter a, b fallenzulassen. Das Ziel der vorliegenden Note läßt sich demnach formulieren als

Satz. *In der Darstellung*

$$D(a, b; x) = \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{\frac{1}{a}} + \zeta\left(\frac{a}{b}\right) x^{\frac{1}{b}} + \Delta(a, b; x)$$

gilt für beliebige positive ganze Zahlen $a \neq b$ die Abschätzung

$$\Delta(a, b; x) = \Omega_+\left((x \log x)^{1/2(a+b)} \log\log x\right). \tag{5}$$

2. Für den Beweis des Satzes werden drei Lemmata benötigt, die im folgenden bereitgestellt werden. Dabei setzen wir im weiteren gelegentlich zur Abkürzung $A = \frac{1}{a+b}$.

Lemma 1. *Für* $\omega \geqq 2\eta > 1$, $X\eta^{a+b} \geqq 1$ *und mit*

$$\tau(u) = \frac{\Delta(a, b; u^{a+b})}{u^{1/2}}$$

gilt

$$\sup_{\omega-\eta \leqq u \leqq \omega+\eta} \tau(u) \geqq T_X(\omega) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) + O\left(X^{-\frac{1}{2(a+b)}} \eta^{-1} \cdot \log X\right), \tag{6}$$

wobei

$$T_X(\omega) = \frac{1}{\pi\sqrt{h_2}} \sum_{1 \leqq k < X} \left(1 - \left(\frac{k}{X}\right)^{\frac{1}{a+b}}\right) \frac{d_{1-1/a,\, 1-1/b}(a, b; k)}{k^{1-\frac{1}{2(a+b)}}} \sin\left(2\pi h_1 k^{\frac{1}{a+b}} \omega + \frac{\pi}{4}\right) \tag{7}$$

mit

$$h_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}}, \quad h_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a+b}}$$

sein soll.

Beim Beweis [3]) wird maßgeblich eine von KRÄTZEL [3] stammende Identität für das Restglied $\Delta(a, b; x)$ verwendet, die — im Gegensatz zu der beim Beweis von (4) in [8] gebrauchten — ohne Einschränkungen für die Parameter a, b gültig ist. Daneben ist hier die Anwendung des Fejér—Kerns

$$K(y) = \left(\frac{\sin y/2}{y/2}\right)^2$$

von besonderer Bedeutung.

Lemma 2. *Sei für* $X>1$, $1 \leq k < X$ *und* $q>4$ $(q \in N)$

$$W(X, q) = \left\{\omega : \left|h_1 k^{\frac{1}{a+b}} \omega\right| < \frac{1}{q} \pmod 1\right\}. \tag{8}$$

Dann gilt für alle $\omega \in W(X, q)$

(9)

$$T_X(\omega) > \frac{1}{\pi\sqrt{2h_2}} \sum_{1 \leq k < X} \left(1 - \left(\frac{k}{X}\right)^{\frac{1}{a+b}}\right) \frac{d_{1-1/a,\,1-1/b}(a, b; k)}{k^{1-\frac{1}{2(a+b)}}} \cos\frac{2\pi}{q} = T_X(0) \cdot \cos\frac{2\pi}{q}.$$

Zum Beweis ist nur zu bemerken, daß nach (8)

$$\sin\left(2\pi h_1 k^{\frac{1}{a+b}} \omega + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi h_1 k^{\frac{1}{a+b}} \omega > \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\frac{2\pi}{q}$$

für $q>4$ ist. Gehen wir damit in (7), so folgt unmittelbar (9).

Lemma 3. *Für* $X \to \infty$ *gilt*

$$T_X(0) \sim \frac{4(a+b)}{3ab\pi\sqrt{2h_2}} X^{\frac{1}{2(a+b)}} \cdot \log X. \tag{10}$$

Der Beweis erfolgt mittels partieller Summation, wobei die Darstellung

$$D_{1-1/a,\,1-1/b}(a, b; x) = \frac{1}{ab} x \log x + O(x) = \frac{1}{ab} x \log x + r(x) \text{ [4])}$$

verwendet wird. Damit ergibt sich aus (7)

$$\begin{aligned} T_X(0) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2h_2}} \sum_{1 \leq k < X} \frac{d_{1-1/a,\,1-1/b}(a, b; k)}{k^{1-\frac{1}{2(a+b)}}} \left(1 - \left(\frac{k}{X}\right)^{\frac{1}{a+b}}\right) = \\ &= \frac{1}{ab\pi\sqrt{2h_2}} \int_1^X \frac{1-(t/X)^A}{t^{1-A/2}}\, d\big(t \log t + r(t)\big) + O(1) = \\ &= \frac{1}{ab\pi\sqrt{2h_2}} \left(-1 + 2(a+b) + \frac{3-2(a+b)}{3}\right) X^{A/2} \log X + O(X^{A/2}), \end{aligned}$$

das ist (10).

---

[4]) Vgl. [3], S. 166, Hilfssatz 8.
[3]) Vgl. [8], S. 153, Satz 1.

3. Bevor wir jetzt den Satz (5) beweisen, bemerken wir, daß aus (6) von Lemma 1

$$\limsup_{u\to\infty} \tau(u) \geqq \limsup_{\omega\to\infty} T_X(\omega) \tag{11}$$

für $X>1$ folgt, falls $\eta=\eta(\omega)\to\infty$. Dabei zeigen die Voraussetzungen von Lemma 1, daß mit ω auch u wächst und

$$\log u \sim \log \omega \tag{12}$$

gilt.

Sei nun $q>4$ eine natürliche Zahl. Aus dem Dirichletschen Satz über diophantische Approximation folgt dann, daß es zu jedem $X>1$ ein $\omega\in W\ (X, q)$ gibt, das der Bedingung

$$1 < \omega \leqq q^X \tag{13}$$

genügt. Aus (13) ergibt sich sofort

$$\log \omega \sim X\cdot \log q \tag{14}$$

für $\omega\to\infty$ bzw. $X\to\infty$.
Lemma 2 und (14) zeigen, daß

$$\limsup_{\omega\to\infty} T_X(\omega) \geqq \cos\frac{2\pi}{q} \limsup_{X\to\infty} T_X(0) \tag{15}$$

gilt, und aus (11) und (15) läßt sich

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\tau(u)}{(\log u)^{A/2}\log\log u} \geqq \frac{\cos\dfrac{2\pi}{q}}{2(\log q)^{A/2}}\cdot \limsup_{X\to\infty} \frac{T_X(0)}{X^{A/2}\log\log X} \tag{16}$$

ableiten, wenn man beachtet, daß nach (12) und (14) $\log u \sim X\cdot \log q$ für $u\to\infty$ bzw. $X\to\infty$ gilt. Mit Lemma 3 folgt schließlich aus (16)

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\Delta(a, b; x)}{(x\log x)^{1/2(a+b)}\log\log x} \geqq B\ ^{5)}, \tag{17}$$

wobei die in Lemma 1 gegebene Definition von $\tau(u)$ angewandt wurde. (17) schließt nun zweifellos die Beziehung (5) ein, so daß der Satz bewiesen ist.

Literatur

[1] G. H. Hardy, On Dirichlets divisor problem. *Proc. London Math. Soc.* (2) **15** (1916), 1—25,

[2] A. E. Ingham, On two classical lattice point problems. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* (2), **36** (1940), 131—38.

[3] E, Krätzel, Ein Teilerproblem. *J. Reine Angew. Math.* **235** (1969), 150—74.

[4] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen II. *Leipzig/Berlin* (1909), 711 ff.

[5] E. Landau, Über das Konvergenzgebiet einer mit der Riemannschen Zetafunktion zusammenhängenden Reihe. *Math. Ann.* **97** (1926), 251—90.

[5]) B ist eine positive, nur von a, b und q abhängige Konstante.

[6] H. E. Richert, Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung (I). *Math. Z.* **56** (1952), 21—32.
[7] A. Schierwagen, Ein unsymmetrisches Gitterpunktproblem. *Dissertation, Jena* 1974.
[8] A. Schierwagen, Über ein Teilerproblem, *Math. Nachr.* **72** (1976), 151—68.
[9] E. Schmidt, Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze. *Math. Ann.* **57** (1903), (1903), 195—204.
[10] S. Skewes, On the difference $\pi(x) - li(x)$, (I). *J. London Math. Soc.* **8** (1933), 277—83.

(Eingegangen am 11. April 1975.)